1. Johdanto

Kurssilla Y101B tutustutaan reaalifunktioiden analysointiin ja dynaamisiin systeemeihin. Reaalifunktioiden analyysissa ollaan kiinnostuneita siitä, miten funktion arvot muuttuvat muuttujan arvojen muutoksen tuloksena. Tällaista muutosnopeutta kuvaa funktion *derivaatta*. Kääntäen, jos funktion arvojen muutokset tunnetaan, funktion arvoja voidaan laskea *integraalin* avulla. Derivaatan ja integraalin käsitteet sekä niihin liittyvät laskusäännöt ovat hyvin tärkeitä monissa sovelluksissa. Niiden avulla voidaan esimerkiksi laskea suureiden kertymiä tai maksimi- ja minimiarvoja sekä ennustaa tulevaa kehitystä.

Dynaamisessa systeemissä systeemin tila riippuu jollain tavoin sen edellisistä tiloista. Tyypillisesti esimerkiksi jonkin suureen kasvunopeus riippuu sen nykytilasta. Tällöin seuraavat tilat voidaan laskea, jos tunnetaan tämä kasvunopeuden riippuvuus. Tällaisia yksinkertaisia systeemejä voidaan ratkaista *differentiaaliyhtälöiden* avulla. Näihin tutustutaan tällä kurssilla lähinnä tietyissä erityistapauksissa.

Kurssi jakautuu karkeasti seuraaviin osiin:

- derivointi,
- integrointi,
- differentiaaliyhtälöt,
- usean muuttujan funktiot.

Kussakin osassa tarvitaan aikaisempien osien tietoja. Uusia käsitteitä opittaessa painotetaan sekä käsitteen sisällön omaksumista että siihen liittyviä laskumenetelmiä. Sovellettaessa opittua asiaa täytyy sekä tietää mistä puhutaan että osata suorittaa tarvittavat laskut.

Jos aikaa riittää, tutustutaan kevyesti myös siihen, miten näitä asioita käsitellään tietokoneella. Käytännön soveltavassa matematiikassa tietokoneavusteiseen laskentaan törmää joka tapauksessa ennen pitkää.

2. Reaaliarvoiset funktiot

2.1. **Funktio.** Funktio on tämän kurssin tärkein käsite. Sen määritteleminen yksikäsitteisellä mutta ymmärrettävällä tavalla ei kuitenkaan ole helppoa. Sovelluksissa funktio kuvaa usein jonkin suureen kehitystä ajan tai paikan mukana. Voidaan esimerkiksi ilmoittaa lämpötila ajan tai paikan funktiona. Toisinaan funktio ilmoittaa abstraktimpia riippuvuuksia, kuten aitauksen pinta-alan käytettävissä olevan aitamateriaalin funktiona. Nämä ovat esimerkkejä jatkuvista reaaliarvoisista funktioista. Kun funktiota käsitellään matemaattisesti, ei kuitenkaan ole tärkeää, minkätyyppisestä riippuvuudesta on kysymys. Matemaattisesti funktion määrittelee kokonaan *riippuvuussääntö*, joka voidaan joskus - ei käytännössä läheskään aina - kirjoittaa laskulausekkeena tai ryhmänä laskulausekkeita.

Merkinnässä $f : A \to B$ joukkoa A kutsutaan funktion *lähtö- tai määrittelyjoukoksi* ja joukkoa B funktion *maalijoukoksi*. Funktio f liittää *jokaiseen* joukon A alkioon x *yksikäsitteisen* alkion joukosta B. Merkintä $f(x)$ tarkoittaa sitä maalijoukon alkiota, johon lähtöjoukon alkio x liittyy. Tätä sanotaan *funktion f arvoksi muuttujan arvolla x*.

Tällä kurssilla maalijoukko on aina (reaali)lukujen joukko, jolloin funktiota voidaan kutsua reaaliarvoiseksi. Lähtöjoukko on yleensä jokin reaalilukusuoran osa, avoin tai suljettu väli tai näiden yhdistelmä. Kurssin loppupuolella käsitellään funktioita, joiden lähtöjoukko voi olla moniulotteinen, kuten osa tasosta. Olennaista on, että

i) jokaista lähtöjoukon alkiota vastaa jokin funktion arvo, ja
ii) yhtäkään lähtöjoukon alkiota ei vastaa useampi funktion arvo.

Esimerkki 2.1. Linja-auto ajaa Kotkasta Helsinkiin kahdessa tunnissa. Merkitään auton nopeusmittarin ilmoittamaa nopeutta ajan funktiona $v : [0, 2] \to \mathbb{R}$, missä aika on ilmoitettu tunteina. Auton nopeus lähtöpisteessä ja määränpäässä $v(0) = v(2) = 0$. Funktiolla on muitakin nollakohtia (pysähdyspaikat), mutta kaiken kaikkiaan $v(t) \geq 0$ kaikilla ajan arvoilla t. Tämän funktion arvojen laskemiseen ei ole mitään laskulauseketta.

Esimerkki 2.2. Funktioita $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joiden arvot ovat muotoa

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kutsutaan *polynomifunktioiksi*. Tällaisia ovat esimerkiksi $P_1(x) = x^2$ ja $P_2(x) = -3x^5 + 2x+7$. Lukuja a_j kutsutaan polynomin *kertoimiksi*. Suurin n, joka esiintyy x:n potenssissa on polynomin *kertaluku eli aste*. Polynomit ovat helpoimpia käsiteltäviä funkioita, jotka voidaan laskea laskulausekkeesta.

Esimerkki 2.3. Funktiot $R : A \to \mathbb{R}$, joiden arvot voidaan ilmoittaa muodossa $R(x) = P(x)/Q(x)$, missä P ja Q ovat molemmat polynomeja, ovat *rationaalifunkioita*. Rationaalifunktio ei ole määritelty nimittäjän Q nollakohdissa. Esimerkiksi funktion $R_1(x) = 1/x$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (reaaliluvut ilman nollaa), ja funktion $R_2(x) = (2x+3)/(x^2 - 2x)$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

Esimerkki 2.4. Funktiota, jonka arvot lasketaan eri osissa lähtöjoukkoa eri lausekkeesta, kutsutaan *paloittain määritellyksi*. Esimerkiksi itseisarvofunktio määritellään seuraavilla lausekkeilla:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Jako voi olla monimutkaisempikin, kuten funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

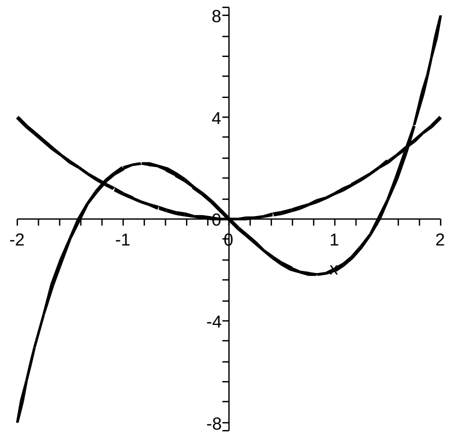
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{kun } x \text{ on joku muu kokonaisluku} \\ 1, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Esimerkki 2.5. Tarkastellaan lämpötilan vaihtelua metsässä päivän aikana. Tämä voidaan ilmoittaa funktiona $T : A \times [0, 24] \to \mathbb{R}$, missä A on (x,y)-koordinaatiston osa. Lähtöjoukko $A \times [0, 24]$ tarkoittaa, että muuttujaksi kelpaa $((x, y), t)$, missä (x, y) ovat paikan koordinaatteja metsässä (joukossa A) ja t ajanhetki tunteina välillä $[0, 24]$. Jonain päivänä voisi olla vaikka $T((2, 3), 12) = 15$ ja $T((-1, 4), 20) = 10$.

2.2. **Kuvaaja.** Reaaliarvoinen funktio voidaan usein esittää koordinaatistoon piirretyn kuvaajan eli *graafin* avulla. Tällöin funktion erityispiirteet, kuten kasvunopeus, ääriarvot ja epäjatkuvuuskohdat on helppo hahmottaa. On muistettava, että tarkkakaan piirros ei voi tyhjentävästi kuvata funktion käyttäytymistä, eikä kaikista funktioista edes pystytä piirtämään havainnollistavaa kuvaa. Siksi kuvaajan perusteella ei *koskaan* voi sanoa mitään varmaa funktion arvoista, vaan aina on osattava perustella arvionsa laskien. Kuvaajan piirtäminen on kuitenkin yksi parhaista keinoista oppia ymmärtämään funktion luonnetta.

Kaikki käyrät eivät kuitenkaan kuvaa funktioita. Koska funktion arvojen täytyy olla yksikäsitteisiä, ei yhtä x-arvoa saa vastata kuvaajassa useampia y-arvoja. Jos siis joku pystysuora leikkaa kuvaajaksi väitetyn käyrän useammassa kuin yhdessä kohdassa, kyseessä ei ole reaalifunktion kuvaaja.

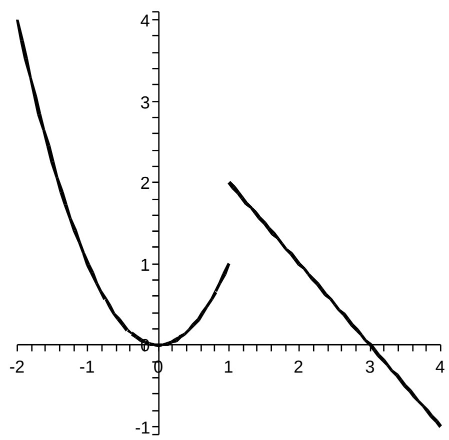
Esimerkki 2.6. Polynomifunktioiden $f(x) = x^2$ ja $g(x) = 2x^3 - 4x$ kuvaajat. Kuvan perusteella näyttäisi, että piste $x = 1{,}4$ olisi funktion g nollakohta, mutta oikeasti $g(1{,}4) = -0{,}112$.



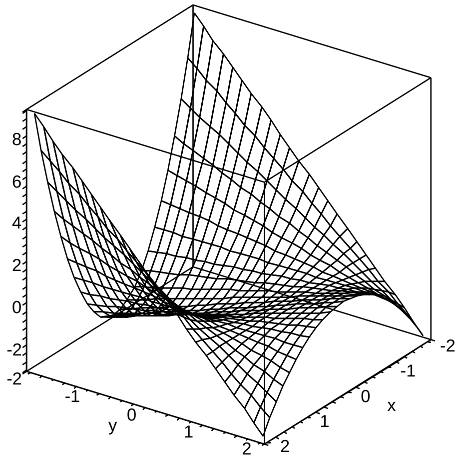
Esimerkki 2.7. Paloittain määritellyn funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} x^2, \text{ kun } x < 1 \\ -x + 3, \text{ kun } x \geq 1 \end{cases}$$

kuvaaja. Funktiolla on epäjatkuvuuskohta pisteessä $x = 1$. Kuvaajasta ei näe, onko $h(1) = 1$ vai $h(1) = 2$. Funktion lausekkeesta tiedetään, että jälkimmäinen pätee.



Esimerkki 2.8. Funktion $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $k(x, y) = (x^2 - 1)(1 - y)$ kuvaaja. Funktion lähtöjoukko on kaksiulotteinen taso. Kuvaaja muodostaa eräänlaisen satulapinnan origon lähistöllä, mutta funktion käyttäytymisestä kauempana origosta ei voi kuvan perusteella sanoa mitään.



3. Raja-arvo ja jatkuvuus

Monien yleisten reaalifunktioiden kuvaajat ovat katkeamattomia käyriä. Tällaisilla funktioilla on se ominaisuus, että muuttujan arvon muuttuessa pienen määrän myös funktion arvo muuttuu vähän eikä tee hyppäystä. Tätä ominaisuutta sanotaan *jatkuvuudeksi.* Luonnossa on paljon esimerkkejä jatkuvista funktioista, kuten huoneen keskilämpötila ajan funktiona. Lukuunottamatta poikkeavia olosuhteita, lämpötila ei tee hyppäyksiä ajan kuluessa. Myös polynomifunktiot, rationaalifunktiot sekä juurifunktiot ovat kaikki jatkuvia funktioita.

3.1. Raja-arvo.

Funktion jatkuvuuden toteaminen jossain pisteessä vaatii, että funktion arvoja tarkastellaan tuon pisteen ympäristössä. Tätä varten määrittelemme erikseen *raja-arvon* käsitteen. Sitä käytämme jatkossa määrittelemään muitakin käsitteitä. Raja-arvo kuvaa funktion käyttäytymistä jonkin pisteen lähistöllä.

Määritelmä 3.1. Luku a on funktion f *raja-arvo* pisteessä x_0, jos $f(x)$ saadaan niin lähelle lukua a kuin halutaan, kun x on riittävän lähellä pistettä x_0. Tällöin merkitään $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$.

Raja-arvo liittyy siis aina johonkin muuttujan arvoon eikä sitä välttämättä ole olemassa. Esitämme tässä yhden esimerkin määritelmän käytöstä raja-arvon toteamisessa. Yleensä tällä kurssilla riittää raja-arvon käsitteen intuitiivinen ymmärtäminen. On myös olemassa laskusääntöjä, joiden avulla raja-arvon voi päätellä tietyissä tilanteissa.

Esimerkki 3.2. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$. Todistetaan, että $\lim_{x\to 1} = 2$. Olkoon sitä varten y jokin lähellä 2:ta oleva luku, kuitenkin $y \neq 2$. Kun x:n etäisyys pisteestä 1 on pienempi kuin $\frac{1}{2}|y-2|$, niin

$$|f(x) - 2| = |2x - 2| = 2|x-1| < 2 \cdot \frac{1}{2}|y-2| = |y-2|,$$

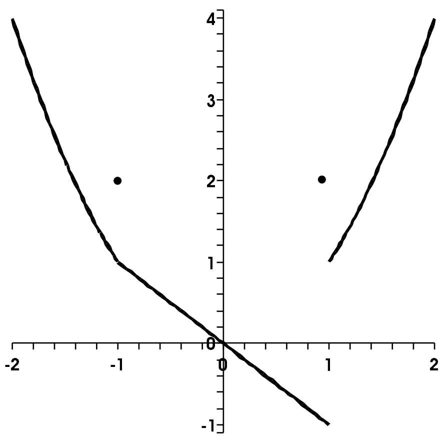
eli $f(x)$ on lähempänä pistettä 2 kuin y. Tämä pätee kaikilla y, joten funktion f raja-arvo pisteessä 1 on 2.

Huom. Täytyy muistaa, ettei funktion *arvo* pisteessä x_0 vaikuta mitenkään funktion *raja-arvoon* pisteessä x_0.

Esimerkki 3.3. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seuraavasti (ks. kuva):

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x < -1 \text{ tai } x > 1 \\ 2, & \text{kun } x = -1 \text{ tai } x = 1 \\ -x, & \text{kun } x = -1 < x < 1. \end{cases}$$

Funktiolla ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 1$, sillä tuon pisteen ympärillä funktion arvot ovat kaukana toisistaan, oli x miten lähellä 1:tä tahansa. Sen sijaan funktion raja-arvo pisteessä $x = -1$ on 1, vaikka $f(1) = 2$.



Voidaan myös tutkia, mitä arvoa funktion arvot lähestyvät muuttujan arvojen kasvaessa tai vähetessä rajatta. Tällaista arvoa, jos sellainen löytyy, kutsutaan joskus raja-arvoksi äärettömyydessä, ja merkitään $\lim_{x\to\infty} f(x)$ tai $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Käytännössä seuraavat säännöt helpottavat raja-arvojen toteamista.

1. $\lim_{x\to x_0} c = c$.
2. $\lim_{x\to x_0} x = x_0$.
3. $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$.
4. Jos $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, niin
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab.$$
Jos lisäksi $b \neq 0$, niin
$$\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = a/b.$$

Näistä säännöistä seuraa esimerkiksi, että kaikilla polynomeilla P pätee
$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

Esimerkki 3.4. Laskettava $\lim_{x\to 2}(-x^2 + 3x - 1)$. Koska kyseessä on polynomifunktio, voidaan raja-arvo laskea suoraan sijoittamalla lausekkeeseen:
$$\lim_{x\to 2}(-x^2 + 3x - 1) = -2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = 1.$$

Esimerkki 3.5. Joskus raja-arvoa tarvitaan, kun funktion arvoa ei voida laskea. Rationaalifunktiota $R(x) = (x^2 - x)/(x - 1)$ ei voida määritellä pisteessä $x = 1$, mutta raja-arvo kyseisessä pisteessä määräytyykin ympärillä olevista pisteistä. Kun siis $x \neq 1$, niin
$$R(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{x(x - 1)}{x - 1} = x,$$
joten $\lim_{x\to 1} R(x) = \lim_{x\to 1} x = 1$.

Esimerkki 3.6. Rationaalifunktioiden raja-arvoja äärettömyydessä voidaan laskea supistamalla lauseke termillä x^r, missä r on nimittäjän aste. Tällä tavoin saadaan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+3x}{2x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1+\frac{3}{x}}{2+\frac{5}{x^2}} = \frac{-1+0}{2+0} = -\frac{1}{2}.$$

Tässä käytetään hyväksi edellä mainittuja laskusääntöjä. Toisaalta

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{2x^2-8} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{8}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+0}{2-0} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}x = \infty.$$

Raja-arvoa ei ole vaan sanotaan, että *funktion arvot kasvavat rajatta.*

3.2. **Jatkuvuus.** Raja-arvon avulla voidaan määritellä funktion jatkuvuus.

Määritelmä 3.7. Funktio f on *jatkuva pisteessä* x_0, jos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

eli funktion raja-arvo pisteessä x_0 on sama kuin funktion arvo kyseisessä pisteessä. Funktio on *jatkuva*, jos se on jatkuva kaikissa määrittelyjoukkonsa pisteissä.

Esimerkki 3.8. Aiemmin on todettu, että kaikilla polynomifunktioilla P pätee $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$. Siispä kaikki polynomifunktiot ovat jatkuvia. Myös kaikki rationaalifunktiot ovat jatkuvia koko määrittelyjoukossaan.

Esimerkki 3.9. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

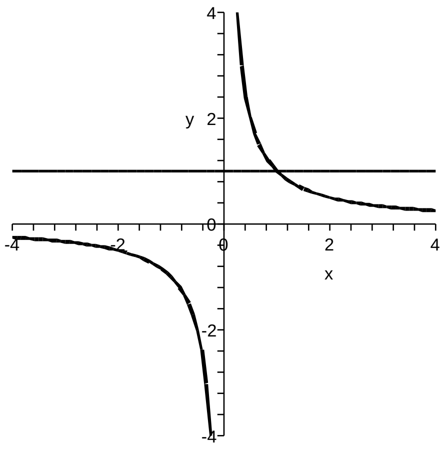
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \neq 1 \\ a, & \text{kun } x = 1. \end{cases}$$

Funktio f on jatkuva ainakin kaikissa muissa pisteissä paitsi pisteessä $x = 1$. Koska raja-arvo pisteessä $x = 1$ ei riipu funktion arvosta kyseisessä pisteessä, saadaan $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x = 1$. Jos nyt $a = 1$, niin funktion arvo pisteessä 1 on sama kuin raja-arvo kyseisessä pisteessä, ja funktio on jatkuva koko määrittelyjoukossaan. Jos $a \neq 1$, piste $x = 1$ on funktion f *epäjatkuvuuskohta.*

Esimerkki 3.10. Tarkastellaan rationaalifunktioita $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, $g(x) = x/x$. Molemmat funktiot ovat jatkuvia kaikissa määrittelyjoukkonsa pisteissä. Funktiolla f ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 0$, sillä tuota pistettä lähestyttäessä f saa mielivaltaisen suuria ja pieniä arvoja. Toisaalta

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x/x = \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

koska raja-arvoon ei vaikuta se, ettei funktiota ole määritelty kyseisessä pisteessä. Nyt voitaisiin määritellä $g(0) = 1$, jolloin funktio g pysyisi jatkuvana. Toisaalta funktiolle f ei voi määritellä mitään arvoa pisteeseen 0 niin, että f pysyisi jatkuvana, koska f:llä ei ollut lainkaan raja-arvoa tuossa pisteessä.



4. Derivaatta

Ajatellaan jälleen linja-autoa reitillään Kotkasta Helsinkiin. Olkoon $s : [0, 2] \to \mathbb{R}$ funktio, joka kertoo kuljetun matkan ajan funktiona. Linja-auton keskinopeus matkan aikana saadaan luonnollisesti jakamalla kuljettu matka siihen käytetyllä ajalla: $v_k = (s(2) - s(0))/2 = (130 - 0)/2 = 65$ (km/h). Voi olla, että matkan loppupuoli sujui hitaammin kuin alkuosa, ja $s(1) = 80$ (km). Tällöin loppupuolella keskinopeus on ollut vain $v_{k2} = (s(2) - s(1))/1 = (130 - 80)/1 = 50$ (km/h).

Tällä tavalla aikavälin pituutta lyhentämällä saadaan aina tarkempaa tietoa linja-auton nopeudesta kullakin aikavälillä. Hetkellisen nopeuden laskemiseksi pitäisi kuitenkin aikavälin pituuden olla nolla, jolloin nopeuden lauseke ei ole määritelty. Tämän ongelman kiertämiseksi voimme tarkastella raja-arvoa

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h}.$$

Jos tämä raja-arvo on olemassa, se kuvaa linja-auton *hetkellistä nopeutta* ajanhetkellä x. Ajatus on siis tarkastella yhä lyhempiä ja lyhempiä aikavälejä h, ja toivoa, että keskinopeus lähestyy jotain raja-arvoa.

Tämä aivan tarkastelu voidaan yleistää koskemaan mielivaltaisia funktioita. Matematiikassa puhutaan keskinopeuden sijasta *erotusosamäärästä* ja hetkellisen nopeuden sijasta funktion *derivaatasta*.

Määritelmä 4.1. Funktio f on *derivoituva pisteessä* x, jos erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on olemassa. Tätä raja-arvoa merkitään $f'(x)$, $Df(x)$ tai $\frac{df}{dx}(x)$, ja kutsutaan funktion f *derivaataksi* pisteessä x. Funktio on *derivoituva*, jos se on derivoituva jokaisessa määrittelyjoukon pisteessä.

Derivaatta kuvaa funktion hetkellistä muutosnopeutta. Jos funktio kuvaa kuljettua matkaa, derivaatta kuvaa nopeutta; jos funktio kuvaa nopeutta, derivaatta kuvaa kiihtyvyyttä; jos funktio kuvaa lämpötilaa, derivaatta kuvaa lämpenemis- tai jäähtymisnopeutta. Derivaatan avulla saadaan paljon tietoa funktion käyttäytymisestä.

Esimerkki 4.2. Tarkastellaan polynomifunktiota $f(x) = x^2$ pisteessä $x = 2$. Erotusosamäärä tuossa pisteessä on

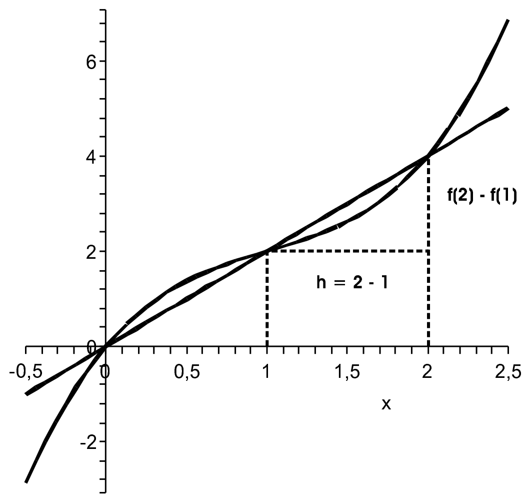
$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \frac{4h+h^2}{h} = 4+h.$$

Tällä on raja-arvo

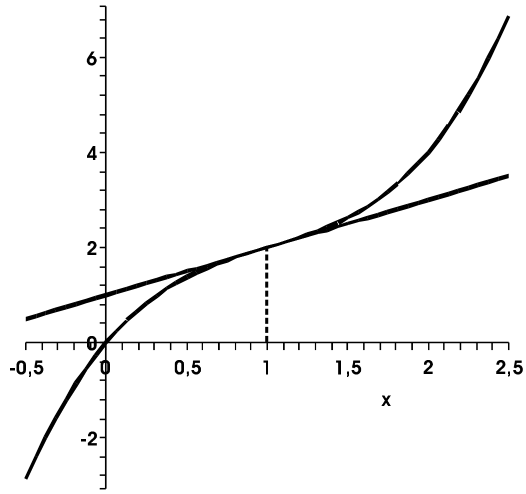
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4.$$

Funktiolla on siis pisteessä 2 derivaatta $f'(2) = 4$.

4.1. **Derivaatta kuvaajassa.**



Tarkastellaan oheista kuvaa, johon on piirretty erään derivoituvan funktion f kuvaaja sekä suora, joka leikkaa kuvaajaa pisteissä $x = 1$ ja $x = 2$. Tämän suoran kulmakerroin on $(f(2) - f(1))/(2 - 1)$ eli erotusosamäärän arvo pisteessä 1, kun $h = 1$. Luku h vastaa siis toisen leikkauspisteen x-koordinaatin etäisyyttä ensimmäisen leikkauspisteen x-koordinaatista. Pienentämällä arvoa h saadaan toinen leikkauspiste lähestymään ensimmäistä, jolloin suora kääntyy kuvaajan suuntaiseksi kunnes se leikkaa kuvaajaa lopulta vain yhdessä pisteessä.



Erotusosamäärän raja-arvo eli derivaatta pisteessä x on siis tuohon pisteeseen kuvaajalle piirretyn *sivuajan eli tangentin* kulmakerroin.

Esimerkki 4.3. Tarkastellaan funktiota $f(x) = |x|$ (itseisarvo) pisteessä $x = 0$. Kun $h > 0$, erotusosamäärä on

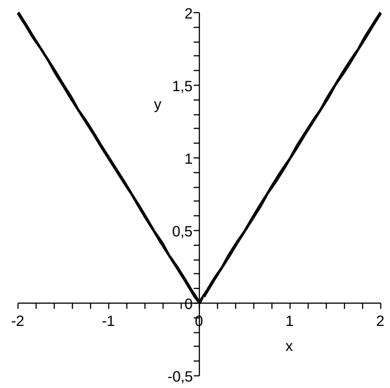
$$\frac{|h| - |0|}{h} = \frac{h - 0}{h} = 1.$$

Toisaalta, kun $h < 0$, erotusosamäärä on

$$\frac{|h| - |0|}{h} = \frac{-h - 0}{h} = -1.$$

Erotusosamäärällä ei siis ole raja-arvoa h:n lähestyessä nollaa, koska nollan vasemmalla ja oikealla puolella lasketut arvot eivät lähesty toisiaan. Itseisarvo ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$.

Tämä näkyy myös itseisarvon kuvaajasta. Kuvaajalla on origossa terävä kärki, eikä siihen voida piirtää yksikäsitteistä sivuajaa kuvaajalle.



Jos funktiolla on epäjatkuvuuskohta jossain pisteessä, ei tähän pisteeseen voida piirtää kuvaajalle sivuajaa. Tämä havainto kertoo seuraavasta tosiasiasta.

Lause 4.4. *Jos funktio on derivoituva pisteessä x, se on myös jatkuva pisteessä x.*

Epäjatkuva funktio ei siis voi olla derivoituva.

4.2. **Laskusääntöjä.** Aloitetaan säännöistä, joilla voi laskea funktioiden summien, tulojen ja osamäärien derivaattoja.

1. $D(f \pm g)(x) = f'(x) \pm g'(x)$
2. $D(cf)(x) = cf'(x)$, jos c on vakio
3. $D(fg)(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $D(f/g)(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Näitä sääntöjä sovellettaessa täytyy ensin varmistaa, että funktiot todella ovat derivoituvia tai että ne on edes määritelty kyseisessä pisteessä. Sääntö 3 esimerkiksi vaatii, että $g(x) \neq 0$.

Ennen seuraavia sääntöjä palautetaan mieleen murto- ja negatiivisten potenssien määritelmät. Olkoon k kokonaisluku. Tällöin

$$x^k = \begin{cases} \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{k}, \text{ jos } k > 0, \\ 1, \text{ jos } k = 0, \\ \frac{1}{x^{-k}}, \text{ jos } k < 0. \end{cases}$$

Olkoon sitten p, q kokonaislukuja, $q > 0$. Tällöin

$$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p.$$

Esimerkiksi $x^{1/2} = \sqrt{x}$. Huomaa, ettei parillinen juuri ole määritelty negatiivisille luvuille ja että parillinen juuri määritellään aina positiiviseksi. (Esimerkiksi $\sqrt{-4}$ ei ole määritelty, ja $\sqrt{4} = 2$, vaikka myös $(-2)^2 = 4$).

Nyt voidaan määritellään potensseja koskevat säännöt.

5. $Dc = 0$, jos c ei riipu x:stä (eli on vakio)
6. $Dx^k = kx^{k-1}$, jos $k \neq 0$.

Esimerkki 4.5. Derivoidaan polynomifunktio:

$$D(x^2 + 2x - 3) = Dx^2 + 2Dx - D\ 3 = 2x^1 + 2 \cdot 1 - 0 = 2x + 2.$$

Derivoidaan rationaalifunktio:

$$\begin{aligned} D\frac{x^2 - 3x}{x + 1} &= \frac{D(x^2 - 3x)(x + 1) - (x^2 - 3x)D(x + 1)}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{(2x - 3)(x + 1) - (x^2 - 3x)(1 + 0)}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{(2x^2 + 2x - 3x - 3) - (x^2 - 3x)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Derivoidaan vielä juurifunktio:

$$\begin{aligned} D\ \frac{3}{\sqrt[3]{x}} &= D\left(3(\sqrt[3]{x})^{-1}\right) = D\left(3(x^{1/3})^{-1}\right) = D\left(3x^{-1/3}\right) \\ &= 3 \cdot (-\frac{1}{3})x^{-1/3-1} = -x^{-4/3} = -\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}. \end{aligned}$$

Viimeistä sääntöä varten määritellään yhdistetyn funktion käsite.

Määritelmä 4.6. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$. Funktioiden f ja g *yhdistetty funktio* $f \circ g$ määritellään seuraavasti:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Funktiota f kutsutaan *ulkofunktioksi* ja funktiota g *sisäfunktioksi.*

Esimerkiksi, jos $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$, yhdistetty funktio $(f \circ g)(x) = (x+1)^2$ ja $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$. Viimeinen sääntö koskee yhdistettyä funktiota.

7. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Esimerkki 4.7. Olkoon $f(x) = x^6$, $g(x) = 2x + 1$. Nyt $f'(x) = 6x^5$ ja $g'(x) = 2$, joten yhdistetyn funktion $f \circ g$ derivaatta on

$$D(2x+1)^6 = 6(2x+1)^5 \cdot 2 = 12(2x+1)^5.$$

4.3. **Derivaatan sovelluksia.** Derivaatan avulla voidaan tutkia funktion kasvua sekä funktion saamia *ääriarvoja*. Määritellään ensin näihin liittyviä käsitteitä.

Määritelmä 4.8. Funktiolla f on pisteessä x_0 *paikallinen eli lokaali maksimi*, jos pätee $f(x_0) \geq f(x)$ kaikilla pisteillä x pisteen x_0 lähiympäristössä. Tämä arvo on *funktion suurin arvo*, jos pätee $f(x_0) \geq f(x)$ kaikilla määrittelyjoukon pisteillä x.

Vastaavasti määritellään paikallinen minimi ja funktion pienin arvo. Minimejä ja maksimeja kutsutaan funktion *ääriarvoiksi.*

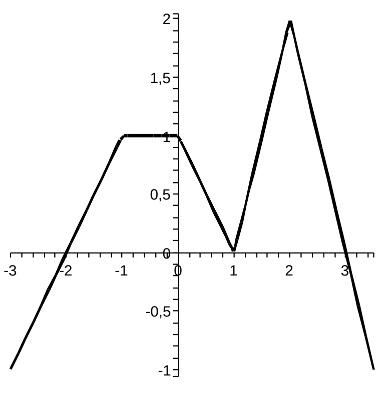
Määritelmä 4.9. Funktio f on *kasvava välillä* $[a, b]$, jos kaikilla pisteillä $x < y$ välillä $[a, b]$ pätee $f(x) \leq f(y)$. Jos lisäksi pätee $f(x) < f(y)$, sanotaan, että funktio on *aidosti kasvava* kyseisellä välillä.

Vastaavasti määritellään vähenevä ja aidosti vähenevä funktio.

Esimerkki 4.10. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ kun } x < -1 \\ 1, \text{ kun } -1 \leq x < 0 \\ -x + 1, \text{ kun } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 2, \text{ kun } 1 \leq x < 2 \\ -2x + 6, \text{ kun } x \geq 2. \end{cases}$$

Tällä funktiolla on paikallinen maksimi pisteessä $x = 2$ sekä jokaisessa pisteessä välillä $[-1, 0]$. Paikallinen minimi löytyy pisteestä $x = 1$ sekä myös kaikista pisteistä välillä $]-1, 0[$. Suurin arvo on $f(2) = 2$, mutta pienintä arvoa ei ole. Funktio on aidosti kasvava väleillä $]-\infty, -1]$ ja $[1, 2]$, ja aidosti vähenevä väleillä $[0, 1]$ ja $[2, \infty[$. Välillä $[-1, 0]$ funktio on sekä kasvava että vähenevä.



Jos derivoituvan funktion kuvaajalle piirretään sivuaja maksimi- tai minimikohtaan, sivuaja on vaakasuora eli sen kulmakerroin on nolla. Suoraan derivaatan määritelmästä voidaankin johtaa seuraava tätä havaintoa vastaava lause.

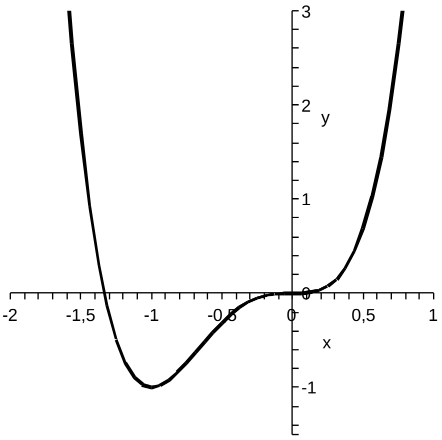
Lause 4.11. *Jos derivoituvalla funktiolla on paikallinen ääriarvo pisteessä x_0, niin $f'(x_0) = 0$.*

Huom. Kaikki derivaatan nollakohdat eivät aina ole ääriarvoja.

Esimerkki 4.12. Tarkastellaan 4. asteen polynomia $f(x) = 3x^4 + 4x^3$. Tämän derivaatta on

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 + 4 \cdot 3x^4 = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1).$$

Derivaatan nollakohdat ovat $x = -1$ ja $x = 0$. Tarkempi tutkimus osoittaa, että edellinen on itse asiassa funktion pienin arvo, mutta jälkimmäinen ei ole ääriarvo ollenkaan.



Seuraavat lauseet seuraavat niin kutsutusta *väliarvolauseesta.*

Lause 4.13. *Jos $f'(x) \geq 0$ välillä $[a,b]$, niin funktio f on kasvava kyseisellä välilllä. Jos lisäksi $f'(x) = 0$ vain välin yksittäisissä pisteissä, niin f on aidosti kasvava tuolla välillä.*

Vastaava pätee myös negatiiviselle derivaatalle.

Lause 4.14. *Jos $f'(x) \leq 0$ välillä $[a,b]$, niin funktio f on vähenevä kyseisellä välilllä. Jos lisäksi $f'(x) = 0$ vain välin yksittäisissä pisteissä, niin f on aidosti vähenevä tuolla välillä.*

Esimerkki 4.15. Tarkastellaan edelleen edellisen esimerkin polynomifunktiota. Derivaatta oli $f'(x) = 12x^2(x+1)$. Tunnetusti $12x^2$ ei ole koskaan negatiivinen, ja $x+1$ on negatiivinen vain, jos $x < -1$. Näiden termien tulo on negatiivinen vain jos ainoastaan toinen termeistä on negatiivinen. Kerätään nämä tiedot *merkkikaavioon.*

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x$
$12x^2$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$

Edellisten lauseiden perusteella f on vähenevä välillä $]-\infty, -1]$ ja kasvava välillä $]-1, \infty[$. Väheneminen ja kasvaminen on aitoa, sillä derivaatta on nolla vain yksittäisissä pisteissä. Nyt voidaan myös päätellä, mitkä edellisessä esimerkissä lasketuista derivaatan nollakohdista ovat ääriarvokohtia. Pisteen $x = 0$ ympärillä f on aidosti kasvava, joten se ei voi olla ääriarvokohta. Toisaalta pisteen $x = -1$ vasemmalla puolella f on vähenevä ja oikealla puolella kasvava, joten kyseessä on lokaali minimikohta.

Näillä tiedoilla voidaan jo hyvin tarkasti määrittää derivoituvan funktion kulku. Eräs lisätieto auttaa ääriarvojen löytämisessä.

Lause 4.16. *Suljetulla välillä määritelty jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa tuolla välillä. Jos funktio on lisäksi derivoituva, suurin ja pienin arvo löytyvät joko välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista.*

Esimerkki 4.17. Tarkastellaan nyt funktiota $f(x) = 3x^4 + 4x^3$ suljetulla välillä $[-2, 1]$. Lasketaan funktion arvot derivaatan nollakohdissa sekä välin päätepisteissä.

$$f(-1) = -1, \quad f(0) = 0, \quad f(-2) = 16, \quad f(1) = 7.$$

Edellisen lauseen perusteella funktion suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 1]$ löytyvät näiden arvojen joukosta. Suurin arvo on selvästi $f(-2) = 16$ ja pienin $f(-1) = -1$.

Monet arkielämän optimointiongelmat voidaan edellä opittujen seikkojen avulla käsitellä derivaatan avulla.

Esimerkki 4.18. Maanviljelijällä on 20 metriä verkkoaitaa. Hän haluaa rakentaa kanoille suorakulmaisen aitauksen. Aitatarpeita säästääkseen hän päättää rakentaa aitauksen ladon viereen niin, että ladon seinä korvaa toisen aitauksen pitkistä sivuista. Miten pitkät on aitauksen sivujen oltava, jotta aitauksen pinta-ala olisi mahdollisimman iso?

Ratkaisun löytämiseksi muodostetaan funktio, joka kuvaa maksimoitavaa suuretta jonkin muuttujan funktiona. Maksimoitava suure on aitauksen pinta-ala, joka lasketaan pitkän ja lyhyen sivun tulona. Merkitään lyhyen sivun pituutta x. Pitkälle sivuille jää tällöin $20 - 2x$ metriä verkkoaitaa. Näin saadaan aitauksen pinta-ala lyhyen sivun pituuden funktiona:

$$A(x) = x \cdot (20 - 2x) = -2x^2 + 20x.$$

Lyhyt sivu on vähintään 0 ja enintään 10 metriä pitkä. Funktio A on siis määritelty suljetulla välillä $[0, 10]$. Se on derivoituva, joten suurin arvo löytyy määrittelyvälin päätepisteestä tai derivaatan nollakohdasta. Derivaatta on

$$A'(x) = -4x + 20.$$

Derivaatta on nolla vain jos $x = 5$. Suurin arvo löytyy siis seuraavien arvojen joukosta:

$$A(5) = -2 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5 = 50, \quad A(0) = 0, \quad A(10) = 0.$$

Suurin pinta-ala saadaan siis, kun lyhyen sivun pituus on 5 metriä, jolloin pitkän sivun pituudeksi tulee 10 metriä.

Esimerkki 4.19. Suorakulmio sijaitsee koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä siten, että sen yksi kulma on origossa ja vastakkainen kulma suoralla $y = -2x + 3$ (ks. kuva). Laske tällaisen suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala.

Merkitään suorakulmion alareunan pituutta x. Tällöin suorakulmion korkeus on $-2x+3$, joten ala on

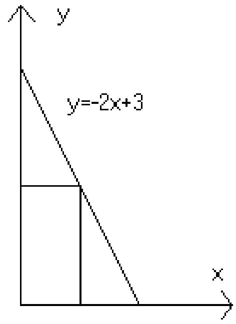
$$A(x) = x(-2x + 3) = -2x^2 + 3x.$$

Tehtävänannon mukaan täytyy olla $0 \leq x \leq 3/2$. Määrittelyvälin päätepisteissä ala on 0, joten suurin arvo löytyy derivaatan nollakohdasta. Derivaatta on

$$A'(x) = -4x + 3,$$

ja tämän ainoa nollakohta on $x = 3/4$. Alan suurin arvo on siis

$$A(3/4) = -2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}.$$



4.4. **Korkeammat derivaatat.** Funktion f derivaatta f' on myös eräs funktio, joten erityisesti se voi olla derivoituva. Tämä pätee myös derivaatan derivaatalle ja niin edelleen. Jos f voidaan derivoida n kertaa, tulosta kutsutaan *n:nneksi derivaataksi* ja merkitään jollain seuraavista tavoista:

$$f^{(n)}, \quad D^{(n)}f, \quad \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Jos n on pieni, kuten 2 tai 3, voidaan myös merkitä f'' tai f'''.

Toinen derivaatta kertoo funktion derivaatan kasvusta. Jos esimerkiksi s kuvaa kuljettua matkaa, kuvaa s' nopeutta ja s'' vastaavasti kiihtyvyyttä.

Seuraava toisen derivaatan ominaisuus voi olla hyödyksi.

Lause 4.20. *Oletetaan, että f on kahdesti derivoituva ja f':lla on nollakohta pisteessä x_0. Tällöin pätee:*

a) *jos $f''(x_0) < 0$, niin x_0 on f:n paikallinen maksimikohta,*
b) *jos $f''(x_0) > 0$, niin x_0 on f:n paikallinen minimikohta.*

Sen sijaan, jos $f''(x_0) = 0$, niin kohdassa x_0 voi olla paikallinen ääriarvo tai olla olematta.

Esimerkki 4.21. Olkoon jälleen $f(x) = 3x^4 + 4x^3$. Ensimmäinen derivaatta on

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2,$$

ja toinen derivaatta

$$f''(x) = 12 \cdot 3x^2 + 12 \cdot 2x = 36x^2 + 24x.$$

Derivaatan nollakohdat olivat $x = -1$ ja $x = 0$. Toisen derivaatan arvot näissä pisteissä ovat

$$f''(-1) = 36 \cdot 1 + 24(-1) = 12, \quad f(0) = 0.$$

Kohdassa $x = -1$ on siis lokaali minimi, mutta kohdasta $x = 0$ ei osata tällä perusteella sanoa mitään.

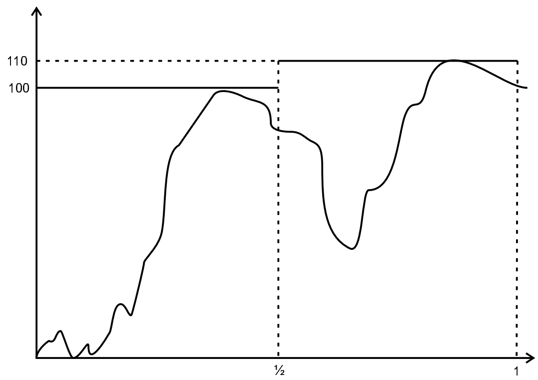
5. Jatkuvan funktion integraali

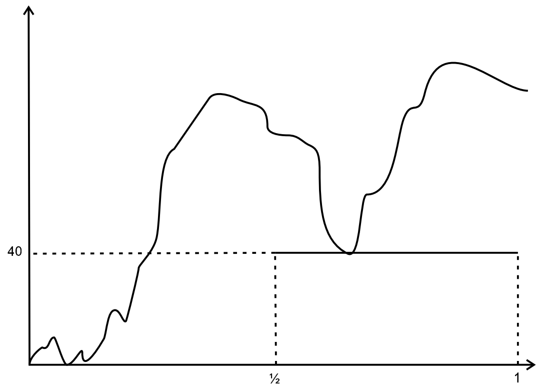
Tarkastellaan yhä linja-autoa matkalla Kotkasta Helsinkiin. Olkoon tällä kertaa $v : [0, 2] \to \mathbb{R}$ linja-auton nopeus ajan funktiona. Yritetään arvioida nopeuden funktion perusteella kuljettua matkaa aikavälillä $[0, 1]$.

Oletetaan, että maksiminopeus välillä $[0, 1]$ on ollut 110 km/h, ja miniminopeus 0 km/h (bussi seisoi asemalla). Koska tasaisella nopeudella kuljettu matka on nopeus kerrottuna matkaan käytetyllä ajalla, voimme erittäin karkeasti arvioida linja-auton kulkeman matkan olleen enintään $110 \cdot 1 = 110$ km, ja vähintään $0 \cdot 1 = 0$ km.

Jaetaan sitten aikaväli kahteen osaan. Olkoon maksiminopeus välillä $[0, 1/2]$ ollut 100 km/h ja välillä $[1/2, 1]$ 110 km/h. Miniminopeudet olivat vastaavasti 0 km/h ja 40 km/h.

Nyt voimme arvioida, että ensimmäisellä osalla edettiin enintään $100 \cdot 1/2 = 50$ km ja vähintään $0 \cdot 1/2 = 0$ km, sekä toisella osalla enintään $110 \cdot 1/2 = 55$ km ja vähintään $40 \cdot 1/2 = 20$ km. Todetaan, että ensimmäisen tunnin aikana edettiin yhteensä enintään $50 + 55 = 105$ km ja vähintään $0 + 20 = 20$ km, mikä alkaa varmasti olla jo lähempänä totuutta kuin ensimmäinen arvio.





Tällä tavoin voimme jatkaa aikavälin pilkkomista ja matkan arvioimista maksimi- ja miniminopeuksien avulla. Mitä lyhyemmät välit, sitä tarkemmaksi arvio tulee. Tarkimman arvion saamiseksi voitaisiin tarkastella raja-arvoa välin pituuden lähestyessä nollaa.

Tämä tarkastelu voidaan yleistää koskemaan mitä tahansa jatkuvia funktioita. Ylä- ja ala-arvioita kutsutaan funktion *ylä- ja alasummiksi* ja näiden raja-arvoa funktion *integraaliksi*. Integraali kuvaa funktion *kertymää* tietyllä välillä. Jos funktio kuvaa jonkin suureen muutosnopeutta, integraali kertoo suureen arvon kokonaismuutoksen.

Määritelmä 5.1. Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio. Jaetaan väli tasaisesti korkeintaan h:n pituisiin suljettuihin osaväleihin. Valitaan jokaisella osavälillä funktion suurin arvo, kerrotaan se välin pituudella ja lasketaan näin saadut arvot yhteen. Kutsutaan saatua summaa funktion *yläsummaksi välillä* $[a, b]$ ja merkitään tätä S_h. (Funktion suurin arvo löytyy lauseen 4.16 nojalla.)

Valitaan samoin jokaisella osavälillä pienin arvo, kerrotaan se välin pituudella ja lasketaan tulokset yhteen. Kutsutaan tätä summaa funktion *alasummaksi välillä* $[a, b]$ ja merkitään s_h.

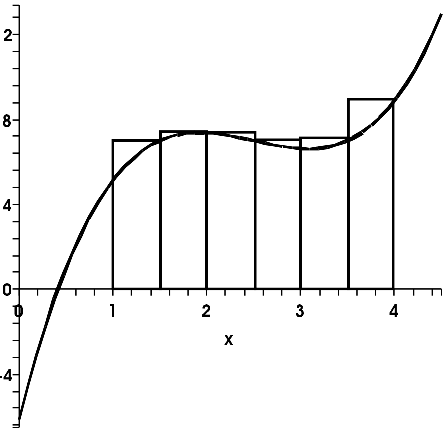
Funktion f *integraali välillä* $[a, b]$ on yläsumman ja alasumman raja-arvo osavälin pituuden h lähestyessä nollaa:

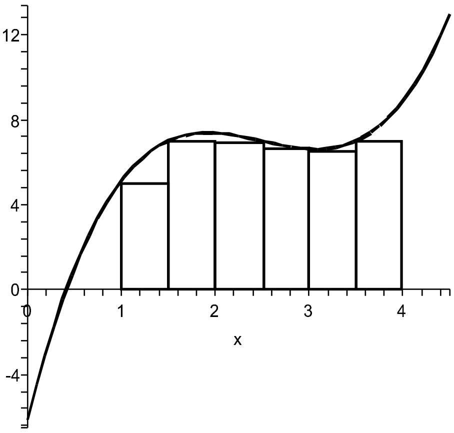
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h \to 0} S_h = \lim_{h \to 0} s_h.$$

Tämä raja-arvo on aina olemassa, kun f on jatkuva välillä $[a, b]$.

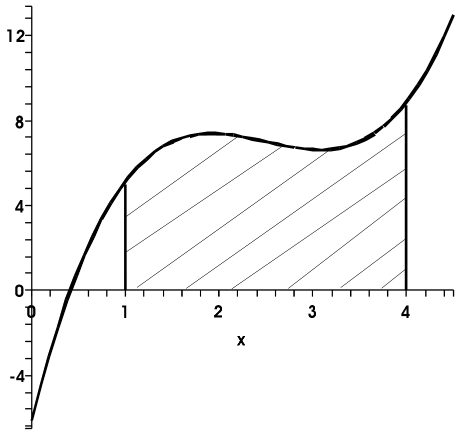
Kaikki jatkuvat funktiot ovat *integroituvia* millä tahansa suljetulla välillä, eikä määritelmässä tarvitsisi tarkastella erikseen sekä ylä- että alasummia. Integraali voidaan kuitenkin määritellä muillekin kuin jatkuville funktioille. Jos funktio ei ole jatkuva, voi käydä niin, etteivät ylä- ja alasummat lähesty toisiaan h:n pienetessä. Tällöin funktio ei ole integroituva.

5.1. **Integraali kuvaajassa.** Ajatellaan integroimisväli jaetuksi tasaisesti osaväleihin. Funktion yläsumma on sellaisten suorakulmioiden pinta-alojen summa, joiden korkeus on jokaisella osavälillä funktion suurin arvo. Alasumma taas koostuu sellaisten suorakulmioiden pinta-aloista, joiden korkeus on joka osavälillä funktion pienin arvo.





Kun osavälin pituutta lyhennetään, lähestyvät funktion suurin ja pienin arvo tuolla välillä toisiaan (koska funktio on jatkuva). Siispä myös ylä- ja alasuorakulmioiden huiput kullakin välillä lähestyvät toisiaan ja funktion kuvaajaa, joka on niiden välissä. Lopulta suorakulmioiden huiput kohtaavat ja puristavat funktion arvon väliinsä. Tällöin niiden yhteenlaskettu pinta-ala, funktion integraali, vastaa *kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa.*



On kuitenkin huomioitava, että mikäli funktio on jollain välillä negatiivinen, on myös integraali negatiivinen.

5.2. **Integraalin laskeminen.** Integraalin laskeminen suoraan määritelmästä on yleensä erittäin vaikeaa. Siksi integroitaessa yleensä käytetäänkin niin kutsuttua *integraalifunktiota.*

Määritelmä 5.2. Funktio F on funktion f *integraalifunktio*, jos $F' = f$.

Funktion integraalifunktion derivaatta on siis funktio itse. Integraalifunktio ei ole yksikäsitteinen. Jos esimerkiksi $f(x) = 2$, niin integraalifunktioksi kelpaa yhtä hyvin $F(x) = 2x$ kuin $G(x) = 2x + 1$. Funktion eri integraalifunktiot ovat kuitenkin hyvin samankaltaisia.

Lause 5.3. *(Integraalilaskennan peruslause) Olkoon $F' = G' = f$, eli sekä F että G ovat funktion f integraalifunktioita. Tällöin $F = G + C$ jollain luvulla C.*

Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat siis vakion lisäystä vaille samoja. Usein merkitäänkin

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

missä F on jokin funktion f integraalifunktio. Tämä integraalimerkintä ilman integroimisväliä tarkoittaa juuri integraalifunktiota. Vakio C on niin sanottu *integroimisvakio*, joka kuvaa sitä, ettei integraalifunktio ole yksikäsitteinen.

Esimerkki 5.4. Funktion $f(x) = x$ eräs integraalifunktio on $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. Voidaan siis merkitä

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Koska derivaatta kuvaa funktion muutosnopeutta, ja integraali taas muutoksen aiheuttamaa kertymää, ovat integraali ja derivaatta eräässä mielessä toistensa vastakohtia. Kuljetun matkan derivaatta on kulkunopeus, kun taas kulkunopeuden integraalina saadaan kuljettu matka. Tähän perustuu seuraava lause.

Lause 5.5. *(Analyysin peruslause) Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio, ja F jokin sen integraalifunktio (eli $F' = f$.) Tällöin*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

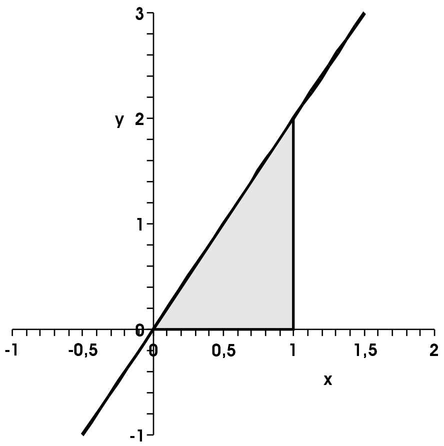
Usein merkitään

$$F(b) - F(a) = \mathop{\Big/}_{a}^{b} F(x).$$

Esimerkki 5.6. Olkoon $f(x) = 2x$. Eräs integraalifunktio on $F(x) = x^2$. Tällöin

$$\int_0^1 2x\,dx = \mathop{\Big/}_{0}^{1} x^2 = 1^2 - 0^2 = 1.$$

Tämä nähdään myös kuvaajasta. Integraali on varjostetun kolmion pinta-ala.



5.3. **Laskusääntöjä.**

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

Esimerkki 5.7. Olkoon $f(x)=2x-1/x^2$. Funktion $f_1(x)=2x$ eräs integraalifunktio on $F_1(x)=x^2$ ja funktion $f_2(x)=-1/x^2$ eräs integraalifunktio on $F_2(x)=1/x$. Nyt voidaan integroida

$$\begin{aligned}\int_1^2 2x-\frac{1}{x^2}\,dx &= \int_1^2 2x\,dx + \int_1^2 -\frac{1}{x^2}\,dx\\ &= \Big/_{1}^{2} x^2 + \Big/_{1}^{2}\frac{1}{x} = 2^2-1^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{1}=\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Esimerkki 5.8. Olkoon $f(x)=|x|$. Lasketaan integraali osissa. Välillä $[-1,0]$ $f(x)=-x$, joten integraalifunktioksi voidaan valita $F_1(x)=-\frac{1}{2}x^2$. Toisaalta välillä $[0,1]$ $f(x)=x$, joten integraalifunktioksi käy $F_2(x)=\frac{1}{2}x^2$. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |x|\,dx &= \int_{-1}^0 -x\,dx + \int_0^1 x\,dx = \Big/_{-1}^{0} -\frac{1}{2}x^2 + \Big/_{0}^{1}\frac{1}{2}x^2\\ &= \left(-\frac{1}{2}\cdot 0^2-\left(-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2\right)\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2-\frac{1}{2}\cdot 0^2\right) = 0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-0=1.\end{aligned}$$

Potenssin derivoimissäännöstä saadaan suoraan vastaava integroimissääntö. Olkoon $k\neq -1$. Tällöin

4. $\displaystyle\int_a^b x^k\,dx = \Big/_{a}^{b}\frac{1}{k+1}x^{k+1}.$

Integroiminen on yleensä vaikeampaa kuin derivoiminen, koska tulon, osamäärän tai yhdistetyn funktion integroimiseen ei ole olemassa laskusääntöjä. Vastaavista derivoimissäännöistä on kuitenkin usein hyötyä.

Yhdistetyn funktion derivoimissäännön mukaan $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$, joten funktio $f\circ g$ on funktion $(f'\circ g)g'$ integraalifunktio. Siispä

5. $\displaystyle\int_a^b f'(g(x))g'(x)\,dx = \Big/_{a}^{b}(f\circ g)(x).$

Esimerkki 5.9. Tarkastellaan lauseketta $x(x^2+1)^3$. Lausekkeessa esiintyy yhdistetty funktio, jonka sisäfunktio $g(x)=x^2+1$. Sisäfunktion derivaatta on $g'(x)=2x$. Voimme saada lausekkeen säännön vaatimaan muotoon, kun tulkitsemme ulkofunktion erään funktion f derivaataksi: $f'(x)=x^3$, jolloin $f(x)=\frac{1}{4}x^4$. Tällöin nimittäin

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 2x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 g'(x)f'(g(x))\,dx\\ &= \frac{1}{2}\Big/_{0}^{1} f(g(x)) = \frac{1}{2}\Big/_{0}^{1}\frac{1}{4}(x^2+1)^4\\ &= \frac{1}{8}\left[(1^2+1)^4-(0^2+1)^4\right] = \frac{1}{8}(16-1)=\frac{15}{8}.\end{aligned}$$

5.4. **Sovelluksia.** Integraalilla voidaan laskea jonkin suureen kertymää.

Esimerkki 5.10. Metsän kasvit käyttävät auringonpaisteesta saamaansa energiaa. Energian mittausta varten metsään on asetettu mittalaitteita, jotka mittaavat auringonpaisteen tehoa eli energiavuota. Mitä kirkkaampi paiste, sitä suurempi mittalaitteen lukema. Erään tällaisen mittalaitteen lukema noudatti aikavälillä $[12, 13]$ melko tarkasti funktiota $P(t) = -3{,}6t^2 + 94t - 500$ (kJ/h). Tällä aikavälillä laitteen vastaanottama energia on energiavuon kertymä, joten se saadaan integroimalla

$$\begin{aligned} E &= \int_{12}^{13} -3{,}6t^2 + 94t - 500\,dt = \mathop{\Big/}_{12}^{13} \big(-1{,}2t^3 + 47t^2 - 500t\big) \\ &= \big(-1{,}2 \cdot 13^3 + 47 \cdot 13^2 - 500 \cdot 13\big) - \big(-1{,}2 \cdot 12^3 + 47 \cdot 12^2 - 500 \cdot 12\big) \approx 110 \text{ (kJ)}. \end{aligned}$$

Integraalia voidaan myös käyttää geometrisenä työkaluna, koska se kertoo kuvaajan ja x-akselin välisen pinta-alan.

Esimerkki 5.11. Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3$. Mikä on tämän funktion kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[-1, 1]$?

Ensinnäkin on muistettava, että jos funktio on negatiivinen jollain välillä, myös sen integraali on negatiivinen kyseisellä välillä. Funktio f on negatiivinen välillä $[-1, 0[$. Pinta-alan laskemiseksi on siis jaettava väli kahteen osaan: $[0, 1]$ ja $[-1, 0]$. Näiden alat voidaan nyt laskea integroimalla:

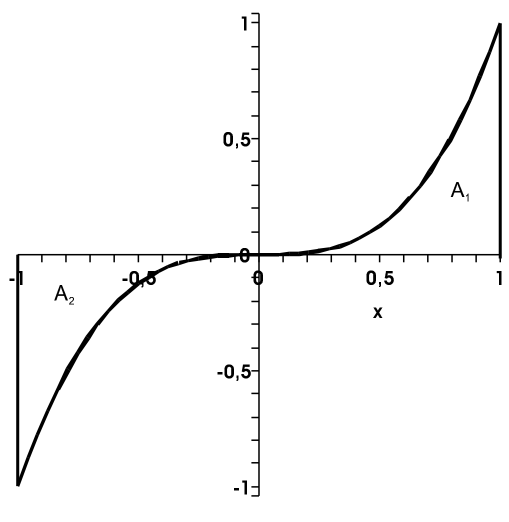
$$A_1 = \int_0^1 x^3\,dx = \mathop{\Big/}_{0}^{1} \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4},$$

ja

$$A_2 = -\int_{-1}^0 x^3\,dx = -\mathop{\Big/}_{-1}^{0} \frac{1}{4}x^4 = -\left(0 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Nämä alat yhdistämällä saadaan lopulta kysytyksi pinta-alaksi

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$



5.5. **Epäjatkuvan funktion integraalista.** Integraali voidaan helposti yleistää koskemaan myös epäjatkuvia funktioita. Määritelmässä käytettyä arviointia täytyy kuitenkin hieman muuttaa, sillä epäjatkuva funktio ei välttämättä saavuta pienintä tai suurinta arvoa suljetulla välillä. Lisäksi voi käydä niin, etteivät yläsumma ja alasumma lähestykään samaa lukua osaväliä lyhennettäessä. Tällöin funktio ei ole integroituva.

Useimmilla epäjatkuvilla funktioilla ei ole integraalifunktiota, joten integraalit on laskettava muulla tapaa. Toisaalta voi myös käydä niin, että integraalifunktio on olemassa, mutta funktio ei esimerkiksi ole rajoitettu, jolloin se ei ole integroituva. Epäjatkuvien funktioiden kanssa täytyy siis olla joka suhteessa tarkkana, mutta usein integrointi kuitenkin onnistuu.

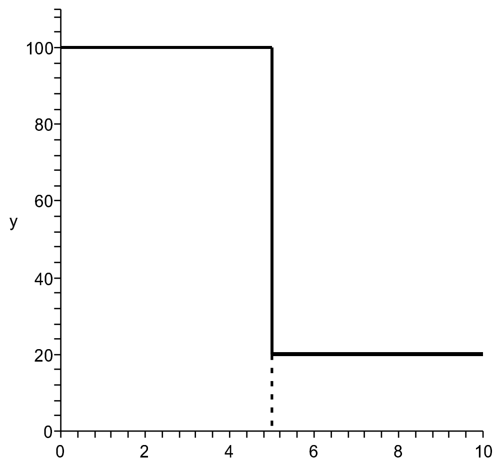
Esimerkki 5.12. Ennen kuin auringonpaistetta mittaavat laitteet vietiin metsään, niitä testattiin laboratoriossa. Laite asetettiin kirkkaan lampun alle kymmeneksi sekunniksi, ja viiden sekunnin kohdalla valo katkaistiin. Mittalaite kuitenkin rekisteröi vielä huoneen ikkunoista tulevan valon.

Olkoon mittalaitteen $P : [0, 10] \to \mathbb{R}$ mittalaitteen lukema ajan funktiona. Tällöin

$$P(t) = \begin{cases} 100, \text{ kun } 0 \leq t \leq 5 \\ 20, \text{ kun } 5 < t \leq 10 \end{cases} \quad \text{(J/s)}.$$

Funktio P on epäjatkuva eikä se ole minkään funktion derivaatta. Sillä ei siis ole integraalifunktiota. Se on kuitenkin integroituva, joten voimme integroida sen osissa. Kummallakin osalla funktiolla on integraalifunktio, joten

$$\begin{aligned} \int_0^{10} P(t)\,dt &= \int_0^5 P(t)\,dt + \int_5^{10} P(t)\,dt = \int_0^5 100\,dt + \int_5^{10} 20\,dt \\ &= \Big/_0^5 100t + \Big/_5^{10} 20t = (500 - 0) + (200 - 100) = 600 \text{ (kJ)}. \end{aligned}$$



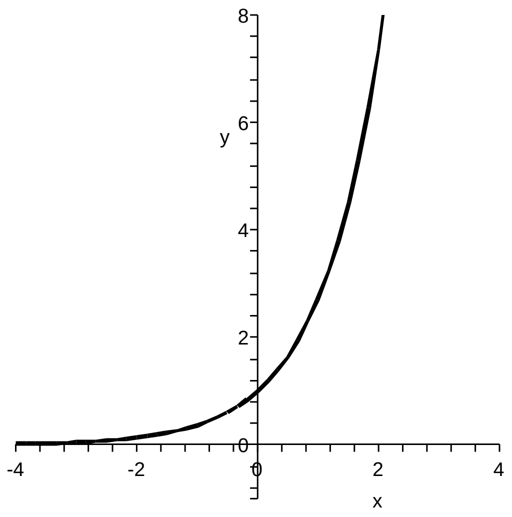
6. Eksponentti- ja logaritmifunktiot

6.1. **Eksponenttifunktio.** Eksponenttifunktio on funktio, jonka kasvunopeus jokaisessa pisteessä on sama kuin funktion arvo.

Määritelmä 6.1. Voidaan osoittaa, että on olemassa yksikäsitteinen derivoituva funktio $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \text{ja} \quad \exp(0) = 1.$$

Tätä funktiota kutsutaan *eksponenttifunktioksi*.



Eksponenttifunktion arvot voidaan ilmoittaa erään reaaliluvun potensseina. Tämä niin kutsuttu Neperin luku on

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}71828.$$

Luvulle e pätee siis $\exp(x) = e^x$. (Kun potenssin määritelmää laajennetaan koskemaan muitakin kuin murtolukuja.) Jatkossa käytetään eksponenttifunktiosta yleensä tätä merkintää. Sen avulla voidaan johtaa potenssien laskusäännöistä eksponenttifunktion laskusääntöjä:

1. $e^x e^y = e^{x+y}$
2. $(e^x)^y = e^{xy}$
3. $e^{-x} = 1/e^x$

Eksponenttifunktio on aina aidosti positiivinen. Koska sen derivaatta on sama kuin funktio itse, myös derivaatta on aina positiivinen. Siksi eksponenttifunktio on aidosti kasvava. Samalla tavoin myös derivaatta on aidosti kasvava, ja derivaatan derivaatta, jne. Tämän vuoksi eksponenttifunktio kasvaa hyvin nopeasti, nopeammin kuin mikään polynomifunktio. Tämä tarkoittaa sitä, että kaikilla polynomeilla P pätee

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{e^x} = 0.$$

Erityisesti

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0.$$

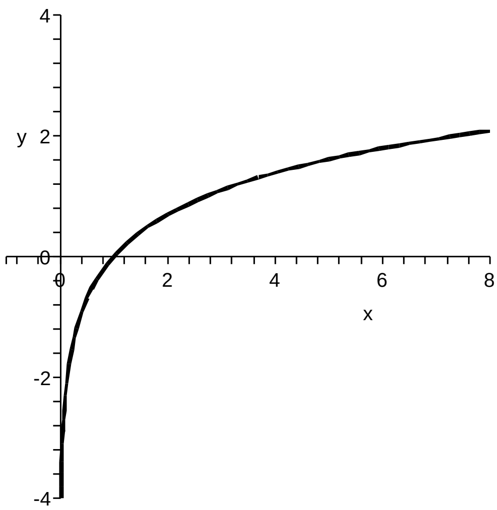
6.2. **Logaritmifunktio.** Logaritmifunktio on eksponenttifunktion *käänteisfunktio.*

Määritelmä 6.2. Voidaan osoittaa, että on olemassa yksikäsitteinen funktio $\ln :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$e^{\ln x} = \ln e^x = x.$$

Tätä funktiota kutsutaan *logaritmifunktioksi.*

Logaritmi luvusta x kertoo siis, mihin potenssiin e täytyy korottaa, jotta saataisiin x.



Eksponenttifunktion laskusäännöistä voidaan johtaa logaritmin laskusääntöjä.

1. $\ln xy = \ln x + \ln y$
2. $\ln x^y = y \ln x$
3. $-\ln x = \ln(1/x)$

Koska eksponenttifunktio on aina positiivinen, logaritmi on määritelty vain positiivisilla luvuilla. Se on aidosti kasvava ja derivoituva koko määrittelyjoukossaan. Logaritmifunktion derivaatta on

$$D \ln x = \frac{1}{x}.$$

Vastaavasti funktio $f(x) = \ln(-x)$ on määritelty vain negatiivisilla luvuilla. Myös

$$D \ln(-x) = \frac{1}{x}.$$

Esimerkki 6.3. Integroidaan funktiota $f(x) = 1/x$ välillä $[1, e]$. Kun $x > 0$, funktiolla f on integraalifunktio $\ln x$.

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \Big/_{1}^{e} \ln x = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Integroidaan sitten samaa funktiota välillä $[-2, -1]$. Koska nyt $x < 0$, integraalifunktio on $\ln(-x)$.

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \Big/_{-2}^{-1} \ln(-x) = \ln 1 - \ln 2 = 0 - \ln 2 = -\ln 2 = \ln \frac{1}{2}.$$

Esimerkki 6.4. Johdetaan funktion $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$ derivaatta. Logaritmin määritelmän sekä laskusääntöjen avulla voidaan kirjoittaa

$$f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}.$$

Nyt voidaan laskea funktion f derivaatta yhdistetyn funktion derivointisäännöllä. Ulkofunktio on eksponenttifunktio, jonka derivaatta on funktio itse. Sisäfunktion derivaatta on

$$D(x \ln x) = D\ x \cdot \ln x + x \cdot D \ln x = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Funktion f derivaatta on siten

$$f'(x) = D\ e^{x \ln x} = e^{x \ln x} \cdot D(x \ln x) = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

6.3. **Yleiset eksponentti- ja logaritmifunktiot.** Olkoon $a > 0$. Tällöin voidaan määritellä funktio $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$exp_a(x) = a^x.$$

Tätä kutsutaan *a-kantaiseksi eksponenttifunktioksi*, ja sen yhteys eksponenttifunktioon on seuraavanlainen:

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a} = (e^x)^{\ln a}.$$

Yleisen a-kantaisen eksponenttifunktion arvot ovat saadaan siis korottamalla eksponenttifunktion arvo potenssiin $\ln a$.

Esimerkki 6.5. Johdetaan a-kantaisen eksponenttifunktion derivointikaava käyttämällä yhdistetyn funktion derivointisääntöä sekä eksponenttifunktion laskusääntöjä. Merkitään $f(x) = x^{\ln a}$ ja $g(x) = e^x$, jolloin $f'(x) = \ln a \cdot x^{\ln a - 1}$ ja $g'(x) = e^x$. Nyt pätee

$$a^x = (e^x)^{\ln x} = (f \circ g)(x),$$

joten

$$D\ a^x = f'(g(x))g'(x) = \ln a (e^x)^{\ln a - 1} \cdot e^x = \ln a (e^x)^{\ln a - 1 + 1} = \ln a (e^x)^{\ln a} = a^x \ln a.$$

Kaikille eksponenttifunktioille pätevät samat laskusäännöt kuin mitä lueteltiin tavalliselle eksponenttifunktiolle. Yleinen eksponenttifunktio on aidosti kasvava, jos $a > 1$. Jos $a < 1$, eksponenttifunktio on aidosti vähenevä.

Yleisen a-kantaisen eksponenttifunktion käänteisfunktio on vastaavasti *a-kantainen logaritmifunktio* $\log_a :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$a^{\log_a x} = \log_a a^x = x.$$

Joillekin kantaluvuille käytetään tässä yhteydessä omia merkintöjä. Esimerkiksi

$$\log_{10} x = \lg x, \quad \log_e x = \ln x, \quad \log_2 x = \mathrm{lb}\, x.$$

Usein e-kantaista logaritmifunktiota ln nimitetään *luonnolliseksi logaritmiksi*. Monissa laskimissa luonnollista logaritmia merkitään yksinkertaisesti log.

Esimerkki 6.6. Logaritmi luvusta x kertoo, mihin potenssiin kantaluku täytyy korottaa, jotta saataisiin x. Siispä

$$\log_2 16 = 4, \quad \log_3 9 = 2, \quad \log_5 125 = 3.$$

Lisäksi kaikilla kantaluvuilla a pätee

$$\log_a 1 = 0, \quad \text{ja} \quad \log_a a = 1.$$

Esimerkki 6.7. Kymmenkantainen logaritmi kertoo suunnilleen, kuinka monta numeroa luvussa on:

$$\lg 10 = 1, \quad \lg 120 \approx 2 \quad \lg 10000 = 4, \quad \lg 987654321 \approx 9.$$

Yleiselle logaritmille pätevät samat laskusäännöt kuin luonnolliselle logaritmille. Yleisen logaritmifunktion yhteys luonnolliseen logaritmiin voidaan päätellä seuraavasta:

$$\ln x = \ln a^{\log_a x} = \log_a x \cdot \ln a.$$

Tästä seuraa, että

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Luonnollisesta logaritmista saadaan siis mikä tahansa a-kantainen logaritmi jakamalla luvulla $\ln a$.

Esimerkki 6.8. Lasketaan, mihin potenssiin 4 täytyy korottaa, jotta saataisiin 5. Ratkaisu on tietenkin 4-kantainen logaritmi luvusta 5, eli

$$\log_4 5 = \frac{\ln 5}{\ln 4} \approx \frac{1{,}609}{1{,}386} \approx 1{,}16.$$

Derivoidaan vielä kyseinen 4-kantainen logaritmi:

$$D \log_4 x = D\left(\frac{\ln x}{\ln 4}\right) = \frac{1}{\ln 4} D \ln x = \frac{1}{\ln 4 \cdot x}.$$

6.4. **Osittaisintegrointi.** Tulon derivointisäännön mukaan $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, joten funktio fg on funktion $f'g + fg'$ integraalifunktio. Siispä

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx = \mathop{\Big/}_a^b f(x)g(x),$$

josta edelleen saadaan

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \mathop{\Big/}_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Tätä integroimismenetelmää kutsutaan *osittaisintegroinniksi*. Osittaisintegrointi soveltuu erityisen hyvin sellaisten funktioiden integrointiin, joissa kertoimena on eksponenttifunktio.

Esimerkki 6.9. Olkoon $h(x) = e^x x$. Merkitään $f(x) = e^x$ ja $g(x) = x$. Tällöin $f'(x) = e^x$ ja $g'(x) = 1$, joten osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^1 \underbrace{e^x}_{f'}\underbrace{x}_{g}\,dx &= \mathop{\Big/}_0^1 \underbrace{e^x}_{f}\underbrace{x}_{g} - \int_0^1 \underbrace{e^x}_{f}\cdot\underbrace{1}_{g'}\,dx \\ &= (e^1 - 0) - \mathop{\Big/}_0^1 e^x = e - (e^1 - e^0) = 1.\end{aligned}$$

Osittaisintegrointi auttaa, koska eksponenttifunktion derivaatta on sama kuin funktio itse, jolloin kaavan oikealle puolelle tulee helpompi funktio integroitavaksi.

Esimerkki 6.10. Osittaisintegroimalla voidaan periaatteessa integroida mikä tahansa polynomin ja eksponenttifunktion tulo. Olkoon $h(x) = e^x(x^2 - 1)$. Osittaisintegroimalla kahdesti saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x(x^2-1)\,dx &= \mathop{\Big/}_0^1 e^x(x^2-1) - \int_0^1 e^x 2x\,dx \\ &= (0 - (-e^0)) - \left(\mathop{\Big/}_0^1 e^x 2x - \int_0^1 e^x \cdot 2\,dx\right) \\ &= 1 - \left((2e^1 - 0) - \mathop{\Big/}_0^1 2e^x\right) = 1 - (2e - (2e - 2)) = -1.\end{aligned}$$

7. Differentiaaliyhtälöt

Dynaamisessa systeemissä funktion arvo tietyssä pisteessä vaikuttaa sen arvoihin ympäröivissä pisteissä. Tyypillisiä ovat ajassa kehittyvät dynaamiset systeemit, joissa jonkin suureen arvo tietyllä ajanhetkellä vaikuttaa sen arvoihin tulevaisuudessa. Suureen arvo voi esimerkiksi vaikuttaa sen muutosnopeuteen. Tällaista systeemiä voidaan kuvata *differentiaaliyhtälöllä.* Differentiaaliyhtälö kertoo, miten funktio ja sen derivaatat riippuvat toisistaan.

Ajatellaan uunissa lämmitettävää paistia. Olkoon paistin lämpötila ajan funktiona $T(t)$. Mitä lämpimämmäksi paisti tulee uunissa, sitä enemmän se säteilee lämpöä pois, jolloin lämpeneminen hidastuu. Paistin lämmittämisessä on kyse dynaamisesta systeemistä. Oletetaan hieman yksinkertaistaen, että paistin lämpenemisnopeus on suoraan verrannollinen uunin ja paistin lämpötilojen erotukseen. (Mitä lähempänä uunin lämpötilaa paistin lämpötila on, sitä hitaammin se lämpenee.) Tällaista riippuvuutta kuvaa seuraava differentiaaliyhtälö:

$$T'(t) = k(200 - T(t)).$$

Yhtälössä esiintyvä k on verrannollisuuskerroin. Ratkaistava tuntematon ei nyt ole mikään luku, vaan lämpötilaa kuvaava funktio T.

Differentiaaliyhtälön ratkaisu ei ole yleensä yksikäsitteinen, vaan moni funktio voi toteuttaa saman yhtälön. Tällöin tarvitaan jotain lisätietoa, jotta funktio voitaisiin ratkaista yksikäsitteisesti. Tyypillinen lisätieto on *alkuarvoehto.* Ennen uuniin laittamista paisti oli huoneenlämpöinen, eli $T(0) = 21$ °C. Tämä lisätieto riittää ratkaisemaan paistin lämpötilaa kuvaavan funktion yksikäsitteisesti.

Differentiaaliyhtälöiden yhteydessä käytetään usein tiettyjä vakiintuneita merkintöjä. Tuntematonta funktiota merkitään yleensä y ja sen derivaattoja y', y'' jne. Funktion muuttujana voi olla x, mutta hyvin usein myös t, varsinkin jos funktio kuvaa jotain ajasta riippuvaa suuretta. Tällöin voi olla jopa niin, että funktiota merkitään x:llä, esimerkiksi $x(t) = t^2$. Yhtälöissä jätetään usein merkitsemättä funktion muuttuja, ei siis merkitä $y(x)$ vaan yksinkertaisesti y.

Määritelmä 7.1. Yhtälöä, jossa esiintyy tuntemattoman funktion y derivaatta tai korkeampi derivaatta, kutsutaan *differentiaaliyhtälöksi* (DY). Differentiaaliyhtälön ratkaisu on mikä tahansa funktio, joka y:n paikalle sijoitettuna toteuttaa yhtälön. Yhtälön *kertaluku eli aste* on korkeimman siinä esiintyvän derivaatan kertaluku.

Esimerkki 7.2. Differentiaaliyhtälöitä:

$$\begin{aligned} y' &= 0, \\ y'' + 2xy &= \sqrt{x}, \\ y''y &= \frac{x}{\sqrt{y'''}}. \end{aligned}$$

Differentiaaliyhtälöitä ratkaistaessa joudutaan etsimään funktioiden integraalifunktioita. Tämän vuoksi ratkaisemista kutsutaan joskus yhtälön *integroimiseksi.* Integraalifunktiota etsittäessä on muistettava, että integraalifunktio ei ole koskaan yksikäsitteinen. Eri integraalifunktiot voivat poiketa toisistaan integroimisvakiolla, joka on otettava huomioon.

Esimerkki 7.3. Yksinkertainen esimerkki differentiaaliyhtälöstä on

$$y' = 2x.$$

Tämä yhtälö voidaan heti ratkaista etsimällä funktion $2x$ integraalifunktio. Eräs ratkaisu on $y(x) = x^2$. Lisäksi integraalilaskennan peruslauseen mukaan kaikki ratkaisut saadaan tästä lisäämällä jokin vakio. Yleinen ratkaisu voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$y(x) = \int 2x \, dx = x^2 + C.$$

Integraalimerkintä ilman integrointiväliä tarkoittaa integraalifunktiota. Luku C on integroimisvakio, ja jokaisella eri C:n arvolla saadaan uusi ratkaisu.

Esimerkki 7.4. Tarkastellaan yhtälöä

$$y'' - 2y' + y = x.$$

Tämä on toisen asteen differentiaaliyhtälö. Yhtälön eräs ratkaisu on $y(x) = e^x + x + 2$, sillä sen derivaatat ovat

$$y'(x) = e^x + 1 \quad \text{ja} \quad y''(x) = e^x,$$

joten

$$y'' - 2y' + y = e^x - 2(e^x + 1) + (e^x + x + 2) = x.$$

Esimerkki 7.5. Tarkastellaan toisen kertaluvun yhtälöä

$$y''y' = x.$$

Yhtälön eräs ratkaisu on $y(x) = \frac{1}{2}x^2$, sillä tämän derivaatat ovat

$$y'(x) = x \quad \text{ja} \quad y''(x) = 1,$$

joten

$$y''y' = 1 \cdot x = x.$$

Usein systeemiä kuvaavasta funktiosta tiedetään sen toteuttaman differentiaaliyhtälön lisäksi joitakin yksittäisiä arvoja. Nämä auttavat funktion määrittämisessä.

Määritelmä 7.6. Ongelmaa, jossa yritetään ratkaista tuntematon funktio, kutsutaan *alkuarvo-ongelmaksi eli alkuarvotehtäväksi* (AAT), jos tiedetään

1) jokin y:n toteuttama differentiaaliyhtälö, sekä
2) y:n sekä sen derivaattojen arvot jossain (samassa) pisteessä $(n-1)$:nteen derivaattaan asti, missä n on yhtälön kertaluku.

Esimerkki 7.7. Eksponenttifunktion määritelmä oli esimerkki alkuarvo-ongelmasta:

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Tuon määritelmän mukaan alkuarvotehtävän ainoa ratkaisu on $y(x) = e^x$. Tehtävän differentiaaliyhtälön toteuttaa kuitenkin mikä hyvänsä funktio $y(x) = Ce^x$, missä C on vakio. Näistä funktioista ainoa, joka toteuttaa alkuarvoehdon, on se jossa $C = 1$, sillä

$$y(0) = 1 \iff Ce^0 = 1 \iff C \cdot 1 = 1 \iff C = 1.$$

Esimerkki 7.8. Kappale liikkuu x-akselilla. Merkitään kappaleen sijaintia ajan funktiona $x(t)$. Oletetaan, että kappaleen kiihtyvyys on koko ajan 1, eli

$$x''(t) = 1.$$

Tämä toisen asteen yhtälö on helppo ratkaista. Koska x' on x'':n integraalifunktio, nähdään että

$$x'(t) = \int x''(t)\,dt = \int 1\,dt = t + V,$$

missä V on integroimisvakio. Toisaalta x on x':n integraalifunktio, joten

$$x(t) = \int x'(t)\,dt = \int t + V\,dt = \frac{1}{2}t^2 + Vt + S,$$

missä S on toinen integroimisvakio. Mikään muu funktio ei toteuta kyseistä yhtälöä.

Oletetaan sitten lisäksi, että kappale lähti pisteestä 2 nopeudella 3 oikealle päin, eli

$$x(0) = 2 \quad \text{ja} \quad x'(0) = 3.$$

Nyt ratkaistavana on alkuarvotehtävä. Ensimmäisen alkuarvoehdon mukaan

$$x(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + V \cdot 0 + S = 2,$$

josta saadaan $S = 2$. Toisen alkuarvoehdon mukaan

$$x'(0) = 0 + V = 3,$$

joten $V = 3$. Alkuarvotehtävän yksikäsitteinen ratkaisu on siis

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 2.$$

Esimerkki 7.9. Aina alkuarvoehtokaan ei riitä yhtälön yksikäsitteiseen ratkaisemiseen. Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

Heti nähdään, että $y_1(x) = 0$ toteuttaa yhtälön ja alkuarvoehdon, joten se on eräs ratkaisu. Toisaalta myös $y_2(x) = x^2/4$ on ratkaisu. Tämän derivaatta on nimittäin $y_2'(x) = x/2$, joten

$$y_2' = \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{x^2}{4}} = \sqrt{y_2},$$

ja lisäksi $y_2(0) = 0$.

Seuraava lause kertoo, milloin alkuarvotehtävällä on täsmälleen yksi ratkaisu.

Lause 7.10. *(Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause) Olkoon annettu ensimmäisen kertaluvun alkuarvotehtävä*

$$y'(x) = f(y, x), \quad y(x_0) = y_0.$$

Oletetaan, että lauseke f on jatkuva ja että sen derivaatta y:n suhteen on olemassa ja jatkuva alkuarvoehdon ympäristössä. Tällöin alkuarvotehtävällä on yksikäsitteinen ratkaisu.

Esimerkki 7.11. Tarkastellaan eksponenttifunktion määrittelyyn liittyvää alkuarvotehtävää

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Tässä $f(y, x) = y$ on jatkuva, ja derivaatta y:n suhteen on 1. Tämä on myös kaikkialla jatkuva, joten alkuarvotehtävällä on yksikäsitteinen ratkaisu.

Esimerkki 7.12. Tarkastellaan aikaisemman esimerkin alkuarvotehtävää

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

Tässä $f(x, y) = \sqrt{y}$. Tämän derivaatta y:n suhteen on $\frac{1}{2\sqrt{y}}$. Derivaattaa ei ole määritelty, kun $y = 0$, vaikka alkuarvoehdossa $y = 0$. Lause ei siis takaa ratkaisun yksikäsitteisyyttä.

7.1. **Separoituvat differentiaaliyhtälöt.** Separoituvia differentiaaliyhtälöitä esiintyy käytännön tilanteissa melko usein, ja niiden ratkaisumenetelmä on yksinkertainen.

Määritelmä 7.13. Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä kutsutaan *separoituvaksi*, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$g(y)y' = h(x),$$

missä g:ssä ei esiinny muuttujaa x (paitsi funktion y muuttujana) ja h:ssa ei esiinny tuntematonta funktiota y.

Esimerkki 7.14.

a) Yhtälö

$$2yy' = x^2$$

on separoituva. Tässä $g(y) = 2y$ ja $h(x) = x^2$.

b) Myös yhtälö

$$y' = (x+2)y^2$$

on separoituva, jos $y \neq 0$, sillä se voidaan tällöin jakaa puolittain y^2:lla, jolloin saadaan

$$\frac{y'}{y^2} = x + 2.$$

Tässä $g(y) = 1/y^2$ ja $h(x) = x + 2$.

c) Yhtälö

$$y' + 2y = x$$

ei ole separoituva, sillä se ei ole vaadittua muotoa, eikä sitä voi muuttaa vaadittuun muotoon.

Separoituvan differentiaaliyhtälön ratkaiseminen perustuu yhdistetyn funktion integrointisääntöön. Tarkoituksena on löytää integraalifunktiot yhtälön molemmilla puolilla esiintyville lausekkeille. Merkitään funktion g integraalifunktiota G. Vasemmalla puolella on nyt yhdistetty funktio $G'(y(x))$ kerrottuna sisäfunktion derivaatalla $y'(x)$. Yhdistetyn funktion integroimissäännön mukaan

$$\int G'(y(x))y'(x)\,dx = G(y(x)) + C,$$

missä C on integroimisvakio. (Huomaa, ettei sisäfunktiosta tarvitse välittää, täytyy vain löytää ulkofunktion integraalifunktio.) Jos merkitään samoin h:n erästä integraalifunktiota H, niin saadaan separoituvan yhtälön yleinen ratkaisu

$$G(y) = H(x) + C.$$

Toista integroimisvakiota ei tarvita, koska se voidaan ajatella sisällytetyksi ensimmäiseen. Tästä tuloksesta ratkaistaan vielä yleensä y, jos se on mahdollista.

Esimerkki 7.15. Ratkaistaan yhtälö

$$2yy' = x^2.$$

Tässä $g(y) = 2y$, ja g:n eräs integraalifunktio on $G(y) = y^2$. Vasemman puolen integraalifunktio löytyy siis yhdistetyn funktion integroimissäännöllä

$$\int 2yy'\,dx = \int G'(y(x))y'(x)\,dx = G(y(x)) + C = y^2 + C.$$

Oikean puolen integraalifunktio on puolestaan

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Saadaan siis

$$y^2 = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Tästä voidaan vielä ratkaista y. Neliöjuuren takia täytyy ottaa huomioon positiiviset ja negatiiviset ratkaisut.

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x^3 + C}.$$

Usein yhtälön muuttaminen separoituvaan muotoon vaatii lisäoletuksia, joista voi löytyä lisäratkaisuja. Tällaisia ratkaisuja, jotka löytyvät ennen kuin yhtälö on separoituvassa muodossa, kutsutaan *erillisratkaisuiksi.*

Esimerkki 7.16. Ratkaistaan yhtälö

$$y' = y^2.$$

Jotta yhtälö saataisiin separoituvaan muotoon, täytyy se jakaa puolittain y^2:lla. Tällöin ei saa olla $y = 0$. Toisaalta myös funktio $y(x) = 0$ toteuttaa yhtälön, joten se on erillisratkaisu.

Oletetaan sitten, että $y \neq 0$. Tällöin saadaan

$$y^{-2}y' = 1.$$

Etsitään molemmille puolille integraalifunktiot:

$$\begin{aligned} &\int y^{-2}y'\,dx = \int 1\,dx \\ \iff &-y^{-1} = x + C. \end{aligned}$$

Ratkaistaan vielä y:

$$y(x) = -\frac{1}{x+C}.$$

Tämä ratkaisu ei saa koskaan arvoa 0, niin kuin oletettiinkin. Yhtälön ratkaisuja ovat siis erillisratkaisun lisäksi kaikki separoimalla saadut ratkaisut:

$$y(x) = 0 \quad \text{tai} \quad y(x) = -\frac{1}{x+C}.$$

Separoimismenetelmällä voidaan ratkaista *eksponentiaalisen kasvun malliin* liittyvät yhtälöt. Eksponentiaalisen kasvun malleissa suureen kasvunopeus on suoraan verrannollinen suureen arvoon, ja ratkaisu on aina eksponenttifunktio. Verrannollisuuskerroin on usein tuntematon, joten sen ratkaisemiseen tarvitaan jokin lisätieto.

Esimerkki 7.17. Radioaktiivisen hajoamisen nopeus on suoraan verrannollinen hajoavan aineen määrään. Oletetaan, että hajoavaa ainetta on alussa 100 kg, ja vuoden päästä enää 50 kg. Muodostetaan systeemiä kuvaava alkuarvotehtävä:

$$m(t)' = km(t), \quad m(0) = 100.$$

Yhtälö on separoituva, jos $m \neq 0$. Erillisratkaisu $m(t) = 0$ ei toteuta alkuarvoehtoa, joten se hylätään. Voidaan siis olettaa, että $m \neq 0$, jolloin saadaan

$$\frac{m'}{m} = k.$$

Vasemmalla puolella ulkofunktiona on $1/m$. Koska m on aina positiivinen (aineen määrä), integraalifunktioksi tulee $\ln m$. Oikean puolen integraalifunktio on kt. Siis

$$\ln m(t) = kt + C.$$

Tästä saadaan ratkaistua m eksponenttifunktion avulla:

$$m(t) = e^{\ln m(t)} = e^{kt+C} = e^C e^{kt}.$$

Merkitään vielä vakiota $e^C = m_0$. Alkuarvoehdon mukaan

$$m(0) = m_0 e^0 = 100,$$

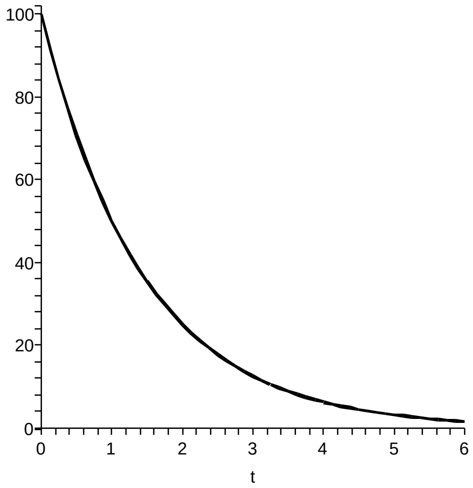
joten $m_0 = 100$. Alkuarvotehtävän ratkaisu on siis

$$m(t) = 100e^{kt}.$$

Verrannollisuuskerroin k on vielä tuntematon. Tämä saadaan ratkaistuksi annetun lisätiedon avulla. Sen mukaan

$$m(1) = 100e^{k\cdot 1} = 100e^k = 50,$$

josta
$$e^k = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \iff k = \ln\frac{1}{2} \approx -0{,}693.$$
Aineen määrää kuvaava funktio on siis
$$m(t) = 100e^{-0{,}7t}.$$



Esimerkki 7.18. Ratkaistaan paistin paistamiseen liittyvä alkuarvotehtävä. Paistin lämpenemisnopeus on suoraan verrannollinen uunin ja paistin lämpötilojen erotukseen. Lisäksi alussa paisti oli huoneenlämpöinen. Näin saadaan alkuarvotehtävä:
$$T' = k(200 - T), \quad T(0) = 21.$$

Muutetaan yhtälö separoituvaan muotoon. Koska alkuhetkellä $T = 21$, erillisratkaisu $T = 200$ ei tule kyseeseen. Saadaan
$$\frac{T'}{200 - T} = k.$$
Vasemman puolen ulkofunktio on $1/(200 - T)$. Tämäkin on yhdistetty funktio, jonka sisäfunktion derivaatta on -1. Saadaan siis
$$\int \frac{T'}{200 - T}\,dt = -\int -\frac{T'}{200 - T}\,dt = -\ln(200 - T) + C.$$
Koska paisti on uunia kylmempi, logaritmi on valittu oikein. Oikean puolen integraalifunktio on puolestaan kt. Saadaan siis
$$\ln(200 - T) = -kt + C.$$
Tästä voidaan ratkaista T eksponenttifunktion avulla:
$$200 - T = e^{\ln(200-T)} = e^{-kt+C} = e^C e^{-kt}.$$
Korvataan vakio e^C vakiolla T_0, jolloin
$$T = 200 - T_0 e^{-kt}.$$
Alkuarvoehdon mukaan
$$T(0) = 200 - T_0 e^0 = 21,$$
josta
$$T_0 = 200 - 21 = 179.$$
Alkuarvotehtävän ratkaisu on siis
$$T(t) = 200 - 179e^{-kt}.$$
Verrannollisuuskerroin voitaisiin ratkaista jostain lisätiedosta.

Kerrataan vielä separoituvan yhtälön ratkaisumenetelmän vaiheet.

1) Muutetaan yhtälö separoituvaan muotoon $g(y)y' = h(x)$. Tässä vaiheessa saattaa löytyä erillisratkaisuja.
2) Etsitään vasemman puolen ulkofunktiolle g integraalifunktio G.
3) Etsitään funktion h integraalifunktio H.
4) Tuloksesta $G(y) = H(x) + C$ ratkaistaan y.

7.2. **Ensimmäisen asteen lineaariset differentiaaliyhtälöt.** Lineaariset differentiaaliyhtälöt muodostavat toisen tärkeän differentiaaliyhtälöiden ryhmän. Lineaariset ja separoituvat yhtälöt eivät ole erillisiä luokkia. Jotkut lineaariset yhtälöt ovat separoituvia ja vastaavasti jotkut separoituvat yhtälöt ovat lineaarisia.

Määritelmä 7.19. Kertalukua n oleva differentiaaliyhtälö on *lineaarinen*, jos se voidaan kirjoittaa seuraavassa muodossa (vrt. polynomi):

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x).$$

Funktio $q(x)$ sekä kaikki funktiot $p_i(x)$ ovat sellaisia, joissa ei esiinny tuntematonta funktiota y.

Esimerkki 7.20. Seuraavat differentiaaliyhtälöt ovat lineaarisia:

$$\begin{aligned} &y'' + 2xy = \sqrt{x}, \\ &y^{(5)} - \frac{1}{x}y''' + 2x\sqrt{x}y'' - y' + e^x y = x, \\ &y' - y = 0. \end{aligned}$$

Joskus differentiaaliyhtälöä pitää hieman muokata, jotta se saadaan lineaariseen muotoon.

Esimerkki 7.21. Yhtälö

$$x^3y'' - x^2y' + xy = x^3$$

on lineaarinen, jos $x \neq 0$, sillä tällöin yhtälö voidaan jakaa puolittain termillä x^3, jolloin saadaan

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 1.$$

Lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi on olemassa hyvin tunnettuja menetelmiä. Tällä kurssilla tarkastellaan vain *ensimmäisen kertaluvun* lineaarisia differentiaaliyhtälöitä, jotka ovat siis muotoa

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Esimerkki 7.22. Ensimmäisen asteen lineaarisia yhtälöitä:

$$\begin{aligned} y' + xy &= 0, \\ y' - \sqrt{x^3}y &= 2xe^x. \end{aligned}$$

Joissakin erikoistapauksissa, funktioista p ja q riippuen, ensimmäisen asteen lineaarinen yhtälö voidaan ratkaista jo tuntemillamme menetelmillä. Tarkastellaan ensin näitä erikoistapauksia.

Jos $\mathbf{p(x) = 0}$, yhtälö on hyvin yksinkertainen:

$$y' = q(x).$$

Tämän ratkaisu löytyy etsimällä q:n integraalifunktio Q, jolloin

$$y(x) = Q(x) + C.$$

Esimerkki 7.23. Yhtälö

$$y' = x + 2$$

on ensimmäisen asteen lineaarinen yhtälö. Tässä $q(x) = x + 2$, ja tämän eräs integraalifunktio on $Q(x) = x^2/2 + 2x$. Yhtälön kaikki ratkaisut ovat siis muotoa

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C,$$

missä C on integroimisvakio.

Jos $\mathbf{q(x) = 0}$, yhtälöä kutsutaan *homogeeniseksi*:

$$y' + p(x)y = 0.$$

Homogeenisella yhtälöllä on aina erityisratkaisu $y(x) = 0$. Jos oletetaan, että $y(x) \neq 0$, yhtälö on separoituva:

$$\frac{y'}{y} = -p(x).$$

Vasemman puolen integraalifunktio on $\ln|y|$ (itseisarvomerkit tarvitaan, jos ei tiedetä, onko y positiivinen vai negatiivinen). Merkitsemällä funktion p integraalifunktiota P, saadaan

$$\ln|y| = -P(x) + C_1,$$

Tästä saadaan eksponenttifunktion avulla ratkaisu

$$|y(x)| = e^{-P(x)+C_1} = e^{C_1}e^{P(x)}.$$

Vakio e^{C_1} on aina positiivinen, koska eksponenttifunktio saa vain positiivisia arvoja. Funktio y voi kuitenkin olla myös negatiivinen. Korvataan vakio e^{C_1} vakiolla C, joka voi olla positiivinen tai negatiivinen (mutta ei $C = 0$), niin voimme luopua itseisarvomerkeistä, ja saamme homogeenisen yhtälön separoidun ratkaisun:

$$y(x) = Ce^{-P(x)}, \quad C \neq 0.$$

Jos vielä sallitaan, että $C = 0$, saadaan myös erillisratkaisu $y = 0$ sisällytetyksi samaan ratkaisuun:

$$y(x) = Ce^{-P(x)}.$$

Esimerkki 7.24. Ratkaistaan homogeeninen yhtälö

$$y' + (e^x + 8)y = 0.$$

Erillisratkaisu on aina $y = 0$. Oletetaan sitten, että $y \neq 0$, jolloin voidaan separoida yhtälö:

$$\frac{y'}{y} = -e^x - 8.$$

Oikean puolen eräs integraalifunktio on $P(x) = -e^x - 8x$. Ratkaisuksi saadaan siis

$$\ln|y| = -e^x - 8x + C_1,$$

josta

$$y(x) = Ce^{-e^x - 8x}.$$

Jos $C = 0$, tämä ratkaisu on sama kuin erillisratkaisu.

Esimerkki 7.25. Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$y' - \frac{4x}{x^2+1}y = 0, \quad y(0) = 2.$$

Tehtävän differentiaaliyhtälö on homogeeninen yhtälö, jonka erillisratkaisu on $y = 0$. Tämä ei toteuta alkuarvoehtoa, joten voimme olettaa, että $y \neq 0$. Tällöin yhtälö voidaan separoida:

$$\frac{y'}{y} = \frac{4x}{x^2+1}.$$

Oikealla puolella on yhdistetty funktio $1/(x^2+1)$ kerrottuna sisäfunktion derivaatalla $2x$ sekä vakiolla 2:

$$p(x) = 2 \cdot \frac{2x}{x^2+1}.$$

Yhdistetyn funktion integraalisäännön mukaan tämän integraalifunktio on

$$P(x) = 2\ln(x^2+1).$$

Tuloksen voi tarkistaa helposti derivoimalla:

$$D\ P(x) = D\ 2\ln(x^2+1) = 2 \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = p(x).$$

Yhtälön ratkaisu on siis

$$y(x) = Ce^{2\ln(x^2+1)} = Ce^{\ln(x^2+1)^2} = C(x^2+1)^2.$$

Alkuarvoehdon mukaan

$$y(0) = C(0^2+1)^2 = C = 2,$$

joten lopullinen ratkaisu on

$$y(x) = 2(x^2+1)^2.$$

Täydellisen lineaarisen yhtälön ($p(x) \neq 0$, $q(x) \neq 0$) ratkaiseminen perustuu tulon derivointisääntöön ja homogeenisen yhtälön ratkaisuun. Tarkastellaan ensin erikoistapausta $p = \mu'/\mu$, missä μ (lausutaan "myy") on jokin positiivinen funktio:

$$y' + \frac{\mu'}{\mu} y = q(x).$$

Tämä yhtälö voidaan kertoa puolittain μ:llä, jolloin saadaan:

$$\mu y' + \mu' y = \mu q(x).$$

Tulon derivointisäännön nojalla $D(\mu y) = \mu y' + \mu' y$, joten yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$D(\mu y) = \mu q(x).$$

Nyt täytyy vain etsiä oikean puolen integraalifunktio:

$$\mu y = \int \mu q(x)\,dx + C.$$

Koska μ on positiivinen, voidaan jakaa yhtälö lopuksi puolittain μ:llä, jolloin saadaan ratkaisuksi

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x) q(x)\,dx + C \right).$$

(Huomaa, että integroimisvakio jää sulkeiden sisään.)

Tämä ratkaisu siis onnistuu, jos voimme löytää sellaisen positiivisen funktion μ, jolle pätee $p = \mu'/\mu$, eli

$$\mu' - p(x)\mu = 0.$$

Tällaista funktiota μ kutsutaan *integroimistekijäksi*, koska sillä kertominen mahdollistaa yhtälön ratkaisemisen eli integroimisen. Integroimistekijä löytyy ratkaisemalla yllä oleva yhtälö. Tämä yhtälö on homogeeninen ensimmäisen asteen lineaarinen yhtälö, jonka ratkaisu jo tunnetaan. Se on

$$\mu(x) = Ce^{P(x)},$$

missä P on funktion p integraalifunktio. Valitaan integroimisvakioksi $C = 1$, jolloin saadaan yksinkertainen positiivinen ratkaisu:

$$\mu(x) = e^{P(x)}.$$

Kun integroimistekijä on löydetty, voidaan yhtälö ratkaista edellä kuvatulla tavalla.

Esimerkki 7.26. Ratkaistaan ensimmäisen asteen lineaarinen yhtälö

$$y' + 2y = e^x.$$

Lasketaan ensin integroimistekijä. Funktiolla $p(x) = 2$ on integraalifunktio $P(x) = 2x$, joten

$$\mu(x) = e^{2x}.$$

Kerrotaan yhtälö puolittain integroimistekijällä:

$$e^{2x}y' + 2xe^{2x}y = e^{2x}e^x.$$

Tulon derivointisäännön mukaan $D(e^{2x}y) = e^{2x}y' + 2xe^{2x}y$, ja eksponenttifunktion laskusääntöjen mukaan $e^{2x}e^x = e^{3x}$. Yhtälö voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$D(e^{2x}y) = e^{3x}.$$

Oikean puolen integraalifunktio on $\frac{1}{3}e^{3x}$ (koska $D(\frac{1}{3}e^{3x}) = \frac{1}{3}e^{3x} \cdot 3 = e^{3x}$). Saadaan siis

$$e^{2x}y = \frac{1}{3}e^{3x} + C,$$

josta

$$y(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{3}e^{3x} + C\right) = \frac{1}{3}e^x + Ce^{-2x}.$$

Esimerkki 7.27. Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$xy' - y = 3x, \quad y(1) = -3, \quad x > 0.$$

Koska $x > 0$, voidaan yhtälö muuttaa lineaariseksi:

$$y' - \frac{1}{x}y = 3.$$

Nyt kerroinfunktio on $p(x) = -1/x$, ja tämän integraalifunktio on $P(x) = -\ln x$. Integroimistekijäksi saadaan

$$\mu(x) = e^{P(x)} = e^{-\ln x} = (e^{\ln x})^{-1} = x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

Kerrotaan yhtälön molemmat puolet integroimistekijällä, jolloin yhtälö tulee muotoon

$$D\left(\frac{1}{x}y\right) = \frac{3}{x}.$$

Koska oletettiin, että $x > 0$, niin oikean puolen integraalifunktio on $3\ln x$, jolloin

$$\frac{1}{x}y = 3\ln x + C.$$

Tästä saadaan yhtälön ratkaisu

$$y(x) = 3x\ln x + Cx.$$

Alkuarvoehdon mukaan

$$y(1) = 3 \cdot 1 \cdot \ln 1 + C \cdot 1 = C = -3,$$

joten alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$y(x) = 3x\ln x - 3x = 3x(\ln x - 1).$$

Kerrataan vielä ensimmäisen asteen lineaarisen yhtälön ratkaisumenetelmä.

1) Jos $p(x) = 0$, ratkaisu on q:n integraalifunktio.
2) Jos $q(x) = 0$, yhtälö on separoituva.

Muuten

3) Etsitään integroimistekijä $\mu = e^{P(x)}$.
4) Kerrotaan yhtälö μ:llä ja kirjoitetaan vasen puoli muotoon $D(\mu y)$.
5) Etsitään oikean puolen integraalifunktio, ja jaetaan se μ:llä.

7.3. **Korkeamman kertaluvun differentiaaliyhtälöistä.** Korkeamman kertaluvun differentiaaliyhtälöt ovat yleensä vaikeita ratkaista. Joskus kuitenkin ratkaisun voi löytää yhtälön muotoa tarkastelemalla.

Esimerkki 7.28. Tarkastellaan yhtälöä

$$y'''y = 0.$$

Yhtälöstä nähdään heti, että joko $y = 0$ tai sitten $y''' = 0$. Jälkimmäisessä tapauksessa $y'' = A$, jolloin $y' = Ax + B$ ja

$$y(x) = \frac{1}{2}Ax^2 + Bx + C.$$

Jos $A = B = C = 0$, saadaan jo löydetty ratkaisu $y = 0$.

Esimerkki 7.29. Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$y'''y'' = 2, \quad y''(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 2.$$

Tulon derivointisäännön nojalla

$$D(y''y'') = y'''y'' + y''y''' = 2y'''y''.$$

Siispä tehtävän yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{1}{2}D(y''y'') = 2,$$

eli

$$D((y'')^2) = 4.$$

Oikean puolen eräs integraalifunktio on $4x$, joten

$$(y'')^2 = 4x + C.$$

Ottamalla neliöjuuret molemmilta puolilta saadaan

$$y''(x) = \pm\sqrt{4x + C}.$$

Oikean puolen integraalifunktio on vaikea löytää. Käytetään sen sijaan alkuarvoehtoa:

$$y''(0) = \pm\sqrt{4 \cdot 0 + C} = \pm\sqrt{C} = 0,$$

josta saadaan $C = 0$, eli

$$y''(x) = \pm\sqrt{4x} = \pm 2x^{1/2}.$$

Nyt oikean puolen integraalifunktio on $\frac{4}{3}x^{3/2}$, joten

$$y'(x) = \pm\frac{4}{3}x^{3/2} + D.$$

Käyttämällä toista alkuarvoehtoa saadaan

$$y'(0) = \pm\frac{4}{3} \cdot 0 + D = 1.$$

Tämän mukaan $D = 1$, jolloin

$$y'(x) = \pm\frac{4}{3}x^{3/2} + 1.$$

Nyt oikean puolen integraalifunktio on $\frac{8}{15}x^{5/2} + x$, joten

$$y(x) = \pm\frac{8}{15}x^{5/2} + x + E.$$

Viimeisestä alkuarvoehdosta saadaan vielä

$$y(0) = \pm\frac{8}{15} \cdot 0 + 0 + E = 2,$$

josta $E = 2$, ja lopulta

$$y(x) = \pm\frac{8}{15}x^{5/2} + x + 2.$$

Joskus yhtälössä esiintyy vain tuntemattoman funktion derivaattoja eikä lainkaan kyseistä funktiota sellaisenaan. Tällöin voidaan ajatella alinta esiintyvää kertalukua oleva derivaatta tuntemattomaksi funktioksi, jolloin saadaan alempaa kertalukua oleva yhtälö.

Esimerkki 7.30. Tarkastellaan toisen asteen yhtälöä

$$xy'' + 2y' = x, \quad (x > 0).$$

Yhtälössä esiintyy vain tuntemattoman funktion derivaattoja. Ajatellaan nyt, että tuntematon funktio onkin $v(x) = y'$, jolloin yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$xv' + 2v = x.$$

Tämä on ensimmäisen asteen lineaarinen yhtälö, joka osataan jo ratkaista:

$$v' + \frac{2}{x}v = 1.$$

Koska $x > 0$, funktion $p(x) = 2/x$ integraalifunktio on $P(x) = 2\ln x$. Integroimistekijä on siis

$$\mu = e^{P(x)} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2.$$

Kerrotaan yhtälö puolittain integroimistekijällä, jolloin se tulee muotoon

$$D(x^2 v) = x^2.$$

Oikean puolen integraalifunktio on $\frac{1}{3}x^3$. Täten

$$x^2 v = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

josta

$$v(x) = \frac{1}{3}x + \frac{C}{x^2}.$$

Koska funktio v on y:n derivaatta, on y v:n integraalifunktio:

$$y(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{C}{x} + D.$$

Joskus yhtälössä ei esiinny lainkaan muuttujaa x muuten kuin tuntemattoman funktion y muuttujana. Tällöin voidaan ajatella kuten edellä, että tuntematon funktio on $v = y'$, mutta tällä kertaa muuttujana toimiikin y!

Esimerkki 7.31. Tarkastellaan toisen asteen yhtälöä

$$y'' = 2y'y.$$

Ajatellaan, että tuntematon funktio onkin $v(y) = y'$, muuttujana y. Koska $v(y)$ on itse asiassa yhdistetty funktio, saadaan yhdistetyn funktion derivointisäännön perusteella

$$y'' = D(y') = D(v(y)) = v'(y)y' = v'v.$$

Nyt yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$v'v = 2vy.$$

Funktio $v = 0$ toteuttaa yhtälön. Oletetaan, että $v \neq 0$, jolloin yhtälö voidaan jakaa puolittain v:llä:

$$v' = 2y.$$

Oikean puolen integraalifunktio on y^2, joten

$$v(y) = y^2 + C.$$

Tästä pitäisi vielä ratkaista y. Koska itse asiassa $v = y'$, niin

$$y' = y^2 + C.$$

Tämä yhtälö on separoituva:

$$\frac{y'}{y^2 + C} = 1.$$

Vasemman puolen integraalifunktiota ei käsitellä tällä kurssilla, joten jätämme ratkaisun tähän vaiheeseen. Kyseinen integraalifunktio löytyy kyllä taulukkokirjoista.

Toisen asteen *vakiokertoiminen* homogeeninen lineaarinen yhtälö on muotoa

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0,$$

missä p_1 ja p_2 ovat vakioita. Tällainen yhtälö ratkaistaan tarkastelemalla ns. *karakteristista polynomia*

$$k^2 + p_1 k + p_2.$$

Erityisesti, jos tällä polynomilla on kaksi (eri) positiivista juurta k_1 ja k_2, yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

missä C_1 ja C_2 ovat integroimisvakioita.

Esimerkki 7.32. Tarkastellaan homogeenista vakiokertoimista yhtälöä

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Tämän yhtälön karakteristinen polynomi on

$$k^2 - 3k + 2.$$

Ratkaistaan karakteristisen polynomin juuret:

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}.$$

Juuret ovat siis $k_1 = 2$ ja $k_2 = 1$. Yhtälön ratkaisu on

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}.$$

Jollei vakiokertoiminen yhtälö ole homogeeninen, se on muotoa

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = q(x).$$

Jos tällaiselle yhtälölle löytää jonkin yksittäisen ratkaisun y_p, saadaan loput ratkaisut lisäämällä vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisu y_h löydettyyn yksittäisratkaisuun. Yksittäisratkaisut löytyvät yleensä helpoimmin kokeilemalla.

Esimerkki 7.33. Tarkastellaan epähomogeenista vakiokertoimista yhtälöä

$$y'' - 3y' + 2y = 2x - 2.$$

Yritetään löytää yhtälölle yksittäisratkaisu kokeilemalla. Koska yhtälön oikealla puolella on ensimmäisen asteen polynomi, kannattaa kokeilla myös ratkaisuksi ensimmäisen asteen polynomia:

$$y_p(x) = Ax + B.$$

Tämän derivaatat ovat $y_p'(x) = A$, ja $y_p''(x) = 0$. Sijoittamalla nämä ratkaistavaan yhtälöön saadaan

$$0 - 3A + 2(Ax + B) = 2Ax - 3A + B = 2x - 2.$$

Jotta polynomit olisivat samat, täytyy kaikkien termien kertoimien olla samat. Tämän vuoksi täytyy olla

$$2A = 2 \quad \text{ja} \quad -3A + B = -2.$$

Tästä voidaan helposti ratkaista $A = 1$ ja $B = 1/2$. Siispä

$$y_p(x) = x + \frac{1}{2}.$$

Vastaava homogeeninen yhtälö ratkaistiin jo edellisessä esimerkissä. Epähomogeenisen yhtälön kaikki ratkaisut ovat siis muotoa

$$y(x) = y_p + y_h = x + \frac{1}{2} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{x},$$

missä C_1 ja C_2 ovat vakioita. Jos $C_1 = C_2 = 0$, saadaan löydetty yksittäisratkaisu.

8. Usean muuttujan funktiot

Monet suureet riippuvat useammasta kuin yhdestä muuttujasta. Jos nämä muuttujat eivät riipu suoraan toisistaan, ei riippuvuutta voi täydellisesti kuvata yhden muuttujan funktiolla. Ajatellaan esimerkiksi suorakulmion pinta-alaa. Pinta-ala riippuu suorakulmion leveydestä ja korkeudesta, mutta nämä ovat yleensä riippumattomia toisistaan. Toinen esimerkki voisi olla jo aiemmin mainittu lämpötila metsässä. Lämpötila riippuu paitsi mittaushetkestä myös mittauspaikasta, eikä näillä - ajalla ja paikalla - ole selvästikään mitään keskinäistä riippuvuutta.

Usean muuttujan funktioissa ei periaatteessa ole mitään poikkeuksellista verrattuna yhden muuttujan funktioihin. Jokaista muuttujien arvoa vastaa edelleen täsmälleen yksi funktion arvo. Myös raja-arvo ja jatkuvuus voidaan määritellä samaan tapaan kuin yhden muuttujan funktioilla. Käytännössä usean muuttujan funktioiden hahmottaminen on kuitenkin usein hankalampaa jo senkin takia, että kuvaajien piirtäminen tulee helposti lähes mahdottomaksi.

Esimerkki 8.1. Suorakulmion pinta-ala on funktio $A : [0,\infty[\times[0,\infty[\to \mathbb{R}$,

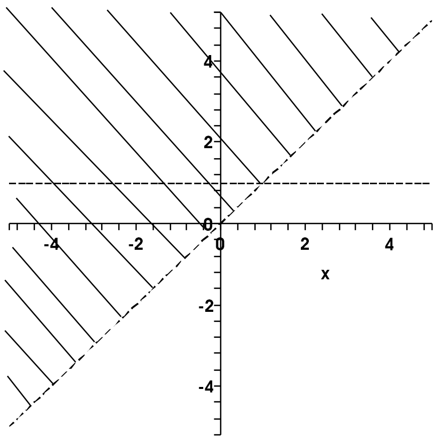
$$A(x,y) = xy.$$

Määrittelyjoukon merkintä $X \times Y$ tarkoittaa sitä, että ensimmäinen muuttuja x on ensimmäisellä välillä X, ja toinen muuttuja y toisella. Jos suorakulmion leveys on 3 ja pituus 4, sen ala on $A(3,4) = 3 \cdot 4 = 12$.

Esimerkki 8.2. Tarkastellaan funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{y-1} + \ln(y-x)$$

määrittelyjoukkoa xy-tason osajoukkona. Jotta nimittäjäksi ei tulisi nolla, täytyy olla $y \neq 1$. Määrittelyjoukosta täytyy siis poistaa suora, jolla $y = 1$. Lisäksi, koska logaritmi on määritelty vain positiivisilla luvuilla, täytyy olla $y > x$. Tämä toteutuu suoran $y = x$ yläpuolella. Funktio voidaan siis määritellä kuvan viivoitetussa alueessa, lukuunottamatta suoria $y = 1$ ja $y = x$.



Esimerkki 8.3. Ajatellaan mainittua lämpötilaa metsässä. Tämä voidaan ajatella kolmen muuttujan funktiona, sillä lämpötila riippuu mittauspaikan x- ja y-koordinaateista sekä mittaushetkestä. Tällainen funktio voitaisiin määritellä vaikkapa $T : A\times[0,24] \to \mathbb{R}$, missä A on jokin xy-koordinaatiston alue, jossa metsä sijaitsee. Ajanyksikkönä on tunnit, ja mittauksia suoritetaan yhden vuorokauden ajan. Jos piste $(-1,2)$ sijaitsee metsässä, niin lämpötila tässä pisteessä keskipäivällä on $T(-1,2,12)$. Tämä voi olla vaikka $T(-1,2,12) = 20°\text{C}$.

Esimerkki 8.4. Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$y' = \sqrt{y} + x, \quad y(1) = 0.$$

Jos määritellään kahden muuttujan funktio $f : \mathbb{R} \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{y} + x$, voidaan yhtälö kirjoittaa $y' = f(x, y)$. Alkuarvokohdassa $x = 1$, $y = 0$ ja

$$y' = f(1, 0) = \sqrt{0} + 1 = 1.$$

Usean muuttujan funktion hahmottamista auttaa usein, jos valitsee yhden muuttujan kerrallaan tarkasteltavaksi ja ajattelee muut muuttujat vakioiksi. Näin voi tutkia sitä, miten kukin muuttujista erikseen vaikuttaa funktion käyttäytymiseen. Tällöin täytyy kuitenkin olla varovainen, koska usean muuttujan yhteisvaikutus voi olla erilainen kuin kunkin muuttujan vaikutus yksinään.

Esimerkki 8.5. Tasapaksu metallitanko on asetettu koordinaatistoon siten, että sen keskikohta on origossa ja päät pisteissä $x = -1$ ja $x = 1$. Tankoa lämmitetään 10 sekuntia siten, että kohdassa x lämpötila Celsius-asteina t sekunnin kuluttua lämmityksen alkamisesta on

$$T(x, t) = 1000(1 - e^{-t})(1 - x^2).$$

Tarkastellaan ensin lämpötilan riippuvuutta ajasta. Olkoon siis x-koordinaatti vakio $x = C$, jolloin funktio näyttää tältä:

$$T(t) = 1000(1 - e^{-t})(1 - C^2).$$

Jos vielä merkitään selvyyden vuoksi $1000(1 - C^2) = D$, joka siis on vakio ajan suhteen, lauseke on

$$T(t) = D(1 - e^{-t}).$$

Nähdään, että ajan suhteen lämpenemisessä on kyse lähinnä eksponenttifunktiosta.

Tarkastellaan sitten lämpötilan riippuvuutta paikasta. Olkoon ajanhetki vakio $t = C$, jolloin funktio tulee muotoon

$$T(x) = 1000(1 - e^{-C})(1 - x^2).$$

Merkitään tässä taas selvyyden vuoksi $1000(1 - e^{-C}) = D$, jolloin

$$T(x) = D(1 - x^2).$$

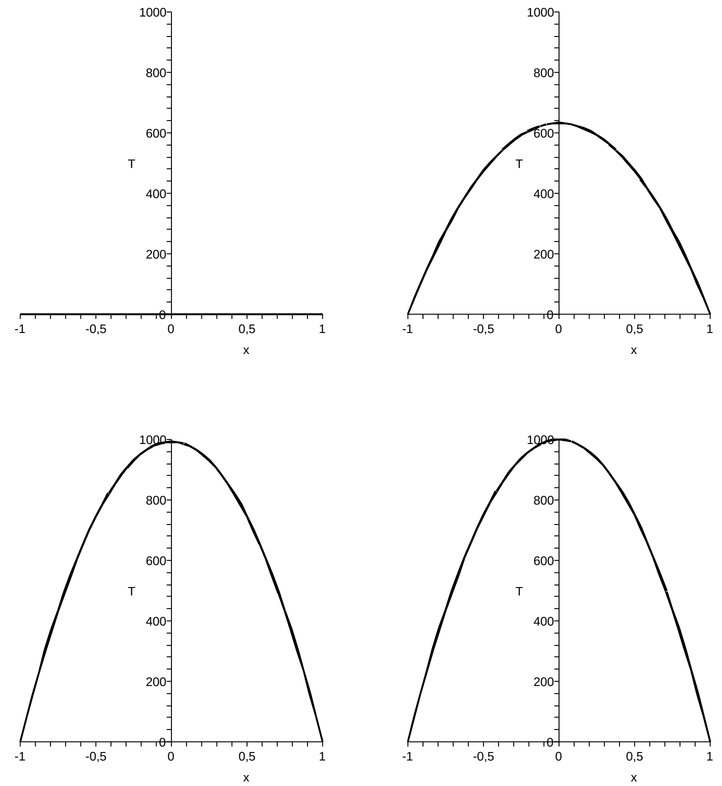
Nyt nähdään, että paikan suhteen lämpötila on toisen asteen polynomi, jonka huippu on tangon keskellä.

8.1. **Usean muuttujan funktioiden kuvia.** Helpoin tapa piirtää kuvia usean muuttujan funktiosta perustuu edellä mainittuun ajattelutapaan. Valitaan yksi muuttuja, sijoitetaan muiden paikalle eri vakioita, ja piirretään kustakin näin syntyvästä yhden muuttujan funktiosta tavallinen kuvaaja. Jos vakioksi asetettu muuttuja kuvaa esimerkiksi aikaa, saadaan tällä tavoin eräänlaisia pysäytyskuvia siitä, miltä funktio näyttää tietyllä ajanhetkellä.

Esimerkki 8.6. Tarkastellaan edelleen lämmitettävää metallitankoa. Tutkitaan ensin lämpötilan riippuvuutta paikasta eri ajanhetkinä. Tätä varten asetetaan t vakioksi C, jolloin funktion lauseke tulee (kuten edellä) muotoon

$$T(x) = D(1 - x^2),$$

missä $D = 1000(1 - e^{-C})$. Olkoot tarkasteltavat ajanhetket $t = 0, 1, 5, 10$ s. Sijoitetaan nämä luvut vakion C paikalle (joka siis kuvasi ajanhetkeä), jolloin saadaan vakion D arvoiksi 0, 632, 993 ja 1000. Piirretään funktion $T(x)$ kuvaaja näillä D:n arvoilla.

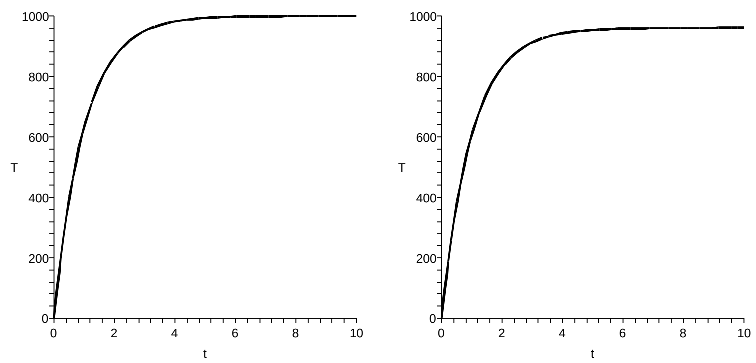


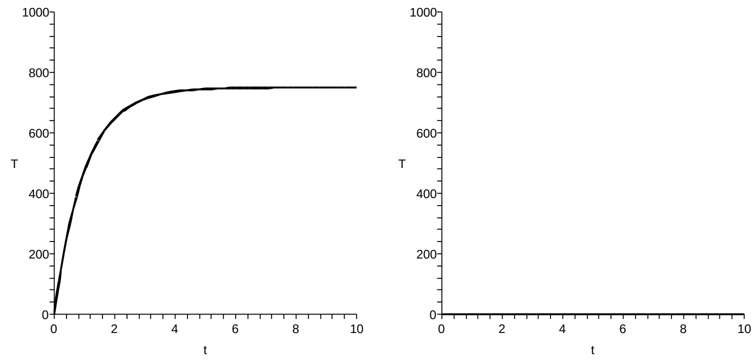
Nähdään, että lämpötilan huippu on koko ajan keskellä tankoa ja tangon päät ovat koko ajan nollan asteen lämpötilassa.

Tutkitaan vielä lämpötilan riippuvuutta ajasta eri kohdissa tankoa. Asetetaan siis x vakioksi C, jolloin funktio on

$$T(t) = D(1 - e^{-t}),$$

missä $D = 1000(1 - C^2)$. Tutkitaan lämpenemistä kohdissa $x = 0, 0{,}2, 0{,}5, 1$. Sijoitetaan nämä vakion C paikalle, jolloin D saa arvot 1000, 960, 750 ja 0. (Negatiivisilla x:n arvoilla saadaan samat D:n arvot.) Piirretään kuvaaja $T(t)$ näillä D:n arvoilla.

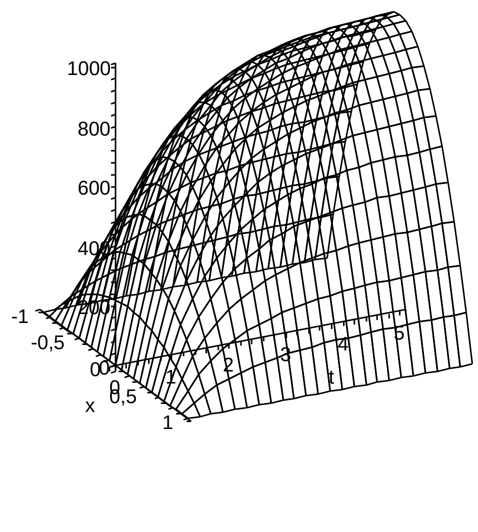




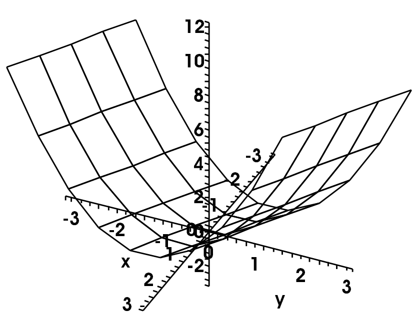
Kuvaajista nähdään, että lämpötila on alussa joka pisteessä 0, ja lähestyy ajan myötä kullekin pisteelle ominaista D:n arvoa. Tangon päässä lämpötila on vakio.

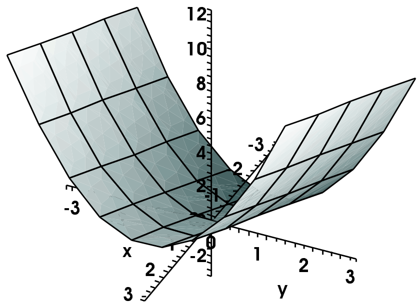
Varsinaisia kuvaajia, eli koordinaatistoon piirrettyjä käyriä, voi oikeastaan piirtää vain korkeintaan kahden muuttujan funktioista. Kahden muuttujan funktion kuvaaja on *xyz-koordinaatistoon sijoittuva pinta.* Kussakin pinnan pisteessä x- ja y-koordinaatit kertovat muuttujien arvot, ja z-koordinaatti kertoo funktion arvon. Kuten funktioilla yleensä, kutakin muuttujien arvoja voi vastata vain yksi funktion arvo, joten kutakin paria (x, y) voi kuvaajan pisteissä vastata vain yksi z:n arvo. Tämä tarkoittaa sitä, että *mikään pystysuora ei voi leikata funktion kuvaajaa useammin kuin kerran.* Kuvaajien piirtämisessä täytyy yleensä käyttää apuna tietokoneita, vaikka yksinkertaisten funktioiden kuvaajia pystyy itsekin hahmottelemaan.

Esimerkki 8.7. Seuraavassa kuvassa on edellä käsitellyn metallitangon lämpötilan kuvaaja ajan ja paikan funktiona.



Esimerkki 8.8. Tarkastellaan funktiota $f(x, y) = x + y^2$. Tämän kuvaaja voidaan hahmotella seuraavasti. Piirretään ensin muutamilla eri x:n arvoilla kuvaajia xyz-koordinaatistoon. Nämä kuvaajat ovat paraabeleja, esim. $z = 1 + y^2$. Tämän jälkeen piirretään muutamilla eri y:n arvoilla vastaavat kuvaajat samaan koordinaatistoon. Nämä kuvaajat ovat suoria, esim. $z = x + 4$. Lopuksi kuvaa voi varjostaa maun mukaan.





Kahden muuttujan funktioista voi myös piirtää tavalliseen xy-koordinaatistoon niin sanottuja *tasa-arvo- eli korkeuskäyräkuvia.* Tällaisessa kuvassa xy-koordinaatistoon piirretään sellaisia käyriä, joilla funktion arvo on vakio. Käyrän yhteyteen merkitään usein myös funktion kasvusuunta ”veden virtauksen” mukaan.

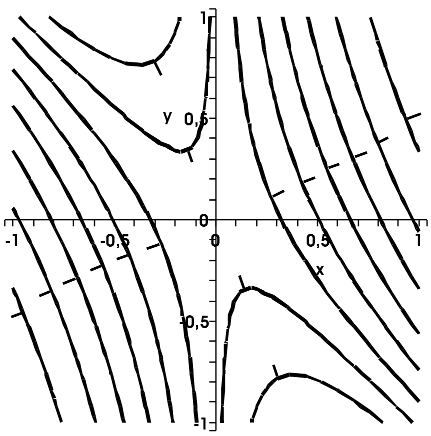
Esimerkki 8.9. Piirretään funktion

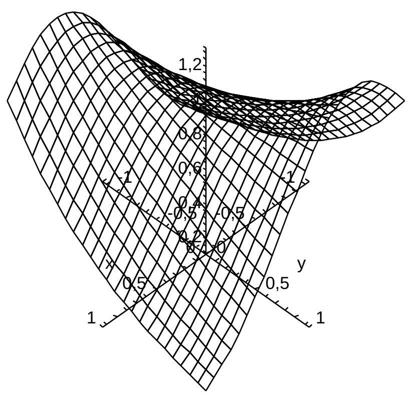
$$f(x,y) = \frac{1}{e^{x^2+xy}}$$

tasa-arvokäyräkuva. Merkitään funktion arvoa $z = f(x,y)$. Tarkoituksena on piirtää xy-tasoon käyriä, joilla z on vakio. Ratkaistaan sitä varten z:n lausekkeesta y.

$$\begin{aligned} & z = \frac{1}{e^{x^2+xy}} \\ \iff & e^{x^2+xy} = 1/z \\ \iff & x^2 + xy = \ln|1/z| \\ \iff & xy = \ln|1/z| - x^2 \\ \iff & y = \frac{\ln|1/z|}{x} - x. \end{aligned}$$

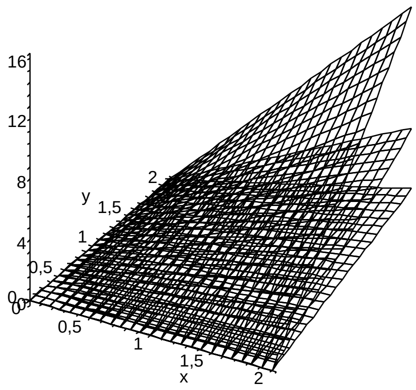
Tämän jälkeen sijoitetaan z:n paikalle eri lukuja, ja piirretään syntyvien funktioiden kuvaajat xy-koordinaatistoon.

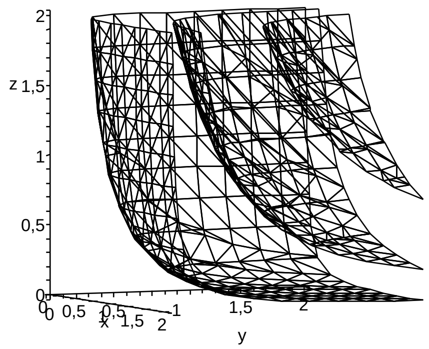




Jos funktio riippuu useammasta kuin yhdestä muuttujasta, edellä mainittuja keinoja voi vapaasti yhdistellä. Voidaan esimerkiksi valita kaksi muuttujaa, asettaa muut muuttujat vakioiksi, ja piirtää kahden muuttujan kuvaajia eri vakioiden arvoilla. Toisaalta voidaan piirtää tasa-arvokäyriä kolmiulotteiseen koordinaatistoon.

Esimerkki 8.10. Seuraavissa kuvissa on hahmoteltu funktiota $f(x,y,z) = xyz$. Ensimmäisessä kuvassa on valittu kolme eri C:n arvoa (1, 2 ja 4) ja piirretty niiden mukaan funktion $f(x,y) = Cxy$ kuvaajat samaan koordinaatistoon. Toisessa kuvassa on funktion f tasa-arvokäyräkuva. Tasa-arvokäyrät ovat nyt kolmiulotteisessa avaruudessa olevia pintoja, joiden kaikissa pisteissä (x,y,z) funktio f saa vakioarvon.





8.2. **Osittaisderivaatat ja gradientti.** Usean muuttujan funktiolle ei voida määritellä mitään lukua, joka kertoisi funktion kasvunopeuden tietyssä pisteessä. Tämä on luonnollista, sillä muuttuja voi käyttäytyä hyvin eri tavalla eri muuttujiensa suhteen. Kasvunopeus ajan suhteen voi olla erilainen kuin kasvunopeus paikan suhteen, joten näitä täytyy tarkastella erikseen.

Määritelmä 8.11. Olkoon f funktio, joka riippuu n:stä muuttujasta $x_1, \ldots, x_n$. Tarkastellaan jotain muuttujaa x_i ja ajatellaan muut vakioiksi. Tällöin saadaan funktio $f_i(x_i) = f(x_1, \ldots, x_n)$, joka riippuu vain muuttujasta x_i. Funktion f *osittaisderivaatta muuttujan x_i suhteen* on tämän funktion f_i derivaatta. Osittaisderivaattoja merkitään yleensä $\partial_i f$, $\partial_{x_i} f$, $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ tai f_{x_i}. (Merkki ∂ lausutaan "doo".)

Osittaisderivaatan määritelmä voi tuntua monimutkaiselta, mutta kyse on vain siitä, että funktio derivoidaan tietyn muuttujan suhteen. Muut muuttujat ajatellaan vakioiksi.

Esimerkki 8.12. Lasketaan funktioiden $f(x,t) = tx^2 + 2t$ ja $g(x,y,z) = xyz^2 + e^{xy}$ osittaisderivaatat. Laskettaessa funktion f ensimmäistä osittaisderivaattaa ajatellaan t vakioksi, jolloin

$$\partial_x f(x,t) = t \cdot 2x + 0 = 2tx.$$

Laskettaessa toista osittaisderivaattaa ajatellaan puolestaan x vakioksi:

$$\partial_t f(x,t) = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 = x^2 + 2.$$

Funktion g osittaisderivaatat lasketaan samalla tavoin. Myös yhdistetyssä funktiossa sisäfunktion derivaatta riippuu siitä, minkä muuttujan suhteen derivoidaan. Saadaan siis

$$\begin{aligned}
\partial_1 g(x,y,z) &= 1 \cdot yz^2 + e^{xy} \cdot y = yz^2 + ye^{xy}, \\
\partial_2 g(x,y,z) &= x \cdot 1 \cdot z^2 + e^{xy} \cdot x = xz^2 + xe^{xy}, \\
\partial_3 g(x,y,z) &= xy \cdot 2z + 0 = 2xyz.
\end{aligned}$$

Osittaisderivaatassa z:n suhteen ei esiinny eksponenttifunktiotermiä, koska kyseinen termi ei alkuperäisessä funktiossa lainkaan riipu z:sta.

Esimerkki 8.13. Tarkastellaan erään aikaisemman esimerkin funktion $f(x,y) = x + y^2$ osittaisderivaattoja. Nämä ovat

$$\partial_1 f(x,y) = 1 \quad \text{ja} \quad \partial_2 f(x,y) = 2y.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että x:n suhteen funktio kasvaa vakionopeudella, kun taas y:n suhteen sen kasvunopeus riippuu tarkasteltavan pisteen y:n arvosta. Kuvaajan kannalta se merkitsee, että x-akselin suunnassa funktio kasvaa kaikkialla tasaisesti eli "rinteen jyrkkyys" on vakio, kun taas y-akselin suunnassa kasvu on sitä nopeampaa, mitä kauempana ollaan x-akselista.

Esimerkki 8.14. Tarkastellaan edellä käsiteltyä alkuarvotehtävää

$$y' = \sqrt{y} + x, \quad y(1) = 0.$$

Määritellään kahden muuttujan funktio $f(x,y) = \sqrt{y} + x$. Tämän osittaisderivaatat ovat

$$\partial_x f(x,y) = 1 \quad \text{ja} \quad \partial_y f(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Osittaisderivaatta y:n suhteen ei ole määritelty, kun $y = 0$. Alkuarvoehdossa kuitenkin $y = 0$, joten olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen ehdot eivät toteudu. Alkuarvotehtävällä voi siis olla useita tai ei yhtään ratkaisua.

Funktion osittaisderivaatat kertovat funktion kasvunopeuden tietyn muuttujan suhteen. Niitä voidaan siten käyttää samanlaiseen analyysiin kuin tavallistakin derivaattaa, jos ollaan kiinnostuneita vain tietyn muuttujan vaikutuksesta. Tässä yhteydessä on kuitenkin edelleen muistettava, että monen muuttujan yhteisvaikutus voi olla monimutkaisempi kuin muuttujien vaikutukset erikseen. Esimerkiksi osittaisderivaattojen olemassaolo ei takaa funktion jatkuvuutta kuten yhden muuttujan funktioiden tapauksessa.

Esimerkki 8.15. Tarkastellaan jälleen metallitankoa, jonka lämpenemistä kuvaa funktio

$$T(x,t) = 1000(1 - e^{-t})(1 - x^2).$$

Tämän osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned}
\partial_x T(x,t) &= 1000(1 - e^{-t})(0 - 2x) = -2000(1 - e^{-t})x, \\
\partial_t T(x,t) &= 1000(0 - e^{-t})(-1)(1 - x^2) = 1000e^{-t}(1 - x^2).
\end{aligned}$$

Jälkimmäinen osittaisderivaatta kuvaa metallitangon lämpenemisnopeutta ajan suhteen. Esimerkiksi lämpenemisnopeus kohdassa $x = -0{,}2$ hetkellä $t = 2$ s on

$$\partial_t T(-0{,}2, 2) = 1000e^{-2}(1 - (-0{,}2)^2) \approx 130 \quad (^\circ\mathrm{C/s}).$$

Ensimmäinen osittaisderivaatta kuvaa metallitangon lämpenemisnopeutta paikan funktiona. Ratkaisemalla tämän nollakohdat ajanhetkellä $t = 1$ s saadaan selville, missä kohtaa tankoa lämpötila saavuttaa huippunsa kyseisellä ajanhetkellä. Selvästi

$$\partial_x T(x,1) = -2000(1 - e^{-1})x = 0 \iff x = 0.$$

Lämpötilan huippukohta hetkellä $t = 1$ s on siis tangon keskellä.

Funktioille voidaan myös laskea korkeampia osittaisderivaattoja. Tutkitaan esimerkiksi, mikä tangon kohta lämpenee nopeimmin. Lämpenemisnopeutta kuvaa osittaisderivaatta $\partial_t T$. Tangon kohta, jossa tämä nopeus saavuttaa huippuarvonsa, on paikan suhteen lasketun derivaatan nollakohta. Kyseinen derivaatta on

$$\partial_x \partial_t T(x,t) = \partial_x(1000e^{-t}(1 - x^2)) = 1000e^{-t}(0 - 2x) = -2000e^{-t}x.$$

Koska eksponenttifunktio on aina positiivinen, ainoa nollakohta on $x = 0$. Tangon keskikohta siis lämpenee nopeimmin.

Palautetaan seuraavaksi mieleen *vektorin* käsite. Jos avaruuden dimensio on n, siinä oleva vektori on muotoa

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

missä $x_1, \ldots, x_n$ ovat vektorin *komponentit*. Nämä voivat olla mitä tahansa reaalilukuja. Vektoreita merkitään yleensä jollain seuraavista tavoista: $\bar{x}$, $\vec{x}$ tai $\mathbf{x}$. Saman avaruuden vektoreita voi laskea yhteen:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Lisäksi minkä tahansa vektorin voi kertoa jollain reaaliluvulla komponenteittain:

$$a(x_1, \ldots, x_n) = (ax_1, \ldots, ax_n).$$

Vektorilla on *suunta ja pituus*, joten vektoria voidaan kuvata nuolella. Vektorin pituus on

$$|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Merkintä on sama kuin itseisarvolla, mutta niin on määritelmäkin, sillä $\sqrt{x^2} = |x|$. Jos vektori kerrotaan jollain positiivisella luvulla a, sen pituus muuttuu a-kertaiseksi, mutta suunta säilyy samana.

Esimerkki 8.16. Tarkastellaan vektoreita $\bar{a} = (1, 2)$, $\bar{b} = (3, -4)$ ja $\bar{c} = (1, -1, 4)$. Vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat kaksiulotteisen avaruuden eli tason vektoreita, $\bar{c}$ on kolmiulotteisen avaruuden vektori. Lasketaan vektorien pituudet:

$$\begin{aligned}
|\bar{a}| &= |(1,2)| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5},\\
|\bar{b}| &= |(3,-4)| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5,\\
|\bar{c}| &= |(1,-1,4)| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18}.
\end{aligned}$$

Lasketaan sitten yhteen kaksi ensimmäistä vektoria:

$$\bar{a} + \bar{b} = (1,2) + (3,-4) = (1+3, 2-4) = (4,-2),$$

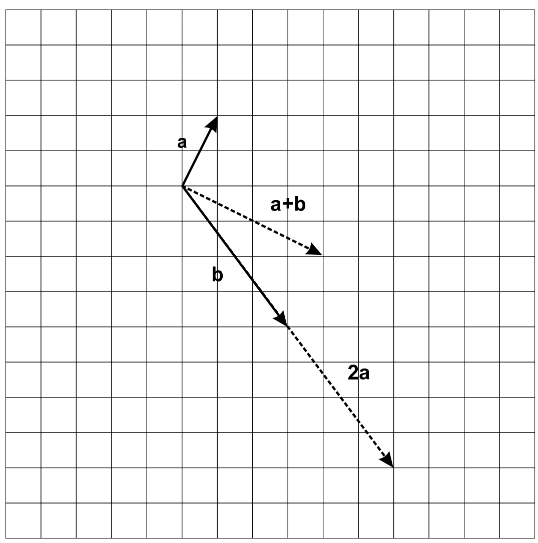
ja kerrotaan toinen vektori kahdella:

$$2\bar{b} = 2(3,-4) = (6,-8).$$

Kertomalla saadun uuden vektorin pituus on

$$|(6,-8)| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10,$$

eli vektori $2\bar{a}$ on kaksi kertaa niin pitkä kuin $\bar{a}$.



Tason vektori $\mathbf{i} = (1, 0)$ on x-akselin suuntainen, ja sen pituus on 1. Toisaalta vektori $\mathbf{j} = (0, 1)$ on y-akselin suuntainen ja myös yhden pituinen. Näitä vektoreita nimitetään tason *kantavektoreiksi*. Mikä tahansa tason vektori voidaan ilmoittaa niiden avulla:

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}.$$

Esimerkki 8.17. Kirjoitetaan edellisen esimerkin tasovektorit kantavektoreiden avulla:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= (1, 2) = (1, 0) + 2(0, 1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \\ \bar{b} &= (3, -4) = 3(1, 0) + (-4)(0, 1) = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Kahden saman avaruuden vektorin *pistetulo* on komponenttien tulojen summa:

$$(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Esimerkki 8.18. Lasketaan edellisten esimerkkien tasovektorien pistetulo:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (1, 2) \cdot (3, -4) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) = 3 - 8 = -5.$$

Osittaisderivaatat sisältävät tietoa funktion kasvunopeudesta eri muuttujien suhteen. Tämä tieto voidaan koota vektoriksi, joka sisältää komponentteinaan osittaisderivaatat.

Määritelmä 8.19. Olkoon f funktio, joka riippuu n:stä muuttujasta $x_1, \ldots, x_n$. Funktion f *gradientti* on vektori, jonka komponentteina ovat kaikki funktion osittaisderivaatat. Gradienttia merkitään ∇f (∇ lausutaan "nabla"). Siispä

$$\nabla f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \ldots, \partial_n f).$$

Funktion gradientti on määrittelyjoukon vektori, jonka suunta on *se suunta, jossa funktio kasvaa nopeimmin.* Gradientin pituus taas kertoo funktion *kasvunopeuden* tuossa suunnassa. Jos eri muuttujat kuvaavat eri suureita, kuten paikkaa ja aikaa, ei gradientin merkitys ole aina ilmeinen.

Esimerkki 8.20. Tarkastellaan funktiota

$$f(x, y) = e^{-x^2 - 2y^2}.$$

Tämän osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y) &= e^{-x^2-2y^2}(-2x) = -2xe^{-x^2-2y^2}, \\ \partial_2 f(x, y) &= e^{-x^2-2y^2}(-2 \cdot 2y) = -4ye^{-x^2-2y^2}. \end{aligned}$$

Funktion gradientti on siis

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)) = (-2xe^{-x^2-2y^2}, -4ye^{-x^2-2y^2}) \\ &= 2e^{-x^2-2y^2}(-x, -2y). \end{aligned}$$

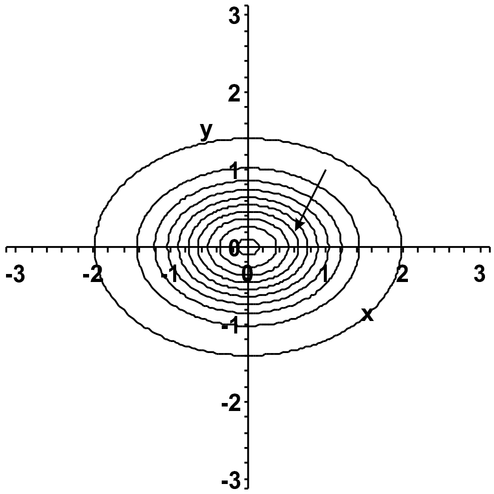
Kohdassa $(1, 1)$ gradientti on

$$\nabla f(1, 1) = 2e^{-1^2-2\cdot 1^2}(-1, -2 \cdot 1) = 2e^{-3}(-1, -2).$$

Funktio kasvaa siis nopeimmin suunnassa $(-1, -2) = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ (positiivisella luvulla $2e^{-3}$ kertominen ei vaikuta vektorin suuntaan). Kasvunopeus tuossa suunnassa on

$$2e^{-3}|(-1, -2)| = 2e^{-3}\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = 2e^{-3}\sqrt{5}.$$

Jos funktio f kuvaisi maaston korkeutta, gradientti kertoisi, missä suunnassa maasto kohoaisi jyrkimmin.



Oheisessa korkeuskäyräkuvassa gradientin pituutta on liioiteltu selvyyden vuoksi.

Esimerkki 8.21. Oletetaan, että ilman lämpötilaa jollain pienellä alueella kuvaa funktio

$$T(x, y, z) = -xz^2 \ln y + 20.$$

Mehiläinen lentää tällä alueella pisteessä $(2, 1, 1)$. Se yrittää päästä mahdollisimman nopeasti viileämpään. Mihin suuntaan sen olisi lennettävä?

Lasketaan funktion T osittaisderivaatat:

$$\begin{aligned}
\partial_1 T(x, y, z) &= -z^2 \ln y, \\
\partial_2 T(x, y, z) &= \frac{-xz^2}{y}, \\
\partial_3 T(x, y, z) &= -x \cdot 2z \ln y = -2xz \ln y.
\end{aligned}$$

Funktion gradientti on siis

$$\nabla T(x, y, z) = \left(-z^2 \ln y, \frac{-xz^2}{y}, -2xz \ln y \right).$$

Pisteessä $(2, 1, 1)$ gradientti on

$$\nabla T(2, 1, 1) = \left(-1^2 \ln 1, \frac{-2 \cdot 1^2}{1}, -2 \cdot 2 \cdot 1 \ln 1 \right) = (0, -2, 0).$$

Gradientti kertoo, missä suunnassa lämpötila *kasvaa* nopeimmin. Mehiläisen on siis lennettävä vastakkaiseen suuntaan, joka on $-(0, -2, 0) = (0, -(-2), 0) = (0, 2, 0) = 2\mathbf{j}$. Tämä on y-akselin suunta.

Gradientti ilmoittaa siis nopeimman kasvun suunnan, mutta sen avulla voidaan laskea myös kasvunopeus missä tahansa halutussa suunnassa.

Määritelmä 8.22. Olkoon $\bar{v}$ vektori funktion f määrittelyjoukossa. Funktion f *suunnattu derivaatta vektorin* $\bar{v}$ *suunnassa* on

$$\nabla_{\bar{v}} f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{|\bar{v}|} \nabla f(x_1, \ldots, x_n) \cdot \bar{v}.$$

Suunnattu derivaatta kertoo funktion kasvunopeuden vektorin $\bar{v}$ määräämässä suunnassa.

Esimerkki 8.23. Tarkastellaan jälleen funktiota

$$f(x,y) = e^{-x^2-2y^2}.$$

Tämän funktion gradientti oli

$$\nabla f(x,y) = 2e^{-x^2-2y^2}(-x,-2y).$$

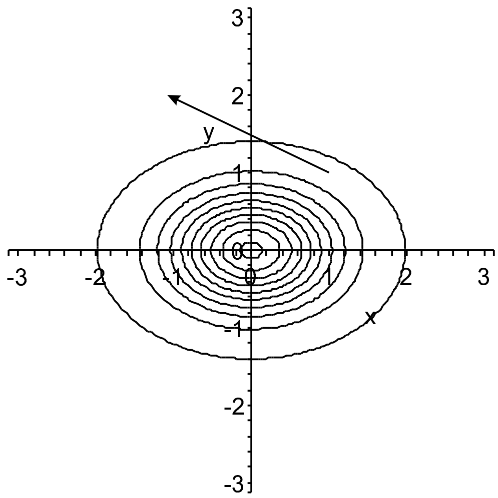
Tutkitaan nyt, miten nopeasti funktio kasvaa pisteessä $(1,1)$ vektorin $\bar{v} = (-2,1)$ suunnassa. Gradientti pisteessä $(1,1)$ on

$$\nabla f(1,1) = 2e^{-1^2-2\cdot 1^2}(-1,-2\cdot 1) = 2e^{-3}(-1,-2).$$

Suunnattu derivaatta on siis

$$\begin{aligned}
\nabla_{\bar{v}} f(1,1) &= \frac{1}{|(-2,1)|}\nabla f(1,1)\cdot(-2,1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}2e^{-3}(-1,-2)\cdot(-2,1) \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}e^3}(-1\cdot(-2)+(-2)\cdot 1) \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}e^3}(2-2) = 0.
\end{aligned}$$

Kasvunopeus tässä suunnassa on nolla. Vektorin $\bar{v}$ täytyy siis olla tämän pisteen kautta kulkevan korkeuskäyrän suuntainen.



8.3. **Usean muuttujan integraali.** Kuten yhden muuttujan tapauksessa, rajoitumme jälleen jatkuviin funktioihin. Usean muuttujan funktion integraalia merkitään sisäkkäisillä integraaleilla:

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n\ldots\,dx_2\,dx_1.$$

Usean muuttujan integraalissa kullakin muuttujalla on oma integroimisvälinsä. Muuttujan x_1 integroimisväli on $[a_1,b_1]$, muuttujan x_2 integroimisväli on $[a_2,b_2]$ jne. Integraalit lasketaan yksi kerrallaan sisimmästä alkaen.

Esimerkki 8.24. Lasketaan kahden muuttujan integraali

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} x+y\,dy\,dx.$$

Laskeminen aloitetaan sisimmästä integraalista. Integrointi suoritetaan muuttujan y suhteen ja x ajatellaan vakioksi:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x + y\,dy &= \Big/_{0}^{1} \left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)\\ &= \left(x \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2\right) - \left(x \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0^2\right)\\ &= x + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Sisemmän integraalin tulos sijoitetaan sitten ulompaan integraaliin ja integroidaan x:n suhteen:

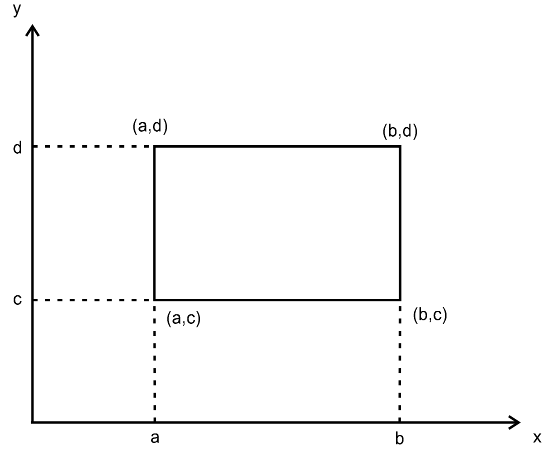
$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \left(\int_0^1 x + y\,dy\right) dx = \int_{-1}^1 x + \frac{1}{2}\,dx &= \Big/_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right)\\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1)\right)\\ &= 1 - 0 = 1.\end{aligned}$$

Integroimisvälit voivat myös riippua toisista muuttujista. Tällöin täytyy olla erityisen tarkkana, kun sijoittaa välin päätepisteitä integraalifunktioon. Kuten yhden muuttujan tapauksessa, lopputulokseen ei saa jäädä integroimismuuttujia.

Esimerkki 8.25. Lasketaan integraali

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^x x + 2y\,dy\,dx &= \int_0^1 \Big/_{0}^{x} (xy + y^2)\,dx\\ &= \int_0^1 ((x \cdot x + x^2) - (x \cdot 0 + 0^2))\,dx\\ &= \int_0^1 2x^2\,dx = \Big/_{0}^{1} \frac{2}{3}x^3\\ &= \frac{2}{3} \cdot 1^3 - \frac{2}{3} \cdot 0^3 = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Integraalin tulkinta on samanlainen kuin yhden muuttujan tapauksessa. Integraali ilmoittaa funktion kertymän integroimisalueella. Integroimisalue muodostuu integroimisväleistä. Oletetaan, että kahden muuttujan integraalissa muuttujan x integroimisväli on $[a, b]$ ja muuttujan y integroimisväli on $[c, d]$. Tällöin integroimisalue on tason suorakulmio, jonka nurkat ovat pisteissä (a, c), (b, c), (a, c) ja (b, d).



Esimerkki 8.26. Erään matolajin esiintyminen tietyllä suorakulmion muotoisella maa-alueella noudattaa funktiota

$$M(x,y) = 10e^{-x} + 2y \quad (\text{matoa/m}^2).$$

Maa-alue sijaitsee koordinaatistossa siten, että sen yksi kulma on origossa ja sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Sivujen pituudet ovat x-suunnassa 3 m ja y-suunnassa 2 m. Montako matoa maa-alueella on yhteensä?

Matojen määrä on esiintymistiheyden integraali. Integroidaan funktiota M sellaisen alueen yli, jossa $0 \le x \le 3$ ja $0 \le y \le 2$:

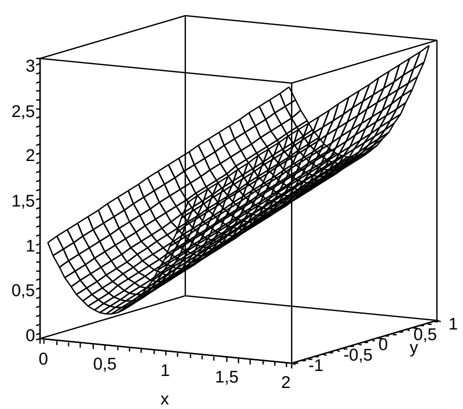
$$\begin{aligned}
\int_0^3 \int_0^2 10e^{-x} + 2y\, dy\, dx &= \int_0^3 \Big/_{0}^{2} (10e^{-x}y + y^2)\, dx \\
&= \int_0^3 (10e^{-x} \cdot 2 + 2^2) - (0+0)\, dx \\
&= \int_0^3 20e^{-x} + 4\, dx = \Big/_{0}^{3} (-20e^{-x} + 4x) \\
&= (-20e^{-3} + 4 \cdot 3) - (-20e^{-0} + 4 \cdot 0) \\
&\approx 31 \quad (\text{matoa}).
\end{aligned}$$

Yhden muuttujan integraali ilmoitti kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän pinta-alan. Kahden muuttujan funktion integraali ilmoittaa vastaavasti *kuvaajan ja xy-tason väliin jäävän alueen tilavuuden.*

Esimerkki 8.27. Tarkastellaan funktiota

$$f(x,y) = x + y^2.$$

Tämän funktion kuvaaja on oheisen kuvan kouru. Lasketaan kourun ja xy-tason väliin jäävä tilavuus suorakulmiossa, jossa $0 \le x \le 2$ ja $-1 \le y \le 1$.



Koska kuvaaja on koko suorakulmion alueella xy-tason yläpuolella, tilavuus on funktion integraali kyseisen suorakulmion yli. Siispä

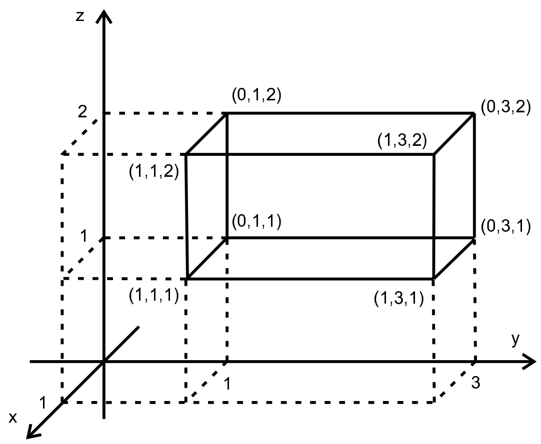
$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 \int_{-1}^1 x + y^2 \, dy \, dx = \int_0^2 \Big/_{-1}^{1} \left(xy + \frac{1}{3}y^3 \right) dx \\
&= \int_0^2 \left(x + \frac{1}{3} \right) - \left(-x - \frac{1}{3} \right) dx = \int_0^2 2x + \frac{2}{3} \, dx \\
&= \Big/_{0}^{2} \left(x^2 + \frac{2}{3}x \right) = \left(4 + \frac{4}{3} \right) - (0 + 0) = \frac{16}{3}.
\end{aligned}
$$

Useammalla kuin kahdella muuttujalla kuvaajan piirtäminen ei enää onnistu. Kuitenkin vielä kolmen muuttujan tapauksessa integroimisalueen voi hahmottaa.

Esimerkki 8.28. Olkoon f kolmen muuttujan funktio. Tarkastellaan integraalia

$$
\int_0^1 \int_1^3 \int_1^2 f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx.
$$

Tässä integraalissa muuttujan x integroimisväli on $[0, 1]$, muuttujan y $[1, 3]$ ja muuttujan z $[1, 2]$. Integroimisalue on siis *suorakulmainen särmiö*, jonka nurkat ovat pisteissä $(0, 1, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(0, 3, 1)$, $(0, 3, 2)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 3, 1)$ ja $(1, 3, 2)$.

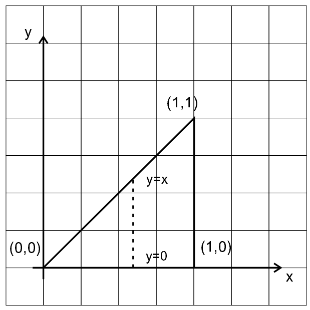


Jos integroimisalue ei ole suorakulmio (tai kolmen muuttujan tapauksessa suorakulmainen särmiö), täytyy integroimisvälien riippua toisistaan.

Esimerkki 8.29. Integroidaan funktiota $f(x, y) = x - y$ sellaisen kolmion yli, jonka nurkat ovat pisteissä $(0, 0)$, $(1, 0)$ ja $(1, 1)$. Integraali on siis muotoa

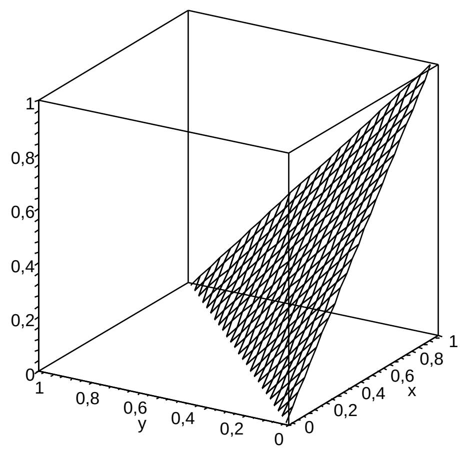
$$
\int_a^b \int_c^d x - y \, dy \, dx.
$$

Sisempi integraali lasketaan muuttujan y suhteen. Muuttujan y integroimisväli riippuu kuitenkin siitä, miten kaukana y-akselista ollaan. Kuvasta nähdään, että y-suuntaisen integroimisvälin toinen päätepiste on kuitenkin koko ajan suoralla $y = x$. Asetetaan siis sisemmäksi integroimisväliksi $[0, x]$. Ulompi integraali lasketaan sitten koko välin $[0, 1]$ yli.



Integroimisalue muodostuu siis niistä pisteistä (x, y), joissa $0 \leq x \leq 1$ ja $0 \leq y \leq x$. Integraali on

$$\int_0^1 \int_0^x x - y \, dy \, dx = \int_0^1 \Big/_0^x \left(xy - \frac{1}{2} y^2 \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{2} x^2 \right) - (0 - 0) \, dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 \, dx = \Big/_0^1 \frac{1}{6} x^3 = \frac{1}{6} \cdot 1^3 - 0 = \frac{1}{6}.$$



Olennaista integroimisrajojen määräämisessä on, että ulomman integraalin rajat eivät saa riippua sisemmän integraalin integroimismuuttujasta.

Integraalilla voidaan laskea jatkuvalle funktiolla eräänlainen *keskiarvo*. Tämä on yhden muuttujan funktion tapauksessa

$$\frac{1}{|b - a|} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Kun muistaa, että integraali on oikeastaan tietyn summan raja-arvo, tätä voi verrata tavalliseen keskiarvoon:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Tämän ominaisuuden vuoksi integraalia käytetään usein, kun halutaan tarkastella monen muuttujan funktiota vain joidenkin muuttujien suhteen. Tällöin integraalilla lasketaan keskiarvo niiden muuttujien yli, joista ei olla kiinnostuneita. Näin saadaan uusi funktio, johon jäävät jäljelle ne muuttujat, joiden suhteen funktiota halutaan tarkastella. Uusi funktio saa näillä muuttujilla arvoikseen hylätyistä muuttujista laskettuja keskiarvoja.

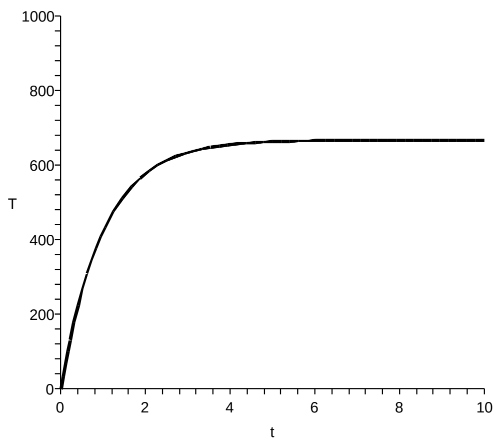
Esimerkki 8.30. Tarkastellaan vielä metallitankoa, jonka lämpötila noudattaa funktiota

$$T(x,t) = 1000(1-e^{-t})(1-x^2).$$

Määritellään uusi funktio $T_k : [0,10] \to \mathbb{R}$, jonka arvo ajanhetkellä t on tangon keskilämpötila tuolla hetkellä, eli

$$\begin{aligned}
T_k(t) &= \frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} T(x,t)\,dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} 1000(1-e^{-t})(1-x^2)\,dx \\
&= 500(1-e^{-t}) \int_{-1}^{1} 1-x^2\,dx \\
&= 500(1-e^{-t}) \Big/_{-1}^{1} \left(x - \frac{1}{3}x^3\right) \\
&= 500(1-e^{-t}) \left(\left(1 - \frac{1}{3}\cdot 1^3\right) - \left(-1 - \frac{1}{3}(-1)^3\right) \right) \\
&= 500(1-e^{-t}) \cdot \frac{4}{3} \\
&= \frac{2000}{3}(1-e^{-t}).
\end{aligned}$$

Näin saadaan yhden muuttujan funktio, joka kuvaa tangon keskilämpötilaa ajan funktiona.



LOPPU