

-
1. Olkoon $A = \{a, e, t\}$, $B = \{k, t, e\}$ ja $C = \{e, i\}$. Kirjoita auki seuraavat joukot:
 - (a) $(A \setminus B) \cup C$
 - (b) $(A \cap B) \times C$
 - (c) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{B}(B)$
 2. Osoita induktiolla, että $\sum_{i=1}^n i^3 = n^2(n+1)^2/4$.
 3. Perustele, että mikä tahansa vähintään kaksimerkkinen aakkosto Σ on ekvivalentti binääri-aakkoston $\Gamma = \{0, 1\}$ kanssa siinä mielessä, että Σ :n merkkijonot voidaan helposti koodata Γ :n merkkijonoiksi ja kääntäen. Miten paljon merkkijonon pituus voi muuttua suunnittelemassasi koodauksessa (siis jos merkkijonon pituus on k Σ :ssa, mitä sen pituus on Γ :ssa)?
 4. Tarkastellaan päätösongelmaa "annettu ei-negatiiviset kokonaisluvut p, q ; onko $p > q$ ". Muotoile ongelma päätösongelmaformalismiin mukaiseksi. (Valitse sopiva aakkosto, lukuparien koodaus jne.) Mikä on ongelmaa vastaava formaali kieli?
 5. Olpe03-kielessä muuttujan nimeksi kelpaa aakkoston Σ_{ascii} merkkijono w joka:
 - koostuu merkeistä $\Sigma_{var} = \{a, \dots, z, A, \dots, Z, 0, \dots, 9\}$,
 - ei ala numerolla,
 - ei sisällä alkuosanaan mitään kielen varattua sanaa, joita ovat: **if, then, else, while, do, begin, end, not, and, read ja write**Tarkastellaan päätösongelmaa "annettu aakkoston Σ_{ascii} merkkijono w , onko w Olpe03-kielen luvallinen muuttujan nimi?".
 - muotoile ongelma päätösongelmaformalismiin mukaiseksi,
 - määrittele päätösongelmaa vastaava formaali kieli,
 - tee haluamallasi kielellä (pseudokielinenkin käy) ohjelma joka ratkaisee päätösongelman. Ohjelma siis saa syötteen merkkijonon ja vastaa 1 jos merkkijono kelpaisi Olpe03:n muuttujan nimeksi ja muuten 0.
 6. Tarkastellaan aakkoston Σ_{ascii} tasapainoisesti sulutettujen merkkijonojen ongelmaa. Merkkijono w on tasapainoisesti sulutettu jos sen jälkeen kun kaikki muut kuin sulkumerkit on pyyhitty pois, w on muotoa $(^i)^i$ jollain $i \in \mathbb{N}$, eli esim. $aa(b((xx)q))$ ja $((1+q)/4) - 7$ ovat tasapainoisesti sulutettuja, mutta $aa((b)$ ja $((1+q)/4(-7$ eivät.
 - muotoile ongelma päätösongelmaformalismiin mukaiseksi,
 - määrittele päätösongelmaa vastaava formaali kieli,
 - tee haluamallasi kielellä (pseudokielinenkin käy) ohjelma joka ratkaisee päätösongelman.
 7. Kuvaa seuraavat aakkoston $\{a, b\}$ kielet deterministisinä äärellisinä automaatteina.
 - (a) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ sisältää täsmälleen kaksi } a\text{:ta ja vähintään yhden } b\text{:n}\}$
 - (b) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ sisältää parittoman määrän } a\text{:ta}\}$
 - (c) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ sisältää parillisen määrän } a\text{:ta ja kolmella jaollisen määrän } b\text{:tä}\}$

8. Kuvaa seuraavat aakkoston $\{a, b\}$ kielet deterministisinä äärellisinä automaatteina.

(a) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ sisältää osajonon } aa \text{ tai } bb \}$

(b) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ei sisällä osajonoa } aa \text{ eikä } bb \}$

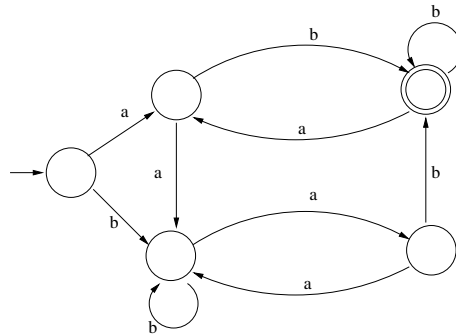
(c) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ sisältää osajonot } ab \text{ ja } ba \text{ (jotka voivat mennä päällekkäin)} \}$

9. Laadi epädeterministinen tai deterministinen äärellinen automaatti joka tunnistaa tehtävässä 5 määritellyn kielen.

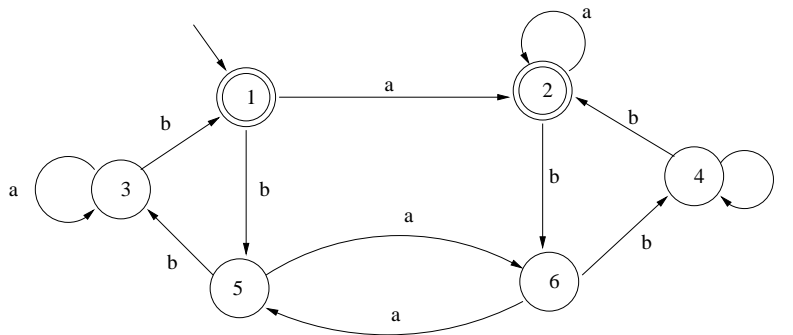
10. Muodosta äärellinen automaatti, joka tunnista seuraavien sääntöjen mukaiset muuttujamäärittelyt:

- muuttujen edessä on tyyppimäärittely `int` tai `float`,
- muuttujan nimi koostuu vain kirjaimista tai numeroista,
- muuttujanimen ensimmäinen merkki on kirjain,
- muuttujamäärittelyn perässä on puolipiste.

11. Muodosta seuraavaa deterministista äärellistä automaattia vastaava minimiautomaatti:



12. Muodosta seuraavaa deterministista äärellistä automaattia vastaava minimiautomaatti:



13. Laadi epädeterministinen äärellinen automaatti, joka testaa sisältääkö annettu aakkoston $\{x, y\}$ merkkijono osajonoa $xyxx$. Determinisoi automaatti. Minimoi se.

14. Muodosta säännöllinen lauseke, joka kuvaa oikeanmuotoisia suomalaisia katuosoitteita (esim. Mannerheimintie 5 A 24 00100 Helsinki).

15. Muodosta seuraavia kieliä vastaavat säännölliset lausekkeet:

(a) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w:n \text{ pituus on vähintään } 3 \text{ ja kolmas alkio on } 0\}$

(b) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w:n \text{ parittomat positiot ovat } 1 \text{ ja } w:ssä \text{ on parillinen määrä } 0:ia\}$

(c) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w:ssä \text{ ei ole merkkijonoa } 110\}$

16. Muodosta seuraavia kieliä vastaavat säännölliset

- (a) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ sisältää t\u00e4sm\u00e4lleen kaksi } a\text{:ta}\}$
- (b) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ sis\u00e4lt\u00e4\u00e4 v\u00e4hint\u00e4\u00e4n kaksi } a\text{:ta}\}$
- (c) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ sis\u00e4lt\u00e4\u00e4 parillisen m\u00e4\u00e4r\u00e4n } a\text{:ta}\}$

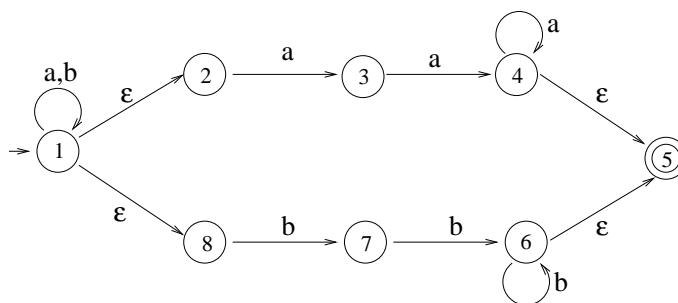
17. Kuvaa seuraavat aakkoston $\{a, b\}$ kielet s\u00e4\u00e4nn\u00f6llisin\u00e4 lausekkeina:

- (a) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ sis\u00e4lt\u00e4\u00e4 osajonon } aa \text{ tai } bb\}$
- (b) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ei sis\u00e4ll\u00e4 osajonoa } aa \text{ eik\u00e4 } bb\}$
- (c) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ sis\u00e4lt\u00e4\u00e4 osajonot } ab \text{ ja } ba \text{ (jotka voivat menn\u00e4 p\u00e4\u00e4llekk\u00e4in)}\}$

18. Sievenn\u00e4 seuraavia aakkoston $\{a, b\}$ s\u00e4\u00e4nn\u00f6llisi\u00e4 lausekkeita:

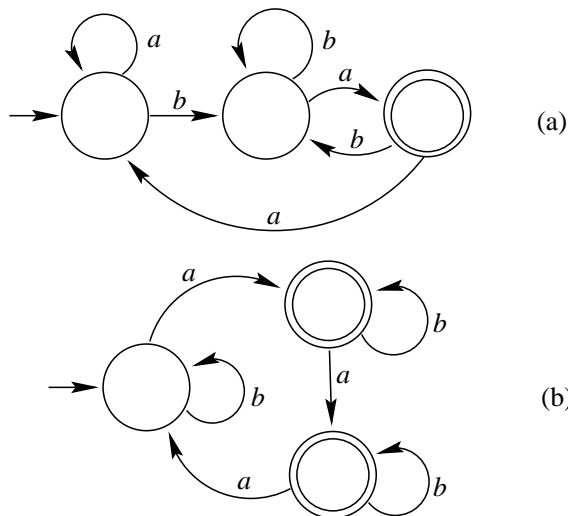
- (a) $(a \cup b \cup ab \cup bb)^*$
- (b) $(a^* \cup ba^*)^*$
- (c) $(a^* \cup b^*)^*$
- (d) $b^*(ab^+)^* \cup b^*(ab^+)^*a$

19. Muodosta oheista ϵ -automaattia vastaava ep\u00e4deterministinen (eli ϵ -iton) \u00e4\u00e4rellinen automaatti.

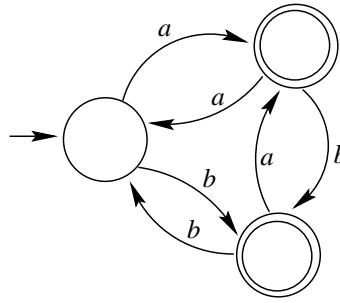


20. Muodosta luennolla esistetyll\u00e4 tavalla s\u00e4\u00e4nn\u00f6llist\u00e4 lauseketta $(0 \cup 1)^*$ vastaava ϵ -automaatti. Poista ϵ -siirtym\u00e4t. Determinisoi se. Minimoi se.

21. Muodosta luennolla esitetyn konstruktion mukaisesti seuraavia \u00e4\u00e4rellisi\u00e4 automaatteja vastaavat s\u00e4\u00e4nn\u00f6lliset lausekkeet:



22. Muodosta seuraavan äärellisen automaatin tunnistamaa kieltä kuvaava säännöllinen lauseke:



23. Osoita, että minkä tahansa aakkoston Σ säännöllisten kielten luokka on suljettu komplementtien ja leikkausten suhteen, so. jos kielet $A, B \subseteq \Sigma^*$ ovat säännöllisiä, niin samoin ovat myös kielet $\overline{A} = \Sigma^* \setminus A$ ja $A \cap B$. (Vihje: Komplementointia varten tarkastele A :n tunnistavaa determinististä äärellistä automaattia ja leikkausta varten sovelle de Morganin lakeja. — Huomaus: Tämä tulos osoittaa, että säännöllisissä lausekkeissa voitaisiin sallia myös komplementtioperaatio ja leikkausoperaatio ilman, että kuvattavien kielten luokka muuttuisi.)
24. Todista pumppauslemmalla että kieli $\{0^n 1^k 2^k \mid n, k \geq 0\}$ on epäsäännöllinen.
25. Todista pumppauslemmalla että kieli $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ on epäsäännöllinen.
26. Merkitään $w^R =$ merkkijono w takaperin kirjoitettuna (so. jos $w = a_1 a_2 \dots a_n$, niin $w^R = a_n \dots a_2 a_1$). Merkkijono on palindromi, jos $w = w^R$ (esimerkiksi "isorikassikakissakirosi"). Tarkastellaan aakkoston $\{a, b\}$ palindromien muodostamaa kieltä $\text{PAL} = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$.
- Osoita, että kieli PAL ei ole säännöllinen.
 - Laadi kielen tuottava kontekstiton kielioppi.
27. Ovatko seuraavat kielet säännöllisiä? Todista!
- $\{0, 00, 01, 100, 110\} \cup (\{\epsilon\} \cap \{0^k 1^k \mid k \geq 0\})$
 - $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w\text{:n pituus on pariton}\}$
 - $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w\text{:ssa on yhtä monta 0:aa ja 1:ää}\}$
 - $\{w \in \{a, b\}^* \mid w\text{:n sisältämien } a\text{-merkkien määrä on viidellä jaollinen ja } b\text{-merkkien määrä on pariton}\}$
28. Seuraavien kontekstittomien kielioppien tuottamat kielet ovat säännöllisiä. Kuvaa kielet säännöllisinä lausekkeina:
- $S \rightarrow AS \mid \epsilon$
 $A \rightarrow x \mid y$
 - $S \rightarrow SSS \mid 0 \mid 1$
29. Laadi kontekstiton kielioppi, joka kuvaa yhden muuttujan x polynomeja. Yksinkertaisuuden vuoksi voit olettaa, että termien kertoimet ja eksponentit ovat yksinumeroisia ei-negatiivisia kokonaislukuja ja ensimmäinen termi on etumerkitön. Termien ei tarvitse olla missä tietyssä järjestyksessä ja samanasteisia termejä voi polynomissa olla useita. Esim. $2 * x^2 - 2 * x + 1$, $x - x^9 - 7 + 3x + 4 * x$, $4x^0, x, 6$.
30. Laadi kontekstittomat kieliopit seuraavien kielten kuvaamiseen:
- $\{a^m b^n \mid m \geq n \geq 0\}$
 - $\{a^m b^n c^{2m+n} \mid m, n \geq 0\}$
 - $\{w \in \{a, b\}^* \mid w\text{:ssä on kaksi kertaa niin monta } a\text{:ta kuin } b\text{:tä}\}$
31. Laadi oikealle lineaarinen kielioppi kielen $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ei sisällä osajonoa } abaa\}$ kuvaamiseen.

32. (a) Osoita, että seuraava kielioppi on moniselitteinen:
 $S \rightarrow Aa \mid AB$
 $A \rightarrow Ab \mid b$
 $B \rightarrow Ba \mid a$
- (b) Muunna kielioppi LL(1)-muotoon luennoilla esitetyllä tavalla. Onko se nyt yksiselitteinen?
33. (a) Seuraava kielioppi ei ole LL(1)-muodossa:
 $S \rightarrow (L) \mid a$
 $L \rightarrow L, S \mid S$
 Muunna kielioppi LL(1)-muotoon.
- (b) Laadi pseudokoodi rekursiiviselle jäsentäjälle kieliopin kuvaamalle kielelle.
34. Onko oheinen kontekstion kielioppi yksiselitteinen? Perustele vastauksesi.
 $S \rightarrow Ab$
 $A \rightarrow Aa \mid Aaa \mid B \mid \epsilon$
 $B \rightarrow AB \mid bB \mid bbB \mid \epsilon$
35. Muunna edellisen tehtävän kielioppi Chomskyn normaalimuotoon. Esitä myös välivaiheet.
36. Muunna kielioppi
 $S \rightarrow (S) \mid A$
 $A \rightarrow SS \mid \epsilon$
 Chomskyn normaalimuotoon. Esitä myös välivaiheet.
37. Muunna kielioppi $S \rightarrow ABC \mid a$
 $A \rightarrow aAaa \mid \epsilon$
 $B \rightarrow bBbb \mid \epsilon$
 $C \rightarrow cCa \mid c$
 Chomskyn normaalimuotoon. Esitä myös välivaiheet.
38. Laajennetaan Olpe03:kieltä siten että
- Käytetyt muuttujat on määriteltävä samaan tapaan kuin esim. javassa: **int** n, i, j;
 - kaikki muuttujamäärittelyt tehdään ennen ohjelman käskyosan määrittelyä
 - ennen käskyosan määrittelyä voidaan määritellä myös aliohjelmia
 - käytössä on kahdentyyppisiä aliohjelmia, kokonaisluvun palauttavia ja lukua palauttamattomia. Ensimmäiset määritellään tyliin **function nimi ... end function**, ja jälkimmäiset tyyliin **procedure nimi ... end procedure**.
 - Aliohjelmilla voi olla paikallisia muuttujia, mutta ei kutsuparametrejä! Aliohjelmalla ei voi olla sisäkkäisiä aliohjelmia.
 - aliohjelmien nimet ovat syntaksiltaan samanlaisia kuten muuttujanimet
- Laajenna monisteen sivulla 102 olevaa kielioppia siten että se kattaa myös yllä kuvatun laajennuksen.
39. Tarkastellaan kontekstitonta kielioppia
 $S \rightarrow Ab$
 $A \rightarrow Aa \mid Aaa \mid B \mid \epsilon$
 $B \rightarrow AB \mid bB \mid bbB \mid \epsilon$
- (a) Onko kielioppi yksiselitteinen? Perustele vastauksesi.
- (b) Muunna kielioppi Chomskyn normaalimuotoon. Esitä myös välivaiheet.
40. Simuloi CYK-algoritmin toimintaa sen ratkaistaessa kuuluvatko merkkijonot 11001 ja 00110 kieliopin
 $S \rightarrow AS \mid 1$
 $A \rightarrow SA \mid 0$
 tuottamaan kieleen. Myönteisissä tapauksissa esitä merkkijonoille kieliopin mukaiset jäsenyspuut.

41. Simuloi CYK-algoritmin toimintaa sen ratkaistaessa, kuuluvatko merkkijonot aaaaa ja aaaaaa kieliopin
- $$S \rightarrow AB \mid BC$$
- $$A \rightarrow BA \mid a$$
- $$B \rightarrow CC \mid b$$
- $$C \rightarrow AB \mid a$$
- tuottamaan kieleen. Myönteisissä tapauksissa esitä merkkijonoille kieliopin mukaiset jäsenyspuut.
42. Simuloi CYK-algoritmin toimintaa sen ratkaistaessa, kuuluvatko merkkijonot 11001 ja 00110 kieliopin
- $$S \rightarrow AS \mid 1$$
- $$A \rightarrow SA \mid 0$$
- tuottamaan kieleen. Myönteisissä tapauksissa esitä merkkijonoille kieliopin mukaiset jäsenyspuut.
43. Osoita, että kieli $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ ei ole kontekstion. (Vihje: Tarkastele muotoa $a^k b^k c^k$ olevia merkkijonoja.)
44. Osoita, että kontekstittomien kielten luokka ei ole suljettu leikkausten eikä komplementtien suhteen. (Vihje: Esitä kieli $\{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$ kahden kontekstittoman kielen leikkauksena.)
45. Laadi pinoautomaatit seuraavien kielten tunnistamiseen:
- $\{w c w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
 - $\{w w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
 - $\{w \in \{a, b\}^* \mid w\text{:ssa on yhtä monta } a\text{:ta ja } b\text{:tä}\}$
46. Laadi rajoittamaton kielioppi kielen $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ tunnistamiseen.