

1. Missä pisteissä (eli millä x :n ja y :n arvoilla) seuraavat funktiot on määritelty? Hahmottele määrittelyjoukot xy -koordinaatistoon.

$$\text{a) } f(x, y) = \sqrt{x} - \frac{1}{y}, \quad \text{b) } g(x, y) = \ln(y - x^2) + \frac{1}{xy}.$$

2. Piirrä seuraavien funktioiden korkeuskäyräkuvat xy -koordinaatistoon. Kuvaile funktioita kuvien perusteella.

$$\text{a) } f(x, y) = x + y, \quad \text{b) } g(x, y) = xy.$$

3. Laske seuraavien funktioiden osittaisderivaatat. Missä osittaisderivaatat on määritelty?

$$\text{a) } f(x, y) = xy + e^{xy}, \quad \text{b) } g(x, y, z) = \frac{1}{z} - \ln xz + xy^2z.$$

4. Eräällä kukkulalla maanpinnan korkeus koordinaatiston pisteessä (x, y) myötäilee funktiota

$$f(x, y) = -\frac{1}{2}(2x^2 + y^2).$$

Mihin suuntaan pisteeseen $(1, 2)$ satava vesi valuu? Kuinka jyrkkä on nousu tuossa samassa pisteessä vektorin $(4, 3)$ suuntaan?

Vihje: Vesi valuu siihen suuntaan, johon maasto laskee jyrkiten. Vertaa mehiläisesimerkkiin.

5. Laske seuraavat integraalit. Kuvaile integroimisalueita.

$$\text{a) } \int_{-1}^1 \int_0^x x + y \, dy \, dx, \quad \text{b) } \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^x e^y e^z \, dx \, dy \, dz.$$

6. Maanviljelijällä on suorakulmion muotoinen pelto, jolla hän kokeilee uutta siemenlajia. Pellon yksi nurkka on koordinaatiston origossa ja sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Sivujen pituudet ovat x -akselin suunnassa 100 m ja y -akselin suunnassa 50 m. Maanviljelijä haluaa tutkia, mikä siementiheys olisi tuottavin. (Liian suuri siementiheys tuottaa liikaa kilpailua.) Tätä varten hän kylvää siemenet siten, että siementiheys noudattaa seuraavaa funktiota:

$$d(x, y) = 2000xy \quad (\text{siementä/m}^2).$$

Kuinka paljon hän tarvitsee siemeniä koko pellon kylvämiseen.

Vihje: Siementen määrä on siementiheyden integraali.