Y101B matematiikka
Kurssikoe 28.4.2005
Malliratkaisuja

1. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x}.$$

Tutki ja perustele derivaatan avulla, missä funktio on kasvava, missä vähenevä, ja missä pisteissä funktiolla on ääriarvoja.

Ratkaisu. Lasketaan ensin funktion derivaatta. Se on osamäärän derivointisäännön mukaan

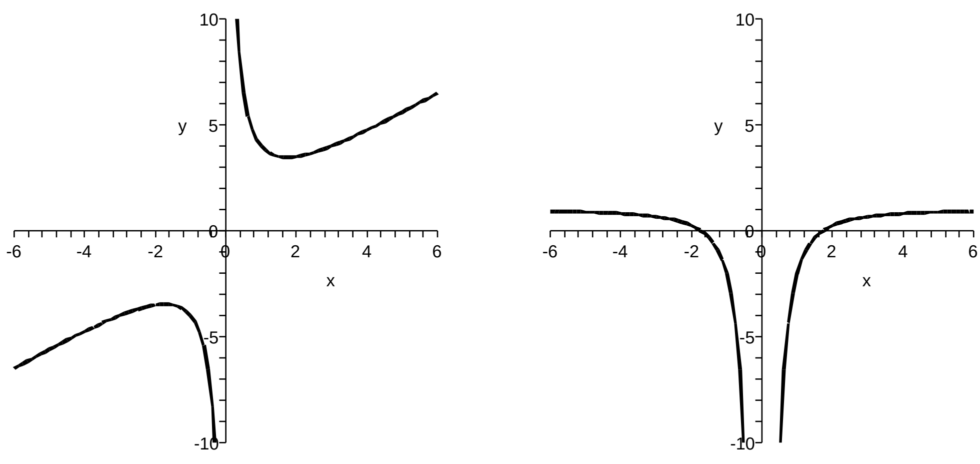
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{D(x^2+3)\cdot x - (x^2+3)\cdot D\,x}{x^2} = \frac{2x\cdot x - (x^2+3)\cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - x^2 - 3}{x^2} = \frac{x^2-3}{x^2}. \end{aligned}$$

Funktio on kasvava sellaisella välillä, jolla derivaatta on positiivinen, ja vähenevä sellaisella välillä, jolla derivaatta on negatiivinen. Koska derivaatan nimittäjä on aina positiivinen, merkki riippuu vain osoittajasta. Ratkaistaan osoittajan nollakohdat:

$$x^2 - 3 = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}.$$

Osoittajan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten se on positiivinen juurtensa välissä eli välillä $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$. Koska derivaatta ei ole määritelty nollassa, on se positiivinen väleillä $]-\sqrt{3}, 0[$ ja $]0, \sqrt{3}[$. Vastaavasti derivaatta on negatiivinen väleillä $]-\infty, -\sqrt{3}[$ ja $]\sqrt{3}, \infty[$.

Koska funktio f on siis kasvava väleillä $]-\sqrt{3}, 0[$ ja $]0, \sqrt{3}[$ sekä vähenevä väleillä $]-\infty, -\sqrt{3}[$ ja $]\sqrt{3}, \infty[$. Tästä voidaan päätellä, että derivaatan nollakohdista pistessä $x = -\sqrt{3}$ on paikallinen maksimi ja pisteessä $x = \sqrt{3}$ on paikallinen minimi.



Vasemmanpuoleisessa kuvassa on funktio f, oikealla derivaatta f'.

2. Radioaktiivisessa hajoamisessa hajoamisnopeus on suoraan verrannollinen jäljellä olevan aineen määrään. Eräässä hajoamisessa aineen määrä oli aluksi 100 kg ja kolmen vuoden kuluttua 50 kg. Määritä funktio, joka kuvaa aineen määrää ajan funktiona.

   Ratkaisu. Olkoon $m(t)$ aineen määrä ajanhetkellä t. Tällöin hajoamista kuvaa alkuarvotehtävä
$$m'(t) = km(t), \quad m(0) = 100,$$
missä k on verrannollisuuskerroin. Koska aineen määrä m on koko ajan positiivinen, yhtälö voidaan ratkaista separoimalla:
$$\frac{m'}{m} = k.$$
Vasemmalla puolella olevan funktion $g(m) = 1/m$ integraalifunktio on $\ln m$. Oikealla puolella olevan funktion $h(t) = k$ integraalifunktio on kt. Näin saadaan
$$\ln m = kt + C,$$
missä C on integroimisvakio. Siispä
$$m(t) = e^{\ln m} = e^{kt+C} = m_0 e^{kt},$$
missä on merkitty $m_0 = e^C$. Alkuarvoehdon mukaan
$$m(0) = m_0 e^{k\cdot 0} = m_0 = 100,$$
joten $m(t) = 100e^{kt}$. Lisäksi
$$m(3) = 100e^{k\cdot 3} = 50,$$
josta
$$e^{3k} = \frac{1}{2},$$
ja
$$k = \frac{1}{3}\ln\frac{1}{2} \approx -0{,}23.$$
Lopulta
$$m(t) = 100e^{-0{,}23t}.$$

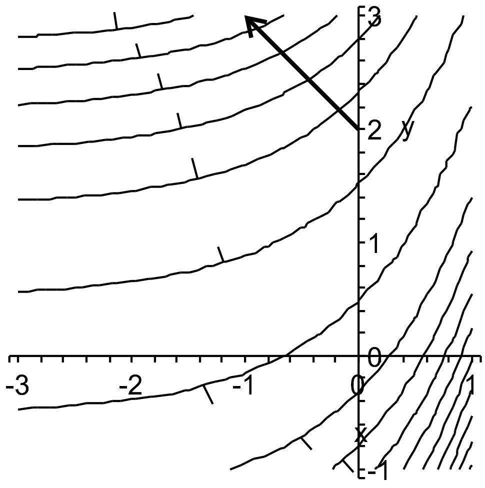
3. Eräällä harjulla maaston korkeus noudattaa osapuilleen funktiota
$$f(x,y) = 10 - \frac{1}{2}(e^x - y)^2.$$
Mihin suuntaan pisteeseen $(0,2)$ satava vesi lähtee valumaan?

   Ratkaisu. Ensinnäkin
$$f(x,y) = 10 - \frac{1}{2}((e^x)^2 - 2e^x y + y^2) = 10 - \frac{1}{2}e^{2x} + e^x y - \frac{1}{2}y^2.$$
Lasketaan funktion f gradientti. Tätä varten tarvitaan osittaisderivaatat:
$$\partial_x f(x,y) = -\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2 + ye^x = -e^{2x} + ye^x,$$
$$\partial_y f(x,y) = e^x - \frac{1}{2}\cdot 2y = e^x - y.$$
Gradientti on siis
$$\nabla f(x,y) = (-e^{2x} + ye^x, e^x - y).$$

Lasketaan gradientti pisteessä $(0,2)$. Tämä kertoo mäen jyrkimmän nousun suunnan, joten vesi valuu vastakkaiseen suuntaan:

$$\nabla f(0,2) = (-e^{2\cdot 0} + 2e^0, e^0 - 2) = (-1+2, 1-2) = (1,-1).$$

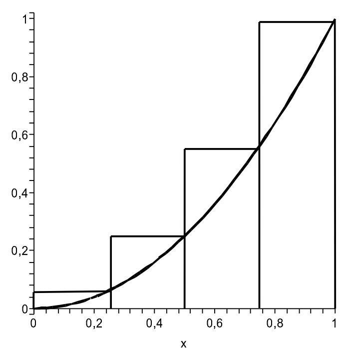
Vesi valuu siis suuntaan $-(1,-1) = (-1,1)$.



4.a) Laske funktion $f(x) = x^2$ yläsumma välillä $[0,1]$, kun jakovälejä on neljä eli jakovälin pituus on $1/4$.

Ratkaisu. Funktion yläsumma lasketaan ottamalla jokaisella osavälillä funktion suurin arvo ja kertomalla se osavälin pituudella. Koska f on kasvava, suurin arvo saavutetaan aina osavälin oikeanpuoleisessa päätepisteessä. Yläsumma on siis

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} + f(1)\cdot\frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} + 1\right) = \frac{15}{32}.
\end{aligned}$$



4.b) Laske integraali

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x + y + z \, dz \, dy \, dx.$$

Ratkaisu. Integraali lasketaan sisimmästä uloimpaan:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^x \left(\int_0^{xy} x + y + z \, dz \right) \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^x \Big/_{\!0}^{xy} \left(xz + yz + \frac{1}{2} z^2 \right) \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^x \left(x \cdot xy + y \cdot xy + \frac{1}{2}(xy)^2 \right) - (0 + 0 + 0) \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^x x^2 y + xy^2 + \frac{1}{2} x^2 y^2 \, dy \right) \, dx = \int_0^1 \Big/_{\!0}^{x} \left(\frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{3} x y^3 + \frac{1}{6} x^2 y^3 \right) \, dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 \cdot x^2 + \frac{1}{3} x \cdot x^3 + \frac{1}{6} x^2 \cdot x^3 \right) - (0 + 0 + 0) \, dx \\
&= \int_0^1 \frac{5}{6} x^4 + \frac{1}{6} x^5 \, dx = \Big/_{\!0}^{1} \left(\frac{5}{30} x^5 + \frac{1}{36} x^6 \right) = \frac{5}{30} \cdot 1^5 + \frac{1}{36} \cdot 1^6 - 0 + 0 = \frac{7}{36}.
\end{aligned}
$$