Y101B matematiikka
Tentti 4.5.2005
Malliratkaisuja

1. Mies aikoo kasvattaa kaalia aittansa vierellä. Kaalimaa on aidattava, jottei naapurin pässi pääse syömään kaalinpäitä. Alue on suorakulmion muotoinen, ja aitta reunustaa toista pitkää sivua. Muut kolme sivua on aidattava, mutta aitatarpeita riittää vain 16 m varten. Mikä on näillä ehdoilla suurimman mahdollisen kaalimaan pinta-ala?

   Ratkaisu. Merkitään lyhyemmän sivun pituutta x. Koska kahteen lyhyeen sivuun menee $2x$ metriä aitatarpeita, pitkä sivu voi olla korkeintaan $16 - 2x$ metriä. Tällöin kaalimaan ala on

$$A(x) = x \cdot (16 - 2x) = -2x^2 + 16x.$$

   Maksimi löytyy derivaatan nollakohdasta tai määrittelyvälin päätepisteestä. Derivaatta on

$$A'(x) = -4x + 16,$$

   jonka ainoa nollakohta on $x = 4$. Lyhyen sivun täytyy olla vähintään 0 m ja korkeintaan 8 m (koska kahteen lyhyeen sivuun on käytettävissä korkeintaan 16 m aitaa). Siispä pinta-alan maksimi on jokin seuraavista luvuista

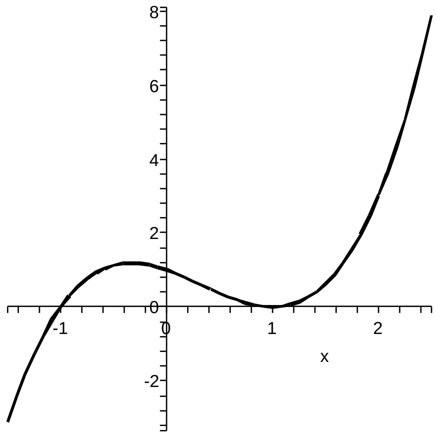
$$f(4) = 4 \cdot (16 - 2 \cdot 4) = 32, \quad f(0) = 0, \quad f(8) = 0.$$

   Maksimiala on 32 m^2.

2. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Laske kyseisen funktion ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala välillä $[-1, 1]$.

   Ratkaisu. Koska funktio on positiivinen koko välillä $[-1, 1]$, pinta-ala on funktion integraali kyseisen välin yli:

$$\int_{-1}^{1} x^3 - x^2 - x + 1\,dx = \mathop{\Big/}_{-1}^{1} \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right)$$
$$= \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + (-1)\right)$$
$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{5}{12} + \frac{11}{12} = \frac{4}{3}.$$



3. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' - 2y = e^x, \quad y(0) = 0.$$

Ratkaisu. Kyseessä on ensimmäinen asteen lineaarinen differentiaaliyhtälö. Merkitään y:n kerrointa $p(x) = -2$. Tämän eräs integraalifunktio on $P(x) = -2x$, jolloin integroimistekijä on

$$\mu(x) = e^{P(x)} = e^{-2x}.$$

Kerrotaan yhtälö puolittain integroimistekijällä:

$$e^{-2x}y' - 2e^{-2x}y = e^{-2x}e^x = e^{-x}.$$

Vasen puoli on tulon derivointisäännön mukaan $D(e^{-2x}y)$. Siispä

$$D(e^{-2x}y) = e^{-x}.$$

Oikean puolen integraalifunktio on $-e^{-x}$, joten

$$e^{-2x}y = -e^{-x} + C.$$

Jaetaan molemmat puolet termillä e^{-2x}, jolloin saadaan

$$y(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-2x}} + \frac{C}{e^{-2x}} = e^x + Ce^{2x}.$$

Alkuarvoehdon mukaan

$$y(0) = -e^0 + Ce^{2\cdot 0} = -1 + C = 0,$$

joten $C = 1$. Siispä ratkaisu on

$$y(x) = e^{2x} - e^x.$$

4. Eräällä harjulla maaston korkeus noudattaa osapuilleen funktiota

$$f(x, y) = 10 - \frac{1}{2}(e^x - y)^2.$$

Mihin suuntaan pisteeseen $(0, 2)$ satava vesi lähtee valumaan?

Ratkaisu. Ensinnäkin
$$f(x,y) = 10 - \frac{1}{2}((e^x)^2 - 2e^x y + y^2) = 10 - \frac{1}{2}e^{2x} + e^x y - \frac{1}{2}y^2.$$
Lasketaan funktion f gradientti. Tätä varten tarvitaan osittaisderivaatat:
$$\partial_x f(x,y) = -\frac{1}{2}e^{2x} \cdot 2 + ye^x = -e^{2x} + ye^x,$$
ja
$$\partial_y f(x,y) = e^x - \frac{1}{2} \cdot 2y = e^x - y.$$
Gradientti on siis
$$\nabla f(x,y) = (-e^{2x} + ye^x, e^x - y).$$
Lasketaan gradientti pisteessä $(0,2)$. Tämä kertoo mäen jyrkimmän nousun suunnan, joten vesi valuu vastakkaiseen suuntaan:
$$\nabla f(0,2) = (-e^{2\cdot 0} + 2e^0, e^0 - 2) = (-1+2, 1-2) = (1,-1).$$
Vesi valuu siis suuntaan $-(1,-1) = (-1,1)$.