Y100 kurssimateriaali

Syksy 2013

Jokke Häsä ja Jaakko Kortesharju

Sisältö

Johdanto

Kurssin Y100 tavoite on oppia analysoimaan matemaattisia riippuvuuksia derivaattaa ja integraalia hyväksi käyttäen sekä tutustua matriiseihin ja niiden käyttöön yhtälöryhmien ratkaisussa. Kurssilla harjoitellaan sekä laskutekniikkaa, kuten funktioiden derivointia ja integrointia ja matriisien laskutoimituksia, että tekniikoiden sovellutuksia yksinkertaisissa käytännön tilanteissa.

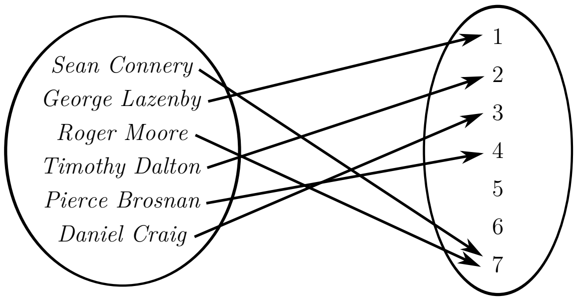
Kurssi jakautuu seuraaviin osiin:

- Funktiot ja niiden perusominaisuudet
  - tutustutaan tärkeimpiin funktioihin liittyviin käsitteisiin, opitaan näkemään funktio suureiden välisenä riippuvuutena, käyttämään funktion kuvaajaa apuna funktiota tutkittaessa sekä muodostamaan yhdistettyjä funktioita
- Funktioiden kasvun tutkiminen
  - opitaan derivoimaan erilaisia funktioita, tutustutaan derivaatan ja funktion kasvunopeuden väliseen yhteyteen ja opitaan soveltamaan derivaattaa funktion käyttäytymisen tutkimisessa sekä käytännön optimointitilanteissa
- Integraali
  - opitaan integroimaan polynomifunktioita ja käyttämään integraalia annetun suureen kertymän selvittämiseksi
- Eksponentti- logaritmi- ja trigonometriset funktiot
  - tutustutaan mainittujen erityisfunktioiden perusominaisuuksiin, opitaan derivoimaan ja integroimaan niitä sisältäviä lausekkeita sekä käyttämään niitä apuna joissakin käytännön sovelluksissa
- Yhtälöryhmät ja matriisilaskenta
  - opitaan ratkaisemaan lineaarisia yhtälöryhmiä Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä, tutustutaan matriiseihin ja niiden laskutoimituksiin, määritellään käänteismatriisi ja opitaan käyttämään sitä hyväksi yhtälöryhmien ratkaisemisessa

1 Reaaliarvoiset funktiot

1.1 Funktio

Karkeasti ottaen *funktio* on sääntö, joka liittää olioihin toisia olioita. Esimerkiksi voidaan ajatella funktiota, joka liittää jokaiseen James Bondia esittäneeseen näyttelijään niiden elokuvien määrän, joissa hän on esiintynyt (vuoteen 2012 mennessä). Tällainen funktio voidaan esittää alla olevan kuvan muodossa.[1]



Jokaiseen näyttelijään liitetään siis jokin positiivinen kokonaisluku. Näitä kokonaislukuja nimitetään funktion *arvoiksi*. Voidaan esimerkiksi sanoa, että lähtöarvolla *Daniel Craig* funktion arvo on 3.

James Bond -esimerkissä liitettiin näyttelijöihin kokonaislukuja. Tällä kurssilla käsitellään kuitenkin jatkossa vain funktioita, jotka liittävät reaalilukuihin toisia reaalilukuja. Sekä lähtöarvot että funktioiden arvot ovat siis tavallisia lukusuoran lukuja. Tällaisia funktioita ovat esimerkiksi seuraavat:

- ajanhetkeen liittyvä ulkolämpömittarin lukema
- neliön sivun pituuteen liittyvä neliön pinta-ala
- lukuun x liittyvä polynomilausekkeen $x^2 + 2x + 1$ arvo
- käytettävissä olevan kakunkuorrutteen määrään liittyvä kakun maksimipinta-ala
- tilillä olevaan saldoon liittyvä opiskelijan veren stressihormonin pitoisuus.

Funktioita merkitään matematiikassa yleensä kirjaimilla f, g ja h. Jos x on jokin lähtöarvo, funktion f arvoa merkitään $f(x)$. Esimerkiksi funktion arvoa lähtöarvolla 2 merkitään $f(2)$. Koska reaaliluvut voidaan esittää lukusuoran pisteinä, arvoa $f(2)$ kutsutaan myös funktion arvoksi *kohdassa* 2 tai *pisteessä* 2.

Silloin kun funktion arvot ovat jonkin konkreettisen suureen arvoja, voidaan käyttää myös tuon suureen yhteydessä vakiintunutta kirjainta. Esimerkiksi funktiota, joka liittää neliön sivun pituuteen sen pinta-alan, voidaan merkitä kirjaimella A. Koska sivun pituutta 2 vastaa pinta-ala 4, merkitään $A(2) = 4$ ja sanotaan, että lähtöarvolla 2 funktion A arvo on 4.

Funktioista voidaan myös ajatella, että ne kuvaavat arvojensa *riippuvuutta* lähtöarvoista. Tästä on useimmiten kyse käytännön esimerkeissä. Esimerkiksi funktio, joka liittää jokaiseen ajanhetkeen ulkolämpötilan arvon, kuvaa lämpötilan riippuvuutta ajan-

[1] Vuonna 1967 ilmestynyt Casino Royale -parodia on jätetty pois tarkastelusta.

hetkestä. Sanotaan myös, että ulkolämpötila on ilmaistu *ajanhetken funktiona*. Muut yllä luetellut esimerkkifunktiot voidaan ilmaista riippuvuuksina seuraavasti:

- neliön pinta-alan riippuvuus sivun pituudesta
- polynomilausekkeen $x^2 + 2x + 1$ arvon riippuvuus muuttujasta x
- kakun maksimipinta-alan riippuvuus käytettävissä olevasta kakunkuorrutteen määrästä
- opiskelijan veren stressihormonin pitoisuuden riippuvuus tilin saldosta.

Kun funktion arvot tai lähtöarvot kuvaavat konkreettisia suureita, täytyy myös pitää huolta yksiköistä. Tämä voidaan tehdä esimerkiksi sanomalla, että funktio T ilmaisee ulkolämpömittarin arvon Celsius-asteina kunakin ajanhetkenä, joka puolestaan ilmoitetaan sekunteina vuorokauden alusta lukien. Lyhyemmin voidaan myös ilmaista yksiköt esimerkiksi sulkeissa sanomalla, että funktion arvo $T(t)$ (°C) kertoo ulkolämpömittarin lukeman ajanhetkellä t (s).

1.2 Funktion lauseke

Funktio voi kuvata mitä tahansa olemassaolevaa riippuvuutta. Toisinaan tällainen riippuvuus tunnetaan vain mittaustulosten perusteella. Esimerkiksi ulkolämpötila voidaan tarkistaa ainoastaan katsomalla lämpömittarin lukema. Tällä kurssilla kuitenkin keskitytään funktioihin, joiden riippuvuussäännön ilmaisee jokin *laskulauseke*. Vain lausekkeilla ilmaistuja funktioita voidaan käsitellä algebrallisesti eli symbolisesti. Esimerkiksi neliön pinta-alalle sivun pituuden funktiona voidaan kirjoittaa lauseke

$$A(x) = x^2.$$

Lauseke tulkitaan niin, että x kuvaa lähtöarvoa, esimerkiksi sivun pituutta 3, jolloin funktion arvo saadaan sijoittamalla sivun pituus x:n paikalle oikealle puolelle. Pinta-ala sivun pituudella 3, eli funktion arvo $A(3)$, olisi tällöin 3^2 eli 9.

Funktion laskulauseke voidaan ilmaista sanomalla esimerkiksi ”funktio f, jolle pätee $f(x) = x + 2$”. Toisinaan sanotaan myös lyhyemmin ”funktio $f(x) = x + 2$”.

Huomaa, että funktion lausekkeessa käytetty x on vain ”paikanpitäjä”, johon sijoitetaan lähtöarvoja. Tämä kirjain voi olla mikä hyvänsä. Esimerkiksi jos funktio f kuvaa jonkin suureen riippuvuutta ajasta, käytetään yleensä kirjainta t, jolloin funktion arvon määrittelevä lauseke voi olla vaikkapa $f(t) = t^2 + 1$.

Huomaa myös, että laskulausekkeisiin sijoittaminen on ajateltava täysin mekaanisesti (ottamalla kuitenkin laskujärjestys huomioon). Esimerkiksi jos funktio on määritelty lausekkeella $f(x) = \sqrt{x} + 2x$, siihen voidaan sijoittaa lukujen lisäksi mitä tahansa symboleja tai lausekkeita, muistaen kuitenkin lisätä tarvittaessa sulut. Esimerkiksi

$$\begin{aligned} f(\mathring{a}) &= \sqrt{\mathring{a}} + 2\mathring{a} \\ f(\heartsuit) &= \sqrt{\heartsuit} + 2\heartsuit \\ f(y+1) &= \sqrt{y+1} + 2(y+1) = \sqrt{y+1} + 2y + 2 \\ f(4x) &= \sqrt{4x} + 2 \cdot 4x = 2\sqrt{x} + 8x. \end{aligned}$$

Esimerkki 1.1. Funktioita, joiden lauseke on polynomi, kutsutaan *polynomifunktioiksi.* Tällaisia ovat esimerkiksi funktiot

$$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = -x^2 + 4x - 7, \qquad h(x) = x^5 - x^3 + x.$$

Yleisesti polynomifunktio on muotoa

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

missä luvut $a_0, \ldots, a_n$ ovat vakioita. Näitä lukuja sanotaan polynomin *kertoimiksi.* Suurin luku, joka esiintyy x:n eksponenttina, on polynomin *kertaluku* eli *aste.* Myös *vakiofunktio* $f(x) = a$, joka saa kaikilla lähtöarvoilla saman arvon a, on polynomifunktio. Sen aste on nolla.

Polynomifunktiot ovat tietyssä mielessä yksinkertaisimpia funktioita, sillä niiden matemaattiset ominaisuudet tunnetaan hyvin.

Esimerkki 1.2. Funktion arvot voidaan myös ilmoittaa usealla erilaisilla lausekkeella, joita käytetään erityyppisillä lähtöarvoilla. Tällaista määrittelytapaa kutsutaan *paloittain määrittelemiseksi.* Esimerkiksi itseisarvofunktio $f(x) = |x|$ voidaan määritellä seuraavilla lausekkeilla:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Tämä tarkoittaa, että lähtöarvon x ollessa epänegatiivinen käytetään ylempää lauseketta, jolloin funktion arvo on $f(x) = x$. Jos taas x on negatiivinen, käytetään alempaa lauseketta, ja $f(x) = -x$. Esimerkiksi $f(4) = 4$, mutta $f(-1) = -(-1) = 1$.

Jako voi olla monimutkaisempikin, kuten seuraavalla funktiolla:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{kun } x \text{ on jokin muu kokonaisluku kuin } 0 \\ 1, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

1.3 Funktion määriteltävyys

Kun funktioita määritellään, on kiinnitettävä huomiota kahteen seikkaan:

1) funktion tulee liittää jokaiseen lähtöarvoon *täsmälleen yksi* funktion arvo
2) lähtöarvoiksi eivät välttämättä kelpaa kaikki reaaliluvut.

Ensimmäinen kohta antaa rajoituksen sille, mikä ylipäänsä kelpaa funktioksi. Ei esimerkiksi voida määritellä funktiota ehdolla ”funktion arvo $g(x)$ on sellainen luku, joka toiseen korotettuna antaa lähtöarvon x”. Tämä johtuu siitä, että esimerkiksi luvulla $x = 4$ funktion arvoksi tulisi sekä $g(x) = 2$ että $g(x) = -2$, koska kummankin neliö on 4. Tilanne voitaisiin haluttaessa korjata esimerkiksi sanomalla, että funktion arvo on ”sellainen *epänegatiivinen* luku, joka toiseen korotettuna antaa lähtöarvon x”. Tällöin saataisiin tuttu neliöjuurifunktio.

Toinen kohta tulee ilmi esimerkiksi silloin, kun määritellään funktio $f(x) = 1/x$. Koska nollalla ei voi jakaa, nolla ei kelpaa funktion lähtöarvoksi. Tällaisessa tilanteessa on huomioitava funktion *määrittelyjoukko*. Esimerkkifunktion f tapauksessa määrittelyjoukkoon kuuluvat kaikki reaaliluvut nollaa lukuunottamatta.

Esimerkki 1.3. Funktiota, jonka lauseke on kahden polynomin osamäärä, kutsutaan *rationaalifunktioksi*. Rationaalifunktioita ovat esimerkiksi

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-1}, \qquad g(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+1}, \qquad h(x) = \frac{1}{5x^4+x}.$$

Myös polynomifunktiot ovat rationaalifunktioita, sillä nimittäjäpolynomi voi olla vakio. Esimerkiksi $x+2 = \frac{x+2}{1}$. Lisäksi rationaalifunktioiden ja polynomien summat ovat rationaalifunktioita, koska polynomi voidaan laventaa ja lausekkeet yhdistää. Esimerkiksi

$$\frac{x+1}{x-1} + x^2 = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x^2(x-1)}{x-1} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x^3-x^2}{x-1} = \frac{x^3-x^2+x+1}{x-1}.$$

Rationaalifunktioiden matemaattiset ominaisuudet määräytyvät osoittaja- ja nimittäjäpolynomien ominaisuuksista. Rationaalifunktio on määritelty vain niillä lähtöarvoilla, joilla nimittäjäpolynomi ei saa arvoa 0. Tämä johtuu siitä, että nollalla ei voi jakaa. Esimerkiksi rationaalifunktion

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

määrittelyjoukkoon eivät kuulu luvut 1 ja -1. Tällainen määrittelyjoukko voidaan ilmaista *joukkoerotuksen* avulla seuraavasti: $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. Merkintä $A \setminus B$ tarkoittaa jäljelle jääviä lukuja, kun joukosta A poistetaan joukon B sisältämät luvut.

Osoittajapolynomin nollakohdat puolestaan sanelevat sen, milloin rationaalifunktio saa arvon nolla. Osamäärä a/b ei nimittäin voi olla nolla, ellei osoittaja a ole nolla. Esimerkiksi funktion

$$g(x) = \frac{x-2}{x^3+x}$$

arvo on nolla ainoastaan lähtöarvolla $x = 2$.

Funktion määrittelyjoukko on aina ilmaistava funktiota määriteltäessä, varsinkin jos se ei ole koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$. Voidaan joko sanoa suoraan, että funktion f määrittelyjoukko on A, tai voidaan käyttää merkintää[1]

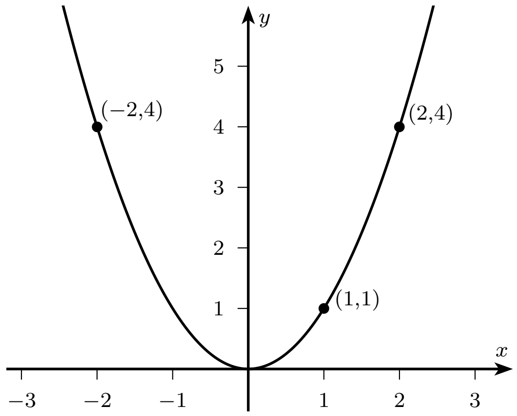
$$f\colon A \to \mathbb{R},$$

missä A on funktion määrittelyjoukko. Funktio voidaan nyt määritellä lyhyesti kirjoittamalla esimerkiksi $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

[1] Yleisempi merkintä on $f\colon A \to B$, missä B on funktion *maalijoukko*. Maalijoukko kuvaa funktion arvojen tyyppiä. Koska tällä kurssilla kaikki funktion arvot ovat reaalilukuja, valitaan aina $B = \mathbb{R}$.

1.4 Kuvaaja

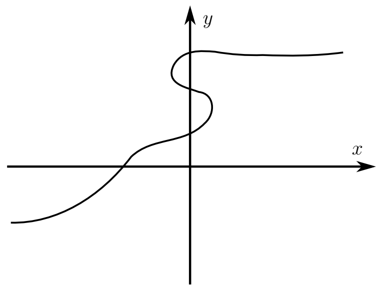
Funktio voidaan esittää visuaalisesti koordinaatistoon piirrettävän *kuvaajan* eli *graafin* avulla. Funktion f kuvaaja on käyrä, jonka jokainen piste on muotoa $(x, f(x))$. Toisin sanoen, piste (x, y) on kuvaajalla täsmälleen silloin, kun $y = f(x)$. Alla on esimerkkinä funktion $f(x) = x^2$ kuvaaja ja muutamia pisteitä kuvaajalla.



Kuvaajan hyöty on siinä, että sen perusteella voidaan saada kuva funktion yleisistä ominaisuuksista tarvitsematta laskea mitään. Kuvaajasta näkyy muun muassa funktion jatkuvuus, kasvu- tai vähenemisnopeus, jaksollisuus, maksimi- ja minimiarvot sekä nollakohtien olemassaolo. On kuitenkin muistettava, että piirros ei koskaan voi olla täysin tarkka, eikä kaikista funktioista edes pystytä piirtämään havainnollistavaa kuvaa. Kuvan perusteella ei siis voi tehdä täsmällisiä päätelmiä funktion arvoista.

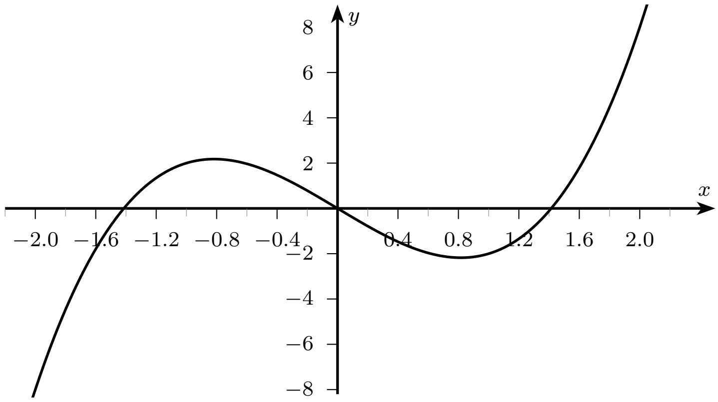
Kuvaajan piirtämiseen voi käyttää graafisia laskimia tai tietokoneohjelmia. Myös internetistä löytyy kuvaajan piirtämiseen hyviä apuneuvoja, joista voidaan mainita esimerkiksi GeoGebra-ohjelmisto (`http://www.geogebra.org`) sekä Wolfram|Alphan matematiikkatyökalut (`http://www.wolframalpha.com`). Kun mitään työkalua ei ole saatavilla, kuvaajaa voi tietysti myös hahmotella laskemalla funktion arvo suurella määrällä mielivaltaisia lähtöarvoja ja piirtämällä syntyvät pisteet koordinaatistoon.

Kaikki koordinaatistoon piirretyt käyrät eivät kuvaa funktioita. Koska funktion arvojen täytyy olla yksikäsitteisiä, kuvaajalla *ei saa olla kahta pistettä, joilla on sama x-koordinaatin arvo mutta eri y-koordinaatin arvo.* Jos siis jokin pystysuora leikkaa kuvaajaksi väitetyn käyrän useammassa kuin yhdessä kohdassa, kyseessä ei ole funktion kuvaaja. Funktion kuvaaja ei esimerkiksi voi "laskostua" seuraavan kuvan tavalla.



Esimerkki 1.4. Seuraavassa kuvassa on polynomifunktion $f(x) = 2x^3 - 4x$ kuvaaja. Kuvaajasta nähdään, että negatiivisilla lähtöluvuilla funktion arvot aluksi suurenevat siirryttäessä vasemmalta oikealle päin. Noin arvosta $x = -0{,}8$ lähtien arvot alkavat pienentyä, kunnes ne jälleen lähtevät nousuun. Kuvan perusteella näyttäisi lisäksi siltä, kuin funktio saisi arvon nolla kohdissa 0, 1,4 ja −1,4, mutta suora lasku osoittaa, että näistä vain 0 on funktion todellinen nollakohta. Esimerkiksi

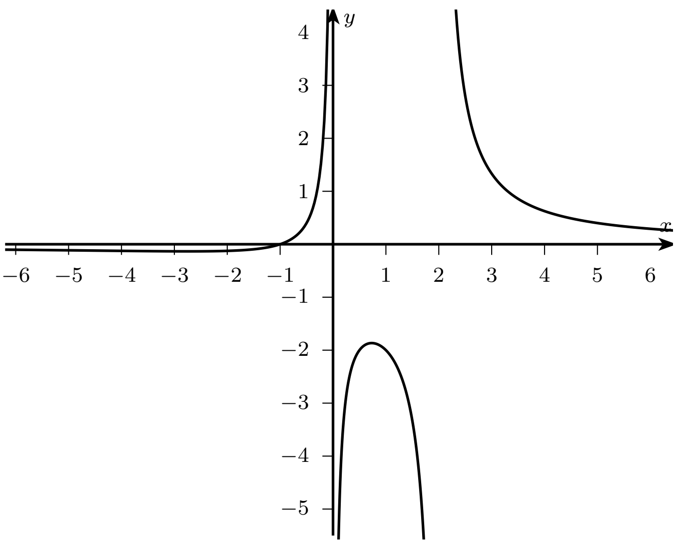
$$f(1{,}4) = 2 \cdot (-1{,}4)^3 - 4 \cdot (-1{,}4) = -5{,}488 + 5{,}6 = -0{,}112.$$



Esimerkki 1.5. Tarkastellaan rationaalifunktiota

$$g\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x+1}{x^2 - 2x}.$$

Funktio ei ole määritelty nimittäjän nollakohdissa, eli kun $x = 0$ tai $x = 2$. Alla olevasta kuvasta nähdään, että g:n kuvaaja katkeaa kohdissa, joissa funktio ei ole määritelty. Esimerkiksi nollan vasemmalla puolella funktio kasvaa nopeasti kohti äärettömyyttä ja nollan oikealla puolella puolestaan nousee negatiivisesta äärettömyydestä palatakseen sinne takaisin ja laskeutuakseen myöhemmin jälleen kuvan yläreunasta. Nähdään myös, että suurilla ja pienillä x:n arvoilla funktion arvot näyttävät lähestyvän nollaa.



Funktion g käyttäytyminen suurilla ja pienillä muuttujan arvoilla voidaan myös selvittää täsmällisesti funktion lausekkeeseen nojautuen. Tämä tehdään supistamalla funktion lauseke sillä nimittäjän termillä, jolla on suurin aste, eli tässä tapauksessa termillä x^2. Jaetaan siis sekä osoittajan että nimittäjän jokainen termi termillä x^2, jolloin funktion lausekkeesta tulee

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2-2x} = \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}.$$

Tästä on se hyöty, että lähtöarvon x kasvaessa suureksi, termit $1/x$, $1/x^2$ ja $-2/x$ lähestyvät kaikki nollaa, sillä niissä kaikissa jaetaan jotain hyvin suurella luvulla. Sama tapahtuu, mikäli x pienenee hyvin pieneksi negatiiviseksi luvuksi. Täten voidaan päätellä

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} \to \frac{0+0}{1-0} = 0, \quad \text{kun } x \to \pm\infty.$$

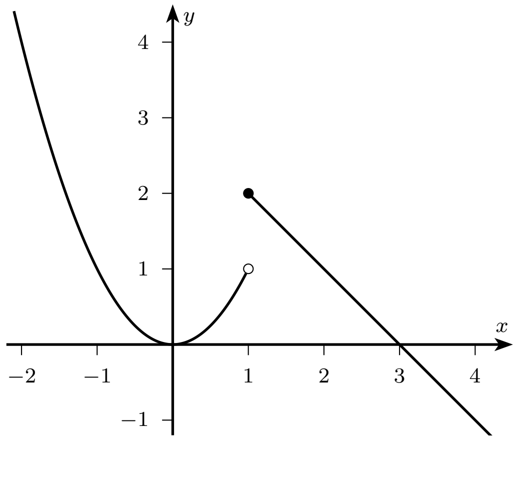
Funktion käyttäytymistä suurilla ja pienillä lähtöarvoilla voidaan merkitä myös lim-merkinnän (lausutaan ”limes”) avulla seuraavasti:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0.$$

Esimerkki 1.6. Tarkastellaan paloittain määriteltyä funktiota

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x < 1 \\ -x+3, & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

Funktion h kuvaaja näkyy seuraavassa kuvassa. Kuvaaja katkeaa kohdassa $x = 1$, jossa funktion määrittelevä lauseke vaihtuu. Luku 1 kuitenkin kuuluu funktion määrittelyjoukkoon, koska siinä voidaan laskea funktion arvo. Tämä arvo on $h(1) = -1 + 3 = 2$, ja kuvaajalle on tapana piirtää täytetty pallukka vastaavaan kohtaan $(1, 2)$. Kuvaajan toiseen osaan piirretään tyhjä pallukka osoittamaan, että käyrän päästä ”puuttuu” piste.



1.5 Yhdistetty funktio

Funktioita voidaan ketjuttaa, jolloin saadaan uusia funktioita. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että yhden funktion saama arvo annetaan toiselle funktiolle lähtöarvoksi. Funktioista f ja g saadaan ketjuttamalla *yhdistetty funktio*, jota merkitään $f \circ g$.

Esimerkki 1.7. Tarkastellaan funktioita $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x + 1$. Lasketaan aluksi yhdistetyn funktion $f \circ g$ arvo luvulla 2. Ensin käytetään funktiota g, jonka arvo lähtöarvolla 2 on 3. Sen jälkeen annetaan saatu tulos funktiolle f lähtöarvoksi, jolloin saadaan funktion arvo $f(3) = 9$. Yhdistetyn funktion $f \circ g$ arvo pisteessä 2 on siis 9.

On hyvin olennaista, miten päin funktiot kirjoitetaan. *Oikealla puolella olevaa käytetään aina ensiksi.* Jos syötetään luku 2 ensin funktioon f, saadaan 4, joka puolestaan syötettynä funktioon g antaa tulokseksi 5. Siispä $(f \circ g)(2) \neq (g \circ f)(2)$.

Edellä lasketut laskut voidaan myös esittää havainnollistaen vaikkapa näin:

$$\begin{aligned} f \circ g &: 2 \xmapsto{g} 3 \xmapsto{f} 9 \\ g \circ f &: 2 \xmapsto{f} 4 \xmapsto{g} 5 \end{aligned}$$

Tärkeätä on muistaa, että yhdistämisjärjestys vaikuttaa yhdistetyn funktion arvoon.

Yhdistetyssä funktiossa $f \circ g$ funktiota g kutsutaan *sisäfunktioksi* ja funktiota f puolestaan *ulkofunktioksi*. Nimitys tulee siitä, että yhdistetyn funktion lauseke saadaan sijoittamalla sisäfunktion g lauseke "sisälle" ulkofunktion f lausekkeeseen. Tämä voidaan esittää kaavana

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Esimerkki 1.8. Tarkastellaan edelleen funktioita $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x + 1$. Yhdistetyn funktion $f \circ g$ laskulauseke muodostetaan sijoittamalla sisäfunktion lauseke $x + 1$ ulkofunktioon muuttujan x paikalle. Tällöin saadaan lauseke

$$f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2.$$

Muilla tavoin yhdistämällä saadaan muun muassa seuraavanlaisia lausekkeita:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1, \\ (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4, \\ (g \circ g)(x) &= g(g(x)) = g(x + 1) = (x + 1) + 1 = x + 2. \end{aligned}$$

Mikään ei estä myöskään yhdistämästä useampia funktioita. Näin saataisiin esimerkiksi funktio

$$(f \circ g \circ f)(x) = f(g(f(x))) = f(g(x^2)) = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2.$$

Yhdistämisjärjestys on useammankin funktion tapauksessa oikealta vasemmalle.

Huomaa, että funktioita yhdistettäessä niiden lausekkeissa olevilla muuttujilla ei ole mitään tekemistä keskenään, vaikka niitä merkittäisiinkin samalla kirjaimella. Jos tässä on sekaannuksen vaara, voi toisen muuttujan paikalle vaihtaa jonkin toisen kirjaimen. Esimerkiksi yllä olevassa esimerkissä voikin kirjoittaa funktiot muodossa $f(y) = y^2$ ja $g(x) = x + 1$ ja yhdistää $f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$.

Tällä kurssilla on usein osattava esittää jokin funktio yksinkertaisemmista funktioista yhdistettynä funktiona. Tällainen pilkkominen voidaan aina tehdä monella eri tavalla.

Esimerkki 1.9. Funktio

$$h(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$$

voidaan ajatella yhdistetyksi funktioksi, jossa ulkofunktio on $f_1(x) = \frac{1}{x}$ ja sisäfunktio on $g_1(x) = (x^2 + 1)^2$. Tällöin nimittäin

$$f_1(g_1(x)) = f_1\big((x^2 + 1)^2\big) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}.$$

Toisaalta voidaan myös valita $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$ ja $g_2(x) = x^2 + 1$, jolloin

$$f_2(g_2(x)) = f_2(x^2 + 1) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}.$$

Vielä eräs tapa olisi valita $f_3(x) = x^2$ ja $g_3(x) = \frac{1}{x^2+1}$, sillä

$$f_3(g_3(x)) = f_3\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) = \left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)^2 = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}.$$

Muitakin tapoja varmasti löytyy.

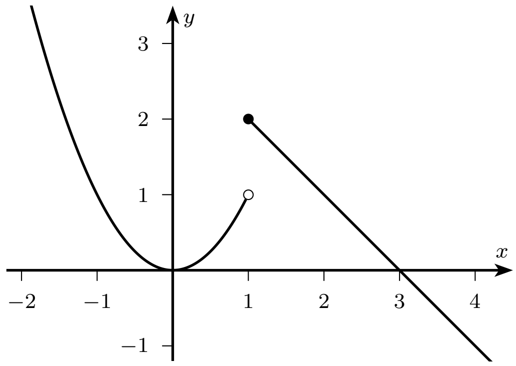
1.6 Funktion jatkuvuus

Monet funktiot ovat sellaisia, että ne muuttuvat tasaisesti lähtöarvojen muuttuessa eivätkä tee hyppäyksiä. Toisin sanoen lähtöarvon muuttuessa hyvin vähän myös funktion arvo muuttuu vain vähän. Tätä ominaisuutta sanotaan *jatkuvuudeksi*. Luonnossa on paljon esimerkkejä jatkuvista funktioista, kuten vaikkapa huoneen keskilämpötila ajan funktiona. Lukuunottamatta hyvin poikkeavia olosuhteita lämpötila ei tee hyppäyksiä ajan kuluessa.

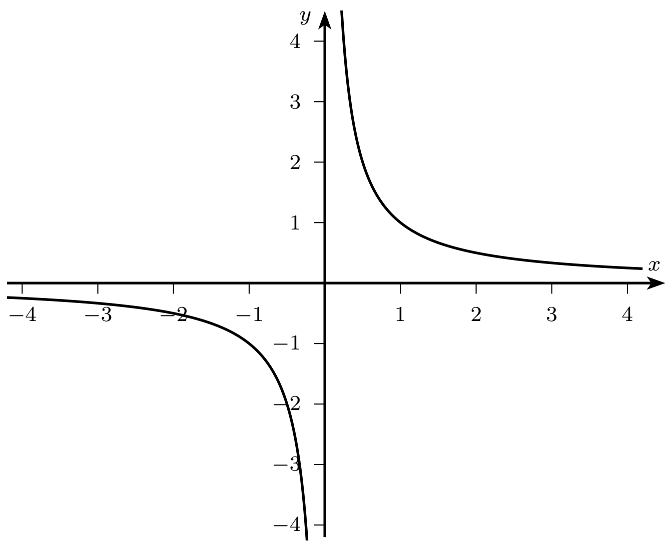
Jatkuvuuden ymmärtää ehkä parhaiten, jos tarkastelee esimerkkiä *epäjatkuvasta* funktiosta. Tällainen syntyy useimmiten silloin, kun funktio määritellään paloittain. Esimerkiksi esimerkissä 1.6 määriteltiin funktio

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x < 1 \\ -x + 3, & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

Funktion h kuvaaja on piirretty uudestaan seuraavaan kuvaan. Nähdään, että kohdassa $x = 1$ kuvaaja katkeaa ja funktion arvot hyppäävät äkisti aivan toiseen kohtaan. Tällainen kohta on funktion *epäjatkuvuuskohta*. Siinä funktiolla on jokin arvo, mutta kohdan välittömässä läheisyydessä jommalla kummalla puolella funktion arvot poikkeavat rajusti kyseisestä arvosta.



Epäjatkuvan funktion tunnistaa useimmin siitä, että sen kuvaaja katkeaa. On kuitenkin huomattava, että kuvaaja voi näyttää katkeavan myös sellaisessa kohdassa, jossa funktiota ei ole lainkaan määritelty. Tällaisessa kohdassahan funktio ei saa mitään arvoa, joten kuvaaja ei voi kulkea kyseisen kohdan läpi. Alla on esimerkkinä funktion $f(x) = 1/x$ kuvaaja.

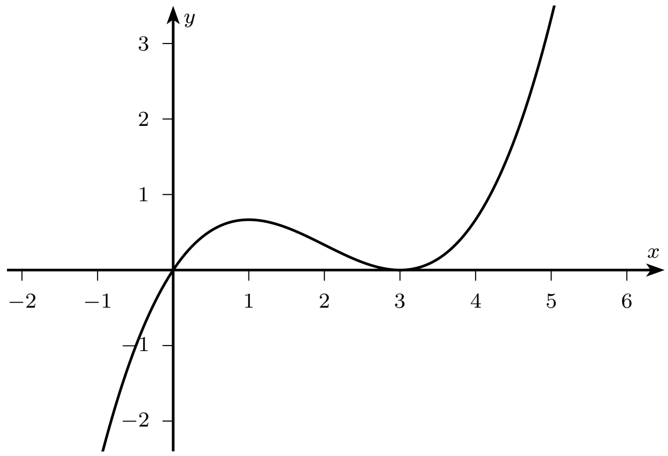


Kohtaa, jossa funktio ei ole määritelty, *ei* kuitenkaan koskaan kutsuta epäjatkuvuuskohdaksi. Se jätetään yksinkertaisesti kokonaan jatkuvuustarkastelun ulkopuolelle. Voidaan vaikkapa ajatella, että siellä missä funktio ei ole määritelty, mitä tahansa voi tapahtua eikä funktiota voi siitä syyttää.

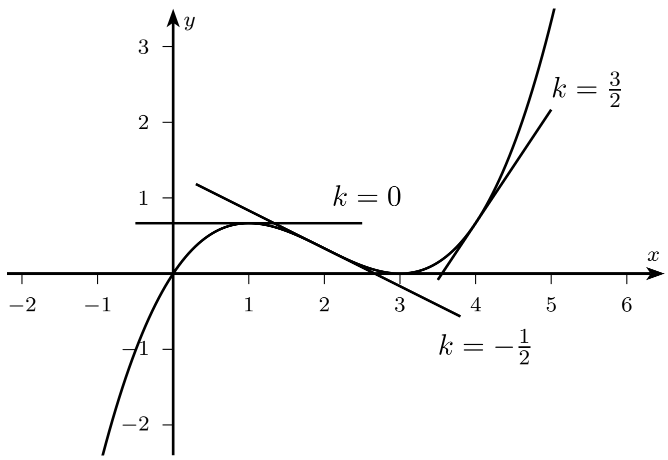
2 Derivaatta

2.1 Funktion kasvun ja vähenemisen tutkiminen

Eräitä kiinnostavimmista asioista funktioita tutkittaessa ovat funktion *kasvavuus* ja *vähenevyys*. Funktio on jollain välillä kasvava, jos suuremmilla lähtöarvoilla saadaan aina suurempia funktion arvoja. Toisin sanoen $f(a) \geq f(b)$ aina kun $a > b$. Vastaavasti funktio on vähenevä, jos suuremmilla lähtöarvoilla tulee aina pienempiä funktion arvoja, eli $f(a) \leq f(b)$ aina kun $a > b$. Esimerkiksi funktio, jonka kuvaaja näkyy alla, on kasvava, kun $x \leq 1$ tai $x \geq 3$, ja vähenevä, kun x on välillä $[1, 3]$.



Kuinka funktion kasvavuutta voidaan tutkia täsmällisesti? Ensin täytyy olla jokin keino mitata kasvamisnopeutta. Jos funktion kuvaaja olisi suora, voitaisiin sanoa, että funktion kasvunopeus on suoran kulmakerroin. Yleisellä funktiolla ei kuitenkaan ole kulmakerrointa. Tällöin tyydytään piirtämään funktion kuvaajalle tutkittavaan pisteeseen *sivuaja* eli suora, joka on tuossa pisteessä kuvaajan suuntainen. Funktion kasvunopeudeksi tutkittavassa pisteessä sovitaan nyt tämän sivuajasuoran kulmakerroin. Oheisessa kuvassa näkyy joitakin funktion kuvaajalle piirrettyjä sivuajia ja niiden kulmakertoimia.



Kun funktion f kuvaajalle piirretään sivuaja pisteeseen $(x, f(x))$, tuon sivuajan kulmakerrointa kutsutaan funktion *derivaataksi pisteessä* x. Derivaattaa pisteessä x merkitään

$$f'(x).$$

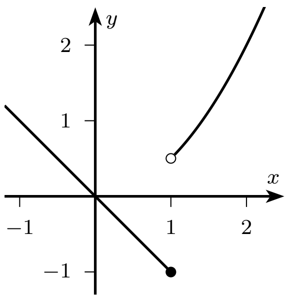
Esimerkiksi edellisen kuvan funktiolle piirrettiin sivuajat pisteisiin $(1, \frac{2}{3})$, $(2, \frac{1}{3})$ ja $(4, \frac{2}{3})$. Kuvan mukaan vastaavat derivaatan arvot ovat $f'(1) = 0$, $f'(2) = -\frac{1}{2}$ ja $f'(4) = \frac{3}{2}$.

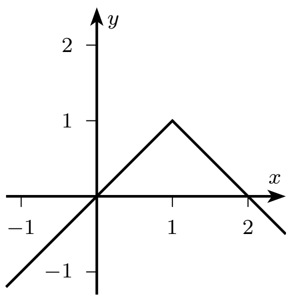
Funktion derivaatta kuvaa funktion hetkellistä kasvunopeutta: mitä suurempi on derivaatan arvo, sitä jyrkempi on sivuajasuora, ja sitä nopeammin funktio näyttää kasvavan. Koska derivaatta kuitenkin lasketaan vain yhdessä pisteessä, siitä ei yksinään voi päätellä kasvua tai vähenemistä, sillä kasvaminen tarkoittaa määritelmän mukaisesti useiden pisteiden välistä tapahtumaa. Yleensä täytyykin tutkia derivaatan arvoja jollakin välillä tai hahmotella funktion kehitystä pisteen ympäristössä jollakin toisella tavalla. Tähän palataan myöhemmin.

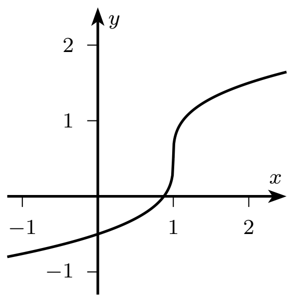
Derivaattaa ei aina voida määrittää. Joissakin pisteissä ei funktion kuvaajalle nimittäin voida piirtää sivuajaa. Tämä voi tapahtua lähinnä kolmessa tapauksessa:

1) funktiolla on epäjatkuvuuskohta kyseisessä pisteessä
2) funktion kuvaajalla on terävä ”kärki” kyseisessä pisteessä
3) funktion kuvaaja nousee hetkellisesti pystyyn.

Kahdessa ensimmäisessä tapauksessa ei sivuajaa voida lainkaan järkevästi piirtää. Viimeisessä tapauksessa sivuaja olisi pystysuora, mutta pystysuoralla suoralla ei ole kulmakerrointa. Kaikista tapauksista on esimerkkikuvat alla.







2.2 Derivaatan laskeminen, osa I

Derivaatan määritteleminen kuvaajan avulla ei riitä kovin pitkälle, sillä sivuajan piirtäminen on melko epätäsmällistä. Derivaatta voidaan kuitenkin laskea myös funktion lausekkeesta. Tarvittavien laskukaavojen perustelemiseen käytettäisiin raja-arvoja, mutta tällä kurssilla nämä perustelut ohitetaan ja riittää osata soveltaa valmiiksi annettuja kaavoja.

Aloitetaan laskukaavojen opettelu yksinkertaisista perussäännöistä. Lausekkeen derivointia merkitään kirjaimella D. Esimerkiksi lausekkeen x^2 derivaattaa merkitään $D\,x^2$. Ensimmäiset säännöt koskevat potenssin ja vakiofunktion derivointia sekä lausekkeiden summaa ja vakiolla kertomista.

- $D\,x^k = kx^{k-1}$, kun k on jokin reaaliluku
- $D\,a = 0$, kun a on jokin vakio
- $D\big(f(x) \pm g(x)\big) = D\,f(x) \pm D\,g(x)$
- $D\big(af(x)\big) = a \cdot D\,f(x)$, kun a on jokin vakiokerroin

Esimerkit valaisevat parhaiten sääntöjen soveltamista.

Esimerkki 2.1. Polynomifunktion lauseke on summa x:n potensseista joillakin vakiokertoimilla kerrottuina. Edellä on esitetty derivointisäännöt potensseille, summille ja vakiokertoimille, joten polynomin derivoimisen ei pitäisi tuottaa ongelmia. Tarkastellaan esimerkiksi yksinkertaista lauseketta $3x^2 - 4x$. Lausekkeessa esiintyvät potenssitermit x^2 ja x derivoidaan vastaavan säännön mukaan seuraavasti (huomaa, että $x = x^1$):

$$D\,x^2 = 2x^1 = 2x,$$
$$D\,x = 1x^0 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Koko lauseke derivoidaan nyt välivaiheineen seuraavasti:

$$D(3x^2 - 4x) = D(3x^2) - D(4x) = 3 \cdot D\,x^2 - 4 \cdot D\,x = 3 \cdot 2x - 4 \cdot 1 = 6x - 4.$$

Alla on derivoitu muutamia polynomilausekkeita hieman vähemmillä välivaiheilla:

$$D(-x^3 + 5x) = -D\,x^3 + 5 \cdot D\,x = -3x^2 + 5 \cdot 1 = -3x^2 + 5,$$
$$D(-3x^5 + x^4) = -3 \cdot D\,x^5 + D\,x^4 = -3 \cdot 5x^4 + 4x^3 = -15x^4 + 4x^3,$$
$$D(4x^8 + 11) = 4 \cdot D\,x^8 + D\,11 = 4 \cdot 8x^7 + 0 = 32x^7.$$

Viimeisessä kohdassa käytettiin vakion derivoimissääntöä $D\,a = 0$. Tätä ei pidä sekoittaa vakio*kertoimen* derivoimissääntöön, jonka mukaan vakiokerroin säilyy derivoitaessa sellaisenaan, esimerkiksi $D(ax) = a \cdot D\,x = a \cdot 1 = a$.

Esimerkki 2.2. Potenssin derivoimissääntö ei rajoitu pelkästään niihin tapauksiin, missä eksponentti on positiivinen kokonaisluku, vaan sitä voidaan soveltaa myös negatiivisiin ja murtolukueksponentteihin. Esimerkiksi murtolauseke $1/x^2$ voidaan kirjoittaa myös muodossa x^{-2}, jolloin siihen voidaan soveltaa potenssin derivointisääntöä. Näin saadaan

$$D\left(\frac{1}{x^2}\right) = D\,x^{-2} = -2 \cdot x^{-3} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

Täytyy vain muistaa, että eksponentti todellakin *pienenee yhdellä.* Tällöin positiivisesta luvusta 2 tulisi 1, mutta negatiivisesta luvusta -2 tuleekin -3.

Murtopotenssiksi muuntaminen on ainoa tapa neliö- ja muiden juurten derivointiin. Esimerkkinä neliöjuuren derivoiminen:

$$D(\sqrt{x}) = D\,x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Myös vakion derivointisääntö voidaan johtaa potenssin derivoinnista, kun muistetaan, että $1 = x^0$. Tällöin nimittäin vakiolle a pätee $a = a \cdot 1 = a \cdot x^0$, ja saadaan

$$D\,a = D(a \cdot x^0) = a \cdot D\,x^0 = a \cdot 0x^{-1} = a \cdot 0 = 0.$$

Kätevintä on kuitenkin vain muistaa, että vakion derivaatta on aina 0.

Kun osataan derivoida erilaisia lausekkeita, funktioiden derivaatat löytyvät helposti. Esimerkiksi polynomifunktion

$$f(x) = 3x^2 - 4x$$

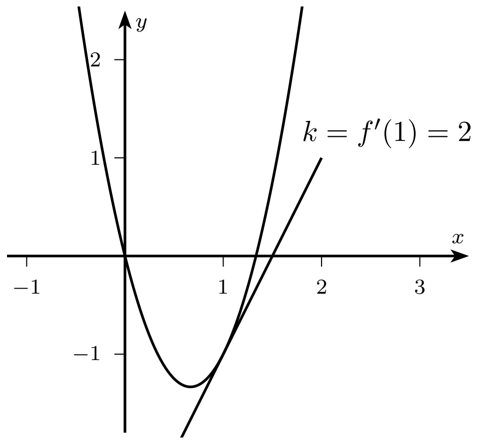
derivaatan arvo pisteessä x saadaan derivoimalla funktion lauseke. Tämä tehtiin esimerkissä 2.2, ja tuloksena oli $6x - 4$. Funktion f derivaatta pisteessä x on siis

$$f'(x) = 6x - 4.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että esimerkiksi funktion f kuvaajalle pisteeseen kohtaan $x = 1$ piirretyn sivuajan kulmakerroin on

$$f'(1) = 6 \cdot 1 - 4 = 2.$$

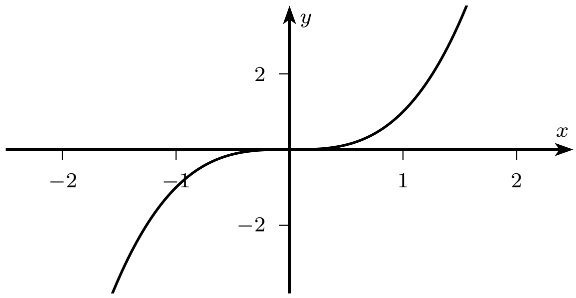
Alla on vielä kuva tilanteesta.



2.3 Derivaatan sovelluksia

Kuten jo luvun alussa mainittiin, derivaattaa voi käyttää funktion kasvun ja vähenemisen tutkimiseen ja mittaamiseen. Mikäli funktion derivaatta jossain pisteessä on positiivinen, funktio on hetkellisesti kasvava tuossa pisteessä, ja mikäli derivaatta on negatiivinen, funktio on vähenevä. Siellä, missä derivaatta on nolla, funktion kasvu on hetkellisesti pysähtynyt.

Mainitun kaltainen tarkastelu ei kuitenkaan ole aivan riittävää. Katsotaan esimerkiksi funktiota $f(x) = x^3$, jonka kuvaaja on piirretty seuraavaan kuvaan. Funktion derivaatan lauseke on $f'(x) = 3x^2$, ja kohdassa $x = 0$ derivaatta on $f'(0) = 0$. Funktion kasvu on siis hetkellisesti pysähtynyt, mutta funktio on silti koko ajan aidosti kasvava. Toisin sanoen jos $x > y$ millä tahansa lähtöarvoilla x ja y, niin $f(x) > f(y)$. Kasvun hetkellinen pysähtyminen ei siis oikeastaan vaikuta kasvuun mitenkään.



Tarkempaa tietoa kasvavuudesta ja vähenevyydestä saadaan, kun tutkitaan derivaatan arvoja laajemmilla väleillä. Seuraava sääntö on niin tärkeä, että puemme sen lauseen muotoon.

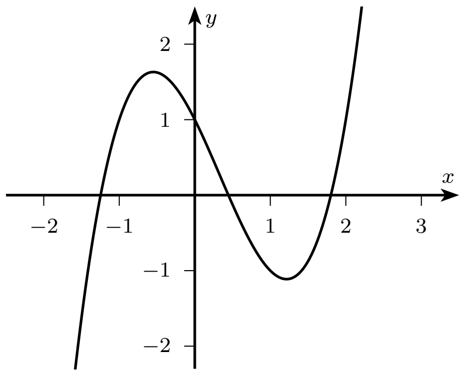
Lause 2.3. *Oletetaan, että funktio f on määritelty vähintään avoimella välillä $]a, b[$ (voi olla myös rajoittamaton väli, vaikka koko $\mathbb{R}$) ja että sillä on derivaatta kaikissa välin $]a, b[$ pisteissä.*

- *Jos $f'(x) > 0$ kaikilla $]a, b[$, niin f on aidosti kasvava koko välillä $]a, b[$.*
- *Jos $f'(x) < 0$ kaikilla $]a, b[$, niin f on aidosti vähenevä koko välillä $]a, b[$.*

Lisäksi edellisten kohtien tilanne ei muutu, vaikka $f'(x)$ olisi 0 välin $]a, b[$ yksittäisissä pisteissä.

”Aidosti” kasvava tarkoittaa, että jos $x > y$, niin $f(x) > f(y)$ eikä funktio voi olla edes väliaikaisesti vakio. Lisähuomautus yksittäisistä pisteistä viittaa sen kaltaiseen tilanteeseen, kuin mitä tarkasteltiin edellä: vaikka funktion $f(x) = x^3$ derivaatta saa yksittäisessä pisteessä $x = 0$ arvon nolla, ei funktion kasvavuus muutu. Tarkastellaan erästä toista esimerkkiä hieman yksityiskohtaisemmin.

Esimerkki 2.4. Määritellään polynomifunktio $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$. Sen kuvaaja on piirretty alla olevaan kuvaan. Tutkitaan derivaatan avulla tarkasti, milloin funktio f on kasvava ja milloin vähenevä.



Polynomilausekkeiden derivointisääntöjen mukaan saadaan funktion derivaataksi

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 2.$$

Tämä lauseke kertoo derivaatan arvon (eli funktion hetkellisen kasvunopeuden) riippuvuuden lähtöarvosta x. Se määrittelee siis itsekin erään funktion, ns. *derivaattafunktion.*

Jotta voitaisiin selvittää funktion f kasvavuus, on edellä olevan lauseen mukaan tutkittava derivaatan etumerkkiä. Käytetään apuna tuttua jatkuviin funktioihin liittyvää sääntöä:

> Jatkuvan funktion arvojen etumerkki voi vaihtua vain funktion nollakohdissa tai siellä, missä funktio ei ole määritelty.

Koska derivaattafunktio $f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$ on polynomifunktio, se on määritelty kaikkialla ja lisäksi jatkuva. Derivaatan etumerkki voi siis vaihtua vain derivaatan nollakohdissa.

Selvitetään ensin derivaattafunktion nollakohdat toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla:

$$
\begin{aligned}
&3x^2 - 2x - 2 = 0 \\
&x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} \\
&x = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3} \\
&x \approx 1{,}215 \quad \text{tai} \quad x \approx -0{,}549.
\end{aligned}
$$

Laaditaan sitten derivaatan merkkikaavio. Koska derivaatan merkki voi vaihtua vain derivaatan nollakohdissa, riittää tarkistaa merkki näiden nollakohtien välissä vaikkapa laskimella. Esimerkiksi

$$f'(-1) = 3 \quad (+), \qquad f'(0) = -2 \quad (-) \qquad \text{ja} \qquad f'(2) = 6 \quad (+).$$

Näin saadaan seuraavan näköinen kaavio:

x	$x < -0{,}549$	$-0{,}549 < x < 1{,}215$	$x > 1{,}215$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

Derivaatan etumerkki nollakohtien eri puolilla olisi voitu päätellä myös siitä, että derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Derivaatan merkkikaaviosta nähdään, että derivaatta on positiivinen, kun $x < -0{,}549$ tai $x > 1{,}215$, ja negatiivinen, kun x on välillä $]-0{,}549, 1{,}215[$. Käyttämällä lausetta 2.3 voidaan derivaatan merkkikaavio täydentää alkuperäisen funktion kulkukaavioksi:

x	$x < -0{,}549$	$-0{,}549 < x < 1{,}215$	$x > 1{,}215$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Kulkukaaviossa nuolet osoittavat funktion kulkusuunnan.

Nyt on selvitetty tarkasti, milloin funktio $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ on kasvava ja milloin vähenevä. Kerrataan vielä lyhyesti tarkastelun vaiheet:

1. Etsitään derivaattafunktio f'.
2. Määritetään derivaattafunktion f' nollakohdat.
3. Laaditaan derivaattafunktion merkkikaavio määrittämällä derivaatan etumerkki nollakohtien välissä.
4. Täydennetään merkkikaavio funktion f kulkukaavioksi.

Derivaatan avulla voidaan selvittää myös funktion pienin ja suurin arvo. Sellaisessa kohdassa, jossa funktion kasvaminen vaihtuu vähenemiseksi tai päinvastoin, kasvu pysähtyy hetkellisesti ja derivaatta on nolla. Tällaisessa kohdassa funktiolla on niin sanottu *paikallinen ääriarvo*, joko *minimi* tai *maksimi*. Funktion suurin arvo voi löytyä tällaisesta maksimikohdasta. Toinen mahdollisuus on, että suurin arvo löytyy määrittelyvälin päätepisteestä. Vastaava pätee pienimmälle arvolle. Toisaalta esimerkiksi funktiolla $f(x) = x^3$ ei ole lainkaan suurinta eikä pienintä arvoa.

Esimerkki 2.5. Jatketaan edellisen esimerkin funktion $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ tarkastelua. Sovitaan kuitenkin tällä kertaa, että funktio on määritelty vain välillä $[0, 5]$. Tuolla välillä funktion kulkukaavio on seuraavanlainen (kopioituna edellisestä esimerkistä):

x	$0 < x < 1{,}215$	$1{,}215 < x < 5$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Vain yksi derivaattafunktion nollakohta osuu määrittelyvälille, nimittäin $x = 1{,}215$. Koska funktio on tuon kohdan edellä vähenevä ja sen jälkeen kasvava, kyseessä on minimikohta. Lisäksi nähdään, että kyseisessä kohdassa funktio myös saa pienimmän arvonsa, koska funktio ei enää käänny laskevaksi määrittelyalueellaan eikä siksi voi saavuttaa pienempiä arvoja. Tuo pienin arvo on $f(1{,}215) \approx -1{,}1$.

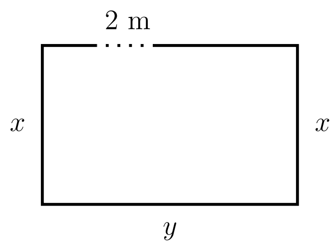
Kulkukaavion perusteella funktio f kasvaa määrittelyvälin päätepisteitä kohti. Koska väli on suljettu, päätepisteet ovat mukana tarkastelussa, ja funktio saavuttaa suurimman arvonsa jommassakummassa päätepisteessä. Kokeillaan kumpi funktion arvo on suurempi:

$$f(0) = 1 \qquad \text{ja} \qquad f(5) = 91.$$

Selvästi jälkimmäinen arvo on suurempi. Funktion suurin arvo on siis $f(5) = 91$.

Suurimman ja pienimmän arvon löytäminen on erityisen tärkeää seuraavan esimerkin kaltaisissa *optimointitehtävissä*.

Esimerkki 2.6. Halutaan rakentaa suorakulmion muotoinen aitaus. Aitatarpeita riittää yhteensä 150 metrin pituiseen aitaan, mutta aitauksen yhdelle sivulle on tarkoitus jättää 2 metrin levyinen aukko. Tilanne on siis seuraavan kuvan mukainen.



Halutaan löytää sellaisen aitauksen mitat, jonka pinta-ala on suurin mahdollinen. Tämä ongelma ratkeaa muodostamalla funktio, joka kuvaa aitauksen pinta-alaa, sekä etsimällä derivaatan avulla funktion suurin arvo.

Aloitetaan valitsemalla suure, josta pinta-ala riippuu. Suorakulmion pinta-ala lasketaan kaavalla $A = xy$, kun käytetään oheisen kuvan merkintöjä. Sivujen mitat x ja y eivät kuitenkaan ole toisistaan riippumattomia, sillä aidan kokonaispituus on rajoitettu: mikäli pituutta x kasvatetaan, pituus y vähenee, ja päinvastoin. Tarkemmin sanottuna rajoittava ehto on

$$2x + 2y - 2 = 150.$$

Tästä yhtälöstä voidaan ratkaista y, jos x oletetaan tunnetuksi:

$$\begin{aligned} 2y &= 150 - 2x + 2 \\ 2y &= 152 - 2x \\ y &= 76 - x. \end{aligned}$$

Nyt tiedetään, että jos aitauksen yhden sivun pituus on x, tällöin toisen sivun pituus on $y = 76 - x$. Voidaan siis muodostaa pinta-alaa kuvaava funktio

$$A(x) = x \cdot (76 - x) = 76x - x^2 = -x^2 + 76x.$$

Selvitetään funktion A määrittelyjoukko. Voidaan ajatella, että pahimmassa tapauksessa x voi olla 0, jolloin aitauksella ei ole pinta-alaa. Toinen ääritapaus olisi se, jossa $y = 0$ eli $x = 76$. Myöskään tällöin aitauksella ei ole pinta-alaa, vaikka kaikki aitamateriaali on käytössä. Määrittelyjoukoksi voidaan siis valita suljettu väli $[0, 76]$. Tämän välin luvut kuvaavat sivun pituuden x mahdollisia arvoja.

Kun tutkittavalle funktiolle on löydetty lauseke, lasketaan funktion derivaatta:

$$A'(x) = -2x + 76.$$

Derivaattafunktiolla on yksi nollakohta, ja se on $x = 38$. Koska derivaattafunktion kuvaaja on laskeva suora, derivaatan arvot ovat positiivisia nollakohdan vasemmalla puolella ja negatiivisia oikealla. Näin voidaan muodostaa derivaatan merkkikaavio. (Voitaisiin myös tutkia derivaatan arvoja kokeilupisteissä nollakohdan eri puolilla.) Täydennetään merkkikaavio saman tien funktion A kulkukaavioksi:

x	$0 < x < 38$	$38 < x < 76$
$A'(x)$	$+$	$-$
$A(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Kulkukaaviosta nähdään, että kohdassa $x = 38$ on funktion A maksimikohta ja samalla sen suurin arvo. Suurin aitaus saadaan siis, kun sivun pituus x on 38. Tällöin toinen sivun pituus on $y = 76 - 38 = 38$, eli aitaus on neliön muotoinen. Sen pinta-ala on $A(38) = 38^2 = 1444$ (m^2).

2.4 Derivaatan laskeminen, osa II

Tähän mennessä opittujen laskusääntöjen avulla pystytään derivoimaan polynomifunktioita sekä hyvin yksinkertaisia rationaali- ja juurifunktioita. Seuraavaksi opetellaan funktioiden tulon ja osamäärän sekä yhdistettyjen funktioiden derivointisäännöt. Näiden avulla voidaan derivoida kaikki rationaalifunktiot sekä suuri joukko sellaisia funktioita, jotka voidaan tulkita yhdistetyiksi funktioiksi.

- $D\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $D\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
- $D\big(f(g(x))\big) = f'(g(x))g'(x)$

Aloitetaan tutkimalla rationaalifunktion derivoimista.

Esimerkki 2.7. Tarkastellaan rationaalifunktiota

$$h\colon \mathbb{R} \setminus \{2, -2\} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{3x+1}{x^2-4}.$$

Rationaalifunktion lauseke on kahden polynomin osamäärä. Merkitään osoittajapolynomia $f(x) = 3x + 1$ ja nimittäjäpolynomia $g(x) = x^2 - 4x$. Lausekkeiden osamäärän derivointisäännön nojalla derivaataksi tulee

$$h'(x) = D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \tag{1}$$

Lasketaan derivaatta vaiheittain. Ensinnäkin osoittajan derivaatta on

$$f'(x) = D(3x+1) = 3$$

ja nimittäjän derivaatta on

$$g'(x) = D(x^2-4) = 2x.$$

Nyt voidaan koota osamäärän derivaatta sijoittamalla $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ ja $g'(x)$ kaavaan (1):

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{3 \cdot (x^2-4) - (3x+1) \cdot 2x}{(x^2-4)^2} \\ &= \frac{3x^2 - 12 - 6x^2 - 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-3x^2 - 2x - 12}{(x^2-4)^2}. \end{aligned}$$

Rationaalifunktioita derivoitaessa ei nimittäjän lauseketta kannata yleensä kertoa auki.

Katsotaan seuraavaksi, miten yhdistetty funktio derivoidaan.

Esimerkki 2.8. Tarkastellaan funktiota $k(x) = (x^2 - 1)^9$. Tämä funktio voitaisiin derivoida kertomalla se auki, mutta kertolasku olisi hyvin työläs. Päästään helpommalla, kun tulkitaan lauseke yhdistetyn funktion lausekkeeksi.

Valitaan sisäfunktioksi $g(x) = x^2 - 1$ ja ulkofunktioksi $f(x) = x^9$. Tällöin pätee $k(x) = f(g(x))$, joten $k'(x) = D(f(g(x)))$. Voidaan siis käyttää yhdistetyn funktion derivointisääntöä. Sitä varten derivoidaan ensin valmiiksi ulko- ja sisäfunktiot:

$$f'(x) = 9x^8 \qquad \text{ja} \qquad g'(x) = 2x.$$

Nyt yhdistetyn funktion derivoimissäännön mukaan pätee

$$\begin{aligned} k'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\ &= f'(x^2 - 1) \cdot 2x \\ &= 9(x^2 - 1)^8 \cdot 2x \\ &= 18x(x^2 - 1)^8. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.9. Yhdistettyä funktiota derivoitaessa ideana on, että derivoidaan ensin ulkofunktio ja pidetään sisäfunktio paikallaan, ja sen jälkeen kerrotaan saatu lauseke sisäfunktion derivaatalla. Toisena esimerkkinä voitaisiin ottaa juurifunktio $p(x) = \sqrt{2x - 1}$. Tätä ei osata lainkaan derivoida ilman yhdistetyn funktion sääntöä. Nyt sisäfunktioksi valitaan $g(x) = 2x - 1$ ja ulkofunktioksi $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$. Yhdistetyn funktion sekä potenssin derivointisääntöjen mukaan saadaan

$$p'(x) = D\Big((\underbrace{2x - 1}_{g(x)})^{1/2}\Big) = \frac{1}{2}(\underbrace{2x - 1}_{g(x)})^{-1/2} \cdot \underbrace{2}_{g'(x)} = (2x - 1)^{-1/2}.$$

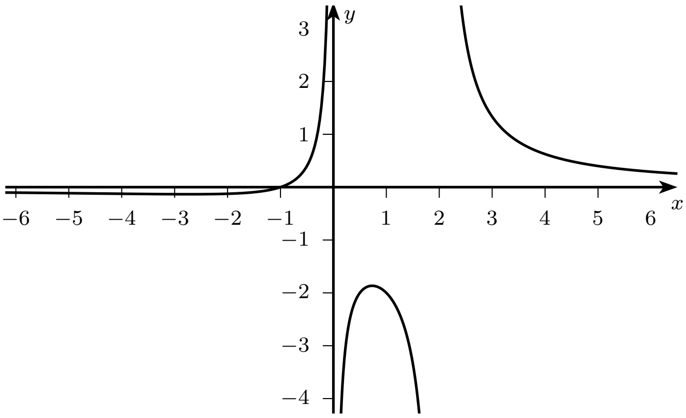
Vastaus voidaan vielä haluttaessa muuttaa muotoon $p'(x) = 1/\sqrt{2x - 1}$.

Tarkastellaan viimeisenä esimerkkinä rationaalifunktion kasvamisen tutkimista.

Esimerkki 2.10. Palataan vielä kerran esimerkin 1.5 funktioon

$$h\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 2x}.$$

Tämän funktion kuvaaja näkyy oheisessa kuvassa. Olemme todenneet, että funktio h ei ole määritelty lähtöarvoilla 0 ja 2. Tutkitaan nyt derivaatan avulla funktion kasvuominaisuuksia.



Derivoidaan funktio h osamäärän derivointisäännön mukaan. Osoittaja on $f(x) = x+1$ ja nimittäjä on $g(x) = x^2 - 2x$. Saadaan

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\
&= \frac{1 \cdot (x^2 - 2x) - (x+1) \cdot (2x-2)}{(x^2 - 2x)^2} \\
&= \frac{(x^2 - 2x) - (2x^2 - 2x + 2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} \\
&= \frac{x^2 - 2x - 2x^2 + 2}{(x^2 - 2x)^2} \\
&= \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 2x)^2}.
\end{aligned}$$

Selvitetään seuraavaksi derivaatan etumerkki. Derivaatan nollakohdat ovat samat kuin derivaatan osoittajan nollakohdat:

$$\begin{aligned}
&-x^2 - 2x + 2 = 0 \\
&x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} \\
&x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{-2} = -\frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3} \\
&x = 0{,}732 \quad \text{tai} \quad x = -2{,}732.
\end{aligned}$$

Derivaatan merkkikaaviota varten on nyt otettava huomioon myös kohdat, joissa derivaatta h ei ole määritelty. Nämä ovat samat kohdat kuin missä funktio ei ole määritelty, eli lähtöarvot $x = 0$ ja $x = 2$. Näissä kohdissa derivaatan merkki voi muuttua. Derivaatan merkki on siis tarkistettava kullakin osaväleistä

$$]-\infty, -2{,}732[, \quad]-2{,}732, 0[, \quad]0, 0{,}732[, \quad]0{,}732, 2[\quad \text{ja} \quad]2, \infty[.$$

Lasketaan esimerkiksi arvot

$$h'(-3) \approx -4{,}4, \quad h'(-1) \approx 0{,}3, \quad h'(0{,}5) \approx 1{,}3, \quad h'(1) = -1 \quad \text{ja} \quad h'(3) \approx -1{,}4.$$

Nyt voidaan laatia funktion h kulkukaavio:

x	$x < -2{,}732$	$-2{,}732 < x < 0$	$0 < x < 0{,}732$	$0{,}732 < x < 2$	$x > 2$
$h'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$h(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Kulkukaavio kertoo, että funktio h on kasvava väleillä $]-2{,}732, 0[$ ja $]0, 0{,}732[$, muulloin h on vähenevä. Tämän vahvistaa käsityksen, joka saatiin aiemmin h:n kuvaajasta.

3 Jatkuvan funktion integraali

Derivaatalle käänteistä käsitettä kutsutaan *integraaliksi.* Aloitetaan integraaliin tutustuminen esimerkillä.

Esimerkki 3.1. Tuotantolaitoksessa on tapahtunut kemikaalivuoto. Määritellään funktio V siten, että $V(t)$ on vuotaneen kemikaalin määrä litroina ajanhetkellä t (yksikkönä kuluneet tunnit vuodon alusta lukien).

Funktion derivaatta kertoo sen muutosnopeuden. Tässä tapauksessa derivaattafunktio V' kertoo siis kemikaalin vuotonopeuden, ja sen yksikkönä on l/h, litroja tunnissa. Jos vuotaneen kemikaalin määrää kuvaava funktio on esimerkiksi $V(t) = 2t$, vuotonopeus on $V'(t) = 2$ litraa tunnissa eli vuoto on tasaista.

Jos vuoto on tasaista ja tiedämme vuotonopeuden, voimme toisaalta myös päätellä vuotaneen kemikaalin määrän. Jos vuotonopeus $V'(t)$ on 2 litraa tunnissa, tiedämme esimerkiksi että kymmenessä tunnissa ainetta ehtii vuotaa $2 \cdot 10 = 20$ litraa. Jos vuotonopeus sen sijaan ei ole tasainen, tilanne on monimutkaisempi.

Vuotaneen kemikaalin määrän selvittäminen vuotonopeuden perusteella on esimerkki operaatiosta, jotka kutsutaan matematiikassa *integroimiseksi.* Integroiminen on derivoinnille käänteinen toimitus: jos tunnemme vuotonopeuden V' lausekkeen, saamme vuotaneen määrän selville, jos pystymme selvittämään, minkä funktion derivaatta V' on. Tämä on yleensä hankalampaa kuin funktion V derivoiminen.

3.1 Integraalin määritelmä

Funktio F on funktion f *integraalifunktio*, jos f on funktion F derivaattafunktio. Funktion f integraalifunktion lauseketta merkitään

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tässä merkinnässä $\int$ kuvaa integrointia ja lopussa oleva $\mathrm{d}x$ kertoo sen, minkä muuttujan suhteen funktion lauseke on kirjoitettu. Voitaisiin myös kirjoittaa esimerkiksi $\int f(y)\,\mathrm{d}y$.

Integraalifunktion määritelmä voidaan nyt kirjoittaa lyhyesti näin:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{jos} \qquad F'(x) = f(x).$$

Esimerkki 3.2. Etsitään polynomifunktion $f(x) = x^4+2x$ eräs integraalifunktio. Termi $2x$ on tullut derivoitaessa vastaan monta kertaa, ja siksi muistetaankin, että $D\,x^2 = 2x$. Täten termistä $2x$ tulee integroituna x^2.

Termi x^4 on hankalampi. Koska potenssitermejä derivoitaessa potenssi pienenee yhdellä, pitäisi integroitaessa potenssin vastaavasti kasvaa. Kuitenkaan integroitu termi ei ole suoraan x^5, sillä $D\,x^5 = 5x^4$. Asia kuitenkin korjaantuu lisäämällä eteen vakiokerroin. Vakiokertoimet eivät muutu derivoitaessa, joten ne eivät muutu myöskään integroitaessa. Osoittautuu, että sopiva vakiokerroin on $\frac{1}{5}$. Tämä nimittäin kumoaa derivoinnissa syntyvän kertoimen 5:

$$D\left(\frac{1}{5}x^5\right) = \frac{1}{5} \cdot D\,x^5 = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 = x^4.$$

Yhteensä on siis päätelty, että funktion f eräs integraalifunktio on $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + x^2$.

Toisin kuin funktion derivaattafunktio, funktion integraalifunktio ei ole yksikäsitteinen, vaan jokaisella funktiolla on monta eri integraalifunktiota. Tämä johtuu siitä, että kaikki vakiotermit häviävät derivoitaessa. Integroitaessa derivoitua funktiota ei siis voida tietää, oliko alkuperäisessä funktiossa jokin vakiotermi mukana ja mikä se mahdollisesti oli. Tämän vuoksi täytyy integraalifunktioon lisätä ns. *integroimisvakio*. Yleensä käytetään kirjainta C, mutta kirjaimen valinnalla ei tietenkään ole matemaattista merkitystä.

Esimerkki 3.3. Edellisen esimerkin tilanteessa integraalifunktioksi olisi voitu valita myöskin $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + x^2 + 1$, sillä

$$F'(x) = D\left(\frac{1}{5}x^5 + x^2 + 1\right) = x^4 + 2x + 0 = x^4 + 2x = f(x).$$

Vakiotermin 1 paikalla voisi yhtä hyvin olla mikä tahansa muukin luku. Tämän vuoksi integraalifunktion lauseketta merkitään seuraavasti:

$$\int x^4 + 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 + x^2 + C.$$

Vakiotermi C kuvaa sitä, että integraalifunktioon voi lisätä minkä tahansa vakion.

3.2 Integraalin soveltaminen

Integraalia voidaan soveltaa luvun alun esimerkin kaltaisiin tilanteisiin, joissa funktion muutosnopeus eli derivaattafunktio tunnetaan, ja halutaan tuntea funktion kuvaaman suureen *kertymä*. Tällöin on ensin pääteltävä alkuperäinen funktio derivaattafunktiosta ja sen jälkeen laskettava, kuinka paljon funktion arvot ovat yhteensä muuttuneet.

Esimerkki 3.4. Palataan luvun alun esimerkkiin 3.1. Oletetaan, että on jotenkin päätelty vuotonopeuden kasvavan tasaisesti ja noudattavan funktiota $f(t) = \frac{1}{5}t$, missä t on aika tunteina vuodon alusta lukien ja funktion arvot ilmoitetaan litroina tunnissa. Tehtävänä on laskea, kuinka paljon ainetta vuotaa tuntien 5 ja 7 välillä vuodon alusta lukien.

Ensinnäkin on pääteltävä, minkälainen funktio kuvaa vuodon määrää. Vuotonopeus on vuodon määrän derivaatta, joten vuodon määrä on vuotonopeuden integraali. Etsitään siis funktiota F, jonka derivaattafunktio olisi f. Tällainen löytyy melko helposti päättelemällä:

$$F(t) = \int \frac{1}{5}t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{10}t^2 + C.$$

Derivoimalla voidaan tarkistaa, että $F'(t) = \frac{1}{10} \cdot 2t = \frac{1}{5}t$. (Myöhemmin tutkitaan, miten integraaleja voi laskea integroimiskaavoista.)

Integraalifunktion lausekkeessa esiintyvä integroimisvakio C kuvaa tässä esimerkissä sitä, kuinka paljon ainetta oli vuotanut ajanhetkellä 0, sillä

$$F(0) = \frac{1}{10} \cdot 0^2 + C = 0 + C = C.$$

Voimme siis ajatella, että $C = 0$ (litraa). Toisaalta C ei tule vaikuttamaan tehtävän ratkaisuun, joten voimme myös olla välittämättä siitä.

Integraalifunktion arvo $F(t)$ kuvaa nyt sitä, kuinka paljon ainetta on vuotanut ajanhetkellä t. Tehtävän vastaus, eli vuotaneen aineen määrä, saadaan sijoittamalla annetun ajanjakson alku- ja loppuhetket integraalifunktion lausekkeeseen ja laskemalla erotus. Näin saadaan

$$F(7) - F(5) = \left(\frac{1}{10} \cdot 7^2 + C\right) - \left(\frac{1}{10} \cdot 5^2 + C\right) = 4{,}9 + C - 2{,}5 - C = 2{,}4 \text{ (litraa)}.$$

Kuten huomataan, integroimisvakiot supistuvat pois lopullisesta vastauksesta, joten niitä ei tarvitsisi ottaa huomioon.

Jos F on funktion f integraalifunktio, halutaan usein laskea arvoja $F(b) - F(a)$, missä a ja b ovat joitakin lähtöarvoja. Kuten edellisessä esimerkissä nähtiin, tällainen erotus kuvaa kertymää esimerkiksi ajanhetkien a ja b välillä. Kyseistä erotusta kutsutaan funktion f *(määrätyksi) integraaliksi välillä* $[a, b]$ ja sitä merkitään

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Määrättyä integraalia laskettaessa on siis ensin laskettava funktion f integraalifunktio, ja sitten sijoitettava siihen annetut ylä- ja alarajat.

Myös välivaiheelle, jossa on määritetty integraalifunktio, mutta sijoitus on vielä tekemättä, on oma merkintänsä. Voidaan laskea esimerkiksi

$$\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x = \Big/_0^1 x^2 = 1^2 - 0^2 = 1.$$

Tässä on siis ensin integroitu lauseke $2x$ lausekkeeksi x^2 (jolloin integroimissymboli $\int$ ”oikenee” ja dx häviää) ja sen jälkeen sijoitettu ylä- ja alarajat 1 ja 0. Integroimisvakiota ei tarvitse ottaa lukuun, koska se supistuisi joka tapauksessa pois erotusta laskettaessa.

3.3 Integraalin laskeminen

Integraalifunktion laskeminen funktion lausekkeesta perustuu siihen, että päätellään, minkä funktion derivaatalla on kyseinen lauseke. Esimerkiksi potenssilauseke derivoidaan ottamalla eksponentti kertoimeksi ja vähentämällä eksponenttia yhdellä. Potenssilausekkeen integrointi tapahtuu siis vastaavasti lisäämällä eksponenttiin yksi ja jakamalla syntyneellä eksponentilla. Samalla tavalla vakiota integroitaessa on lisättävä x, joka derivoitaessa katoaisi. Näin saadaan seuraavat kaavat.

- $\displaystyle\int a \,\mathrm{d}x = ax + C, \quad$ kun a on mikä tahansa reaaliluku
- $\displaystyle\int x^k \,\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad$ kun $k \neq -1$

Yllä olevassa potenssilausekkeen integroimiskaavassa oikeanpuoleinen lauseke voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\frac{1}{k+1} x^{k+1} + C.$$

Huomautus $k \neq -1$ on tarpeellinen, sillä muuten jaettaisiin nollalla. Tarkastellaan esimerkkiä.

Esimerkki 3.5. Integroidaan polynomi $x^3 - 5x^2 + 6$. Koska derivointi voidaan suorittaa termi kerrallaan, voidaan myös integrointi tehdä tällä tavoin vaiheittain. Potenssin integroimiskaavan nojalla

$$\int x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4.$$

(Lisäämme integroimisvakion C vasta lopulliseen lausekkeeseen.) Tulos on helppo tarkistaa derivoimalla:

$$D\left(\frac{1}{4}x^4\right) = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3.$$

Koska vakiokertoimet eivät muutu derivoitaessa, eivät ne muutu myöskään integroitaessa. Täten termi $5x^2$ voidaan integroida seuraavasti:

$$\int 5x^2 \,\mathrm{d}x = 5 \cdot \int x^2 \,\mathrm{d}x = 5 \cdot \frac{1}{3}x^3 = \frac{5}{3}x^3.$$

Vakiotermi voidaan ajatella nollannen asteen potenssitermiksi:

$$\int 6 \,\mathrm{d}x = \int 6x^0 \,\mathrm{d}x = 6 \cdot \frac{1}{1}x^1 = 6x.$$

Toinen vaihtoehto on vain muistaa, että vakion a integraali on aina ax. Kun edellisten vaiheiden laskut kootaan yhteen, saadaan koko integraalifunktioksi

$$\int x^3 - 5x^2 + 6 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 6x + C.$$

Nyt ei sovi unohtaa integroimisvakiota.

Esimerkki 3.6. Myös negatiiviset ja murtopotenssit voidaan integroida potenssin integroimiskaavalla. Esimerkiksi

$$\int \frac{1}{x^3} \,\mathrm{d}x = \int x^{-3} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + C = -\frac{1}{2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

Ainoastaan potenssia x^{-1} ei voida integroida näin, koska jakajaksi tulisi nolla. *Erityisesti emme voi integroida lauseketta*

$$\frac{1}{x}$$

potenssilausekkeen integroimissäännöllä, koska $\frac{1}{x} = x^{-1}$. Kyseinen lauseke opitaan integroimaan myöhemmin logaritmien avulla.

Potenssilausekkeen integroiminen ei ole vaikeaa, mutta yleisessä tapauksessa lausekkeen integroiminen on paljon hankalampaa kuin sen derivoiminen. Periaatteessa mistä tahansa derivointikaavasta voitaisiin tietysti johtaa vastaava integroimiskaava kääntämällä se toisin päin, mutta tällaiset kaavat eivät ole yleensä käyttökelpoisia. Esimerkiksi rationaalifunktion derivoimiskaava johtaa niin monimutkaiseen lausekkeeseen, että vastaava integroimiskaava ei olisi enää hyödyllinen.

On kuitenkin syytä mainita yhdistetyn funktion derivoimiskaavasta saatava integroimiskaava. Sitä voidaan nimittää yhdistetyn funktion integroimiskaavaksi, vaikka sillä ei voidakaan integroida mitä tahansa yhdistettyjä funktioita. Kaava on esitetty alla.

- $\displaystyle\int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + C$

Kaava perustuu suoraan yhdistetyn funktion derivoimiskaavaan. Yhdistettyjä funktioita derivoitaessa lauseke on kerrottava lopuksi sisäfunktion derivaatalla. Vastaavasti integroitavassa lausekkeessa *on oltava sisäfunktion derivaatta valmiina*. Integrointia suoritettaessa se sitten häviää jäljettömiin.

Esimerkki 3.7. Etsitään funktion $h(x) = 2x(x^2 - 1)^9$ integraalifunktio. Funktion h lausekkeessa on yhdistetyn funktion lauseke, jonka kertoimena on lisäksi $2x$. Yritetään soveltaa yhdistetyn funktion integroimiskaavaa.

Jotta kaavaa voitaisiin soveltaa, on valittava, mitä kaavassa esiintyvät f', g ja g' ovat. On luonnollista valita $g(x) = x^2 - 1$ ja $f'(x) = x^9$, koska tällöin

$$f'(g(x)) = (x^2 - 1)^9.$$

Integroimiskaavassa esiintyy lisäksi sisäfunktion derivaatta $2x$. Koska olemme valinneet, että $g(x) = x^2 - 1$, näemme, että $g'(x) = 2x$. Kaava sopii siis tilanteeseen täydellisesti, ja voidaan kirjoittaa

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int (x^2 - 1)^9 \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + C.$$

On enää selvitettävä, mikä f on. Koska $f'(x) = x^9$, näemme potenssin integroimissäännöstä, että $f(x) = \frac{1}{10}x^{10}$. Täten

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + C = \frac{1}{10}(x^2 - 1)^{10} + C.$$

Esimerkki 3.8. Edellisen esimerkin tavoin voidaan integroida myös samankaltainen funktio $k(x) = x^2(x^3+1)^{12}$. Nyt valittaisiin $g(x) = x^3 + 1$ ja $f'(x) = x^{12}$. Funktion k lausekkeessa on kuitenkin tällä kertaa kertoimena x^2, kun taas $g'(x) = 3x^2$. Ongelma saadaan ratkaistua kertomalla ja jakamalla lauseke samalla vakiolla 3. Näin saadaan

$$\int k(x)\,\mathrm{d}x = \int (x^3+1)^{12} \cdot x^2\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3} \cdot (x^3+1)^{12} \cdot 3x^2\,\mathrm{d}x.$$

Vakiokerroin $\frac{1}{3}$ ei muutu integroitaessa, ja toisaalta lausekkeeseen on saatu sisäfunktion derivaatta $g'(x) = 3x^2$. Voidaan siis integroida säännön mukaisesti:

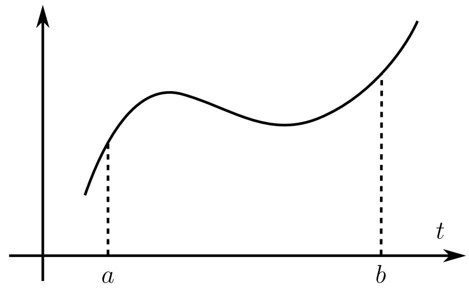
$$\int \frac{1}{3} \cdot (x^3+1)^{12} \cdot 3x^2\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3} \cdot f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot f(g(x)) + C.$$

Kun vielä todetaan, että $f(x) = \frac{1}{13}x^{13}$, saadaan lopulta

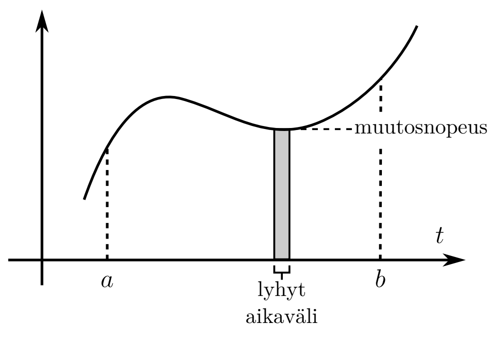
$$\int k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot f(g(x)) + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{13}(x^3+1)^{13} + C = \frac{1}{39}(x^3+1)^{13} + C.$$

3.4 Integraalin tulkinta kuvaajassa

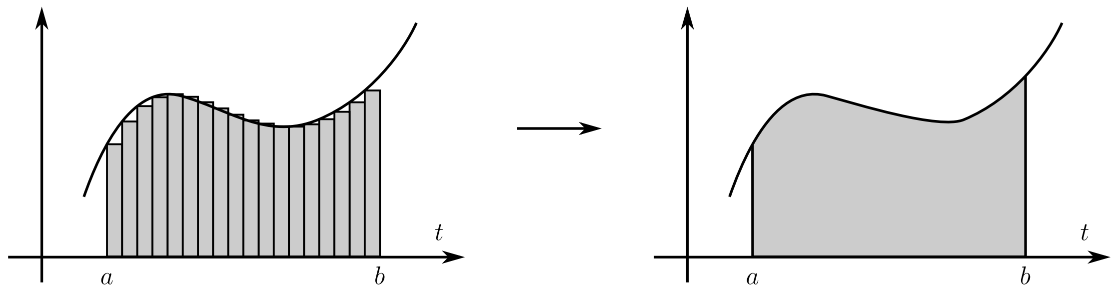
Oheisessa kuvassa on erään jatkuvan funktion kuvaaja. Oletetaan, että tämä funktio kuvaa jonkin suureen muutosnopeutta ajan suhteen, ja yritetään sen avulla selvittää suureen kertymä aikavälillä $[a, b]$.



Ongelma ratkeaa seuraavasti. Hyvin pienellä aikavälillä voidaan olettaa, että funktion arvo, eli suureen muutosnopeus, ei ehdi muuttua paljonkaan. (Tähän vaaditaan funktion jatkuvuutta.) Voidaan siis arvioida, että tällä lyhyellä aikavälillä muutosnopeus on vakio, jolloin kertymä on suoraan muutoksen nopeus kertaa aikavälin pituus. Tämä vastaa seuraavan kuvan mukaisen suorakaiteen pinta-alaa.



Jaetaan nyt koko tarkasteltava aikaväli pieniin osaväleihin, joilla jokaisella muutosnopeuden oletetaan olevan vakio. Näin saadaan suureen kokonaiskertymäksi seuraavaan kuvaan piirrettyjen suorakulmioiden yhteispinta-ala. Kun osavälien pituus lähestyy nollaa, suorakulmioiden pinta-ala lähestyy puolestaan kuvaajan alle jäävän alueen pinta-alaa.

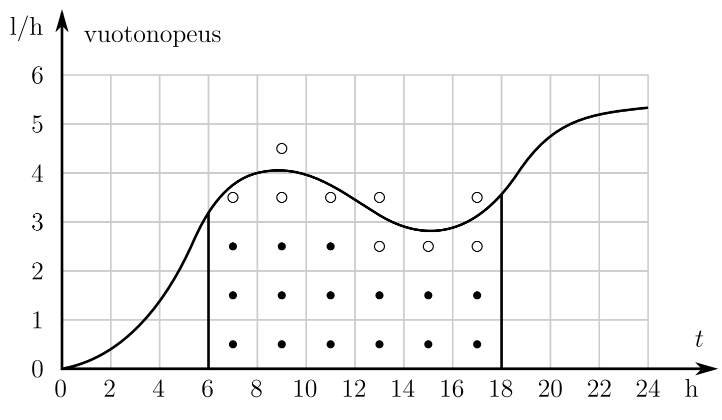


Näin on päätelty seuraava tulos:

> Jatkuvan positiivisen funktion integraali välillä $[a, b]$ vastaa funktion kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa kyseisellä välillä.

Positiivinen funktio on sellainen, joka saa pelkästään positiivisia arvoja. Vastaava tulos pätisi myös negatiiviselle funktiolle, eli sellaiselle, joka saa koko ajan negatiivisia arvoja. Tällöin kuitenkin integraalin tulos on negatiivinen, vaikka pinta-ala tietysti on positiivinen. Integraalilla ja pinta-alalla on kuitenkin sama lukuarvo (eli itseisarvo). Jos funktio saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, kummatkin on käsiteltävä erikseen.

Esimerkki 3.9. Pinta-alatulkinta mahdollistaa integraalin arvon arvioimisen kuvaajan perusteella. Tarkastellaan vielä esimerkin 3.1 tapaista kemikaalivuotoa. Oletetaan, että mittaustulosten perusteella vuotonopeus vaihteli ensimmäisen vuorokauden aikana suunnilleen seuraavan kuvaajan mukaisesti. Tehtävänä on arvioida vuodon määrä (eli kertymä) aikavälillä 6–18 tuntia vuodon alkamisesta.



Olisi vaikeaa keksiä sellaisen funktion lauseke, jonka kuvaaja vastaisi tilannetta, joten myös integraalifunktion lauseke jää hämärän peittoon. Kuvan perusteella voimme kuitenkin suoraan arvioida integraalin suuruutta.

Integraalin suuruus välillä $[6, 18]$ vastaa pinta-alaa, joka jää tuolla välillä kuvaajan ja x-akselin väliin. (Tässä tapauksessa x-akseli kuvaa aikaa, joten voitaisiin oikeastaan puhua t-akselista.) Kuvasta arvioituna tuolle välille jää 15 kokonaista ruutua (kuvassa täytetyt pallot) ja 9 osittaista ruutua (tyhjät pallot). Jos arvioidaan kaikki osittaiset ruudut puolikkaina, saadaan pinta-alaksi suunnilleen $15 + 9/2 \approx 20$ ruutua. Jokaisen ruudun vaakasivu puolestaan vastaa kahta tuntia aika-asteikolla ja pystysivu taas litraa tunnissa. Yhden ruudun pinta-ala on siis $2 \text{ h} \cdot 1 \text{ l/h} = 2 \text{ l}$. Yhteensä pinta-alaksi saadaan arvioitua 20 kertaa 2 litraa eli 40 litraa.

Integraalin arviota voitaisiin tietysti parantaa paljon, jos pinta-ala arvioitaisiin tarkemmin. Käytännössä tällaisissa tilanteissa käytetään apuna tietokonetta, joka pystyy arvioimaan pinta-alan hyvinkin tarkasti.

4 Joitain erityisfunktioita

Tässä luvussa tutustutaan joihinkin luonnontieteissä tarpeellisiin funktioihin. Aluksi esitellään funktioiden matemaattiset ominaisuudet ja sen jälkeen tarkastellaan esimerkkejä niiden käytöstä.

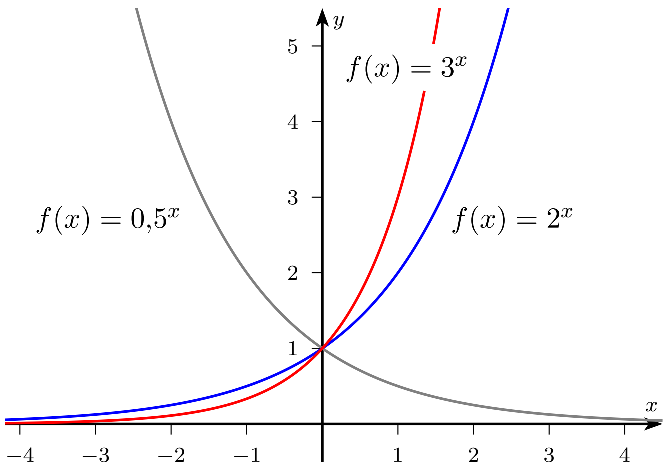
4.1 Eksponenttifunktiot

Potenssifunktioksi kutsutaan sellaista funktiota, jossa lähtöarvo korotetaan johonkin vakiopotenssiin. Esimerkiksi $f(x) = x^2$ on potenssifunktio. Kun jokin vakio korotetaan lähtöarvon ilmaisemaan potenssiin, puhutaan *eksponenttifunktiosta*. Eksponenttifunktioita ovat esimerkiksi

$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x, \quad h(x) = 10^x.$$

Kuhunkin eksponenttifunktioon liittyy vakio, joka korotetaan potenssiin. Tätä lukua nimitetään *kantaluvuksi*. Kantaluku on aina positiivinen, koska negatiivisia lukuja ei voi korottaa mihin tahansa potenssiin. Eksponenttifunktiota, jonka kantaluku on a, nimitetään *a-kantaiseksi* eksponenttifunktioksi.

Jokainen eksponenttifunktio on määritelty ja jatkuva kaikilla reaaliluvuilla. Eksponenttifunktioiden arvot ovat lisäksi aina positiivisia, joten eksponenttifunktioilla ei ole nollakohtia. Eksponenttifunktioiden kasvavuus riippuu kantaluvusta: jos kantaluku on suurempi kuin 1, eksponenttifunktio on kaikkialla aidosti kasvava, ja jos kantaluku on pienempi kuin 1, eksponenttifunktio on aidosti vähenevä. Seuraavaan kuvaan on piirretty eksponenttifunktioiden kuvaajia eri kantaluvuilla.



Eksponenttifunktioita käsiteltäessä potenssien laskusäännöt ovat käyttökelpoisia. Ainakin seuraavat on syytä palauttaa mieleen:

1) $a^{x+y} = a^x a^y$

2) $(a^x)^y = a^{xy}$

3) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

4) $a^0 = 1.$

Koska $a^0 = 1$ kaikilla nollasta poikkeavilla luvuilla a, tiedetään, että jokaisen eksponenttifunktion arvo lähtöarvolla 0 on 1. Tämä nähtiin myös edellä esitetyistä kuvaajista.

Luonnollinen eksponenttifunktio

Kun kantaluvuksi valitaan ns. *Neperin luku* e, jonka likiarvo on 2,71828..., saadaan aivan erityinen eksponenttifunktio, jota nimitetään *luonnolliseksi* eksponenttifunktioksi. Sen lauseke on siis

$$f(x) = e^x.$$

Koska e on ykköstä suurempi, luonnollinen eksponenttifunktio on kasvava. Toisinaan luonnolliselle eksponenttifunktiolle käytetään myös erityismerkintää exp. Tällöin kirjoitettaisiin

$$f(x) = \exp x \quad \text{tai} \quad f(x) = \exp(x).$$

Esimerkiksi laskimissa ja tietokoneohjelmissa merkintä $\exp(x)$ on yleinen. Se siis tarkoittaa aivan samaa kuin e^x eli luku 2,71828... korotettuna potenssiin x.

Luonnollisen eksponenttifunktion tärkein ominaisuus on, että sen derivaattafunktio on sama kuin funktio itse. Toisin sanoen

$$D\, e^x = e^x.$$

Myöhemmin nähdään, miten tämä ominaisuus liittyy niin sanottuun eksponentiaaliseen kasvuun. Koska eksponenttifunktio ei muutu derivoitaessa, ei se muutu myöskään integroitaessa:

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C.$$

Integroimisvakio on toki lisättävä.

Esimerkki 4.1. Luonnollinen eksponenttifunktio esiintyy usein yhdistetyssä muodossa, jossa eksponentissa on jonkin toisen funktion lauseke. Tarkastellaan esimerkiksi funktiota

$$h(x) = e^{2x+1}.$$

Tässä sisäfunktiona on $g(x) = 2x + 1$ ja ulkofunktiona eksponenttifunktio $f(x) = e^x$. Tällainen funktio on suoraviivaista derivoida yhdistetyn funktion derivoimissäännöllä. Sisäfunktion derivaatta on $g'(x) = 2$ ja ulkofunktion $f'(x) = e^x$, joten

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(2x + 1) \cdot g'(x) = e^{2x+1} \cdot 2 = 2e^{2x+1}.$$

Eksponenttifunktioiden yhteydessä myös tulon derivointikaavasta on todellista hyötyä. Esimerkiksi funktio $k(x) = x^2 e^x$ on tulo potenssifunktiosta $f(x) = x^2$ ja eksponenttifunktiosta $g(x) = e^x$. Tulon derivoimissäännön nojalla saadaan

$$k'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 2xe^x + x^2 e^x.$$

Huomaa, miten luonnollinen eksponenttifunktio ei tosiaan muutu derivoitaessa miksikään.

Esimerkki 4.2. Eksponenttifunktion yhdistelmien integrointi toisinaan onnistuu, toisinaan ei. Esimerkiksi funktion $h(x) = e^{3x}$ tyyppiset funktiot, joissa eksponenttiin on yhdistetty jokin ensimmäisen asteen polynomifunktio, voidaan aina integroida yhdistetyn funktion integroimissäännöllä. Sisäfunktioksi valitaan $g(x) = 3x$ ja ulkofunktioksi $f(x) = e^x$. Sisäfunktion derivaatta olisi $g'(x) = 3$. Koska sisäfunktion derivaatta on vakio, se voidaan järjestää lausekkeeseen kertomalla ja jakamalla luvulla 3. Tällöin päästään käyttämään yhdistetyn funktion integroimissääntöä. Lasku etenee seuraavasti:

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{3}\cdot e^{3x}\cdot 3\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3}\cdot f'(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}f'(g(x)) + C = \frac{1}{3}e^{3x} + C.\end{aligned}$$

Lopputulosta tarkasteltaessa huomataan, että luonnollinen eksponenttifunktio ei muuttunut integroitaessa mihinkään, ei myöskään sen sisäfunktio. Eteen vain ilmestyi sisäfunktion derivaatan käänteisluku. Integroimisvakiota ei myöskään ole syytä unohtaa.

4.2 Logaritmifunktiot

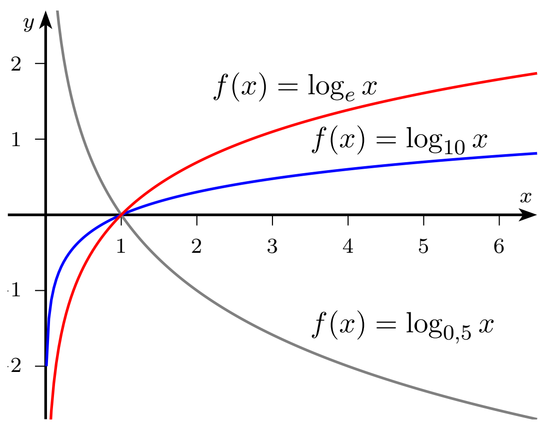
Luvun logaritmi jonkin kantaluvun suhteen kertoo sen, mihin potenssiin kantaluku tulisi korottaa, jotta tuloksena olisi kyseinen luku. Esimerkiksi 2-kantainen logaritmi luvusta 8 on 3, sillä $2^3 = 8$. Tätä logaritmia merkitään $\log_2 8$. Totesimme siis juuri, että $\log_2 8 = 3$.

Sellaista funktiota, jonka arvot ovat logaritmeja kantaluvun a suhteen, nimitetään a-kantaiseksi *logaritmifunktioksi*. Esimerkiksi funktio

$$f(x) = \log_2 x$$

on 2-kantainen logaritmifunktio.

Logaritmifunktiot on määritelty ainoastaan positiivisilla lähtöarvoilla. Ne ovat kaikkialla jatkuvia, ja niiden kasvavuus riippuu kantaluvusta samalla tavoin kuin eksponenttifunktioilla: jos kantaluku on suurempi kuin 1, logaritmifunktio on kasvava, ja jos kantaluku on pienempi kuin 1, logaritmifunktio on vähenevä. Jokainen logaritmifunktio saa lähtöarvolla 1 arvon nolla, ja tämä on logaritmifunktion ainoa nollakohta. Seuraavassa kuvassa on logaritmifunktioiden kuvaajia eri kantaluvun arvoilla.



Logaritmi palauttaa aina kantaluvun eksponentin: jos $2^x = 5$, niin $\log_2 5 = x$. Täten logaritmeja voidaan käyttää ratkaistaessa eksponenttifunktion lähtöarvoja samaan tapaan kuin juuria käytetään ratkaistaessa potenssifunktioiden lähtöarvoja. Logaritmifunktiota kutsutaankin eksponenttifunktion *käänteisfunktioksi*.

Esimerkki 4.3. Selvitetään, milloin funktio $f(x) = 3^{x+2}$ saa arvon 60. Tätä varten on ratkaistava yhtälö

$$3^{x+2} = 60.$$

Logaritmin määritelmän mukaan 3-kantainen logaritmi luvusta 60 kertoo eksponentin, johon korotettuna luvusta 3 tulee 60. Kun tätä sovelletaan yllä olevaan yhtälöön, saadaan

$$\log_3 60 = x + 2,$$

josta edelleen $x = \log_3 60 - 2 \approx 1{,}73$ (likiarvo laskettu laskimella).

Sama toimii myös toisinpäin: jos etsitään logaritmifunktion lähtöarvoja, voidaan turvautua eksponenttifunktioon. Tarkastellaan esimerkiksi yhtälöä

$$\log_2 x = 7.$$

Logaritmin määritelmän nojalla 2-kantainen logaritmi luvusta x kertoo, mihin potenssiin luku 2 on korotettava, jotta saataisiin x. Yhtälöön sovellettuna tämä tarkoittaa, että

$$2^7 = x.$$

Siispä $x = 2^7 = 128$.

Logaritmeja käsiteltäessä on hyötyä logaritmien laskusäännöistä. Ne on mahdollista johtaa vastaavista eksponenttien laskusäännöistä. Huomionarvoisia ovat erityisesti seuraavat:

$$\begin{array}{llll} 1) & \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y & 3) & \log_a(1/x) = -\log_a x \\ 2) & \log_a x^y = y \log_a x & 4) & \log_a 1 = 0. \end{array}$$

Joidenkin kantalukujen tapauksissa on tapana käyttää omaa merkintää. Esimerkiksi

$$\log_{10} x = \lg x \quad \text{ja} \quad \log_e x = \ln x.$$

Usein näkee myös käytettävän merkintää log ilman kantalukua. Tällöin tarkoitetaan yleensä joko 10-kantaista tai e-kantaista logaritmia.

Luonnollinen logaritmi

Erikantaisista logaritmeista matematiikassa tärkein on e-kantainen eli *luonnollinen* logaritmi. Sille käytetään yleensä merkintää ln (tai joskus log). Luonnollinen logaritmifunktio on luonnollisen eksponenttifunktion käänteisfunktio.

Luonnollisen logaritmifunktion derivaatalle pätee

$$D \ln x = \frac{1}{x}.$$

Tämä derivointikaava mahdollistaa lopultakin lausekkeen $1/x$ eli x^{-1} integroimisen. On kuitenkin huomattava, että edellisen kaavan sekä yhdistetyn funktion derivointisäännön nojalla pätee

$$D \ln(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Tämän vuoksi funktion $f(x) = 1/x$ integraalifunktiolla on kaksi mahdollisuutta: joko $\ln x + C$ tai $\ln(-x) + C$. Se, kumpi valitaan, selviää asiayhteydestä. Integroimiskaavassa molemmat vaihtoehdot voidaan ottaa huomioon käyttämällä itseisarvomerkkejä:

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C.$$

Esimerkki 4.4. Integroidaan funktiota $f(x) = \frac{1}{x}$ välillä $[1, e]$. Funktion f integraalifunktio on $\ln|x|$. (Integroimisvakiota ei nyt tarvitse huomioida, koska kyse on määrätystä integraalista.) Koska integroimisvälillä kaikki lähtöarvot ovat positiivia, integraalifunktio on itse asiassa $\ln x$. Täten

$$\int_1^e \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \Big/_1^e \ln x = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Integroidaan sitten samaa funktiota välillä $[-2, -1]$. Koska nyt lähtöarvot ovat negatiivisia, oikea integraalifunktio on $\ln(-x)$. Siispä

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \Big/_{-2}^{-1} \ln(-x) = \ln 1 - \ln 2 = 0 - \ln 2 = -\ln 2.$$

Entä jos integroimisväli olisi sellainen, joka sisältää sekä positiivisia että negatiivisia lukuja? Tällöin väli sisältäisi myös luvun 0, mutta siinä ei olisi järkeä, sillä funktio f ei ole määritelty nollassa. Kyseistä tapausta ei siis esiinny, joten integraalifunktio voidaan aina valita joko positiivisten tai negatiivisten lähtöarvojen mukaan.

4.3 Kantaluvun vaihtaminen

Toisinaan on samassa tilanteessa käsiteltävä useita eksponentti- tai logaritmifunktioita, joilla voi olla eri kantaluvut. Myös esimerkiksi laskimissa on yleensä oma näppäimensä vain muutamalle eri logaritmifunktiolle. Sen vuoksi on hyvä tietää, miten eksponentti- ja logaritmifunktioiden kantalukuja voidaan muuttaa.

Tarkastellaan ensiksi eksponenttifunktiota ja oletetaan, että halutaan ilmaista funktio $f(x) = 2^x$ luonnollisen eli e-kantaisen eksponenttifunktion avulla. Tässä käytetään hyväksi potenssin potenssin kaavaa, jonka mukaan

$$(e^k)^x = e^{kx}.$$

Jos nyt löydettäisiin sellainen luku k, jolle pätee $e^k = 2$, saataisiin edellisen kaavan perusteella yhtälö

$$e^{kx} = (e^k)^x = 2^x.$$

Tähän kysymykseen vastaa logaritmi: luku k, jolle pätee $e^k = 2$, on luvun 2 e-kantainen logaritmi eli $\ln 2$. Lopulta saadaan siis

$$f(x) = 2^x = e^{kx} = e^{(\ln 2)x}.$$

Olemme siis ilmaisseet 2-kantaisen eksponenttifunktion e-kantaisen eksponenttifunktion avulla.

Esimerkki 4.5. Derivoidaan eksponenttifunktio $f(x) = 2^x$. Tähän mennessä opitun perusteella osaamme derivoida vain luonnollisen eksponenttifunktion. Kantalukua vaihtamalla saadaan voidaan kuitenkin kirjoittaa funktion f lauseke luonnollisen eksponenttifunktion avulla:

$$f(x) = 2^x = e^{(\ln 2)x}.$$

Nyt derivoitavana lausekkeena onkin yhdistetty funktio, jossa sisäfunktion lauseke on $\ln 2 \cdot x$ ja ulkofunktion lausekkeena luonnollisen eksponenttifunktion lauseke e^x. Tämä osataan derivoida (vrt. esimerkkiin 4.1):

$$f'(x) = D\big(e^{(\ln 2)x}\big) = e^{(\ln 2)x} \cdot \ln 2.$$

Haluttaessa voidaan vielä lopuksi palata 2-kantaiseen esitykseen:

$$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2.$$

Yleisiä eksponenttifunktioita derivoitaessa tarvitaan siis apuna luonnollista logaritmia.

Eksponenttifunktion kantaluvun vaihtaminen on tarpeellista, jos on tarpeen derivoida tai integroida muita kuin luonnollisia eksponenttifunktioita tai jos joudutaan jostakin syystä vertailemaan kahta erikantaista eksponenttifunktiota keskenään. Logaritmifunktioiden tapauksessa kantaluvun vaihtaminen on kuitenkin vielä tärkeämpi taito.

Oletetaan, että halutaan ilmaista funktio $g(x) = \log_3 x$ luonnollisen logaritmifunktion avulla. Logaritmi $\log_3 x$ vastaa kysymykseen, mihin potenssiin 3 pitää korottaa, jotta saataisiin x. Tämän mukaan siis

$$3^{\log_3 x} = x.$$

Vaihdetaan tässä eksponenttiesityksessä kantaluvuksi e samalla tavalla kuin edellä, jolloin saadaan yhtälö

$$e^{(\ln 3)(\log_3 x)} = x.$$

Nyt käytetään jälleen logaritmin määritelmää: luonnollinen logaritmi luvusta x on se luku, johon e pitää korottaa, jotta saataisiin x. Viimeisen yhtälön perusteella kyseinen luku on $(\ln 3)(\log_3 x)$. On siis saatu

$$\ln x = (\ln 3)(\log_3 x).$$

Jakamalla yhtälö puolittain luvulla $\ln 3$ saadaan lopulta esitys

$$g(x) = \log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}.$$

Logaritmifunktion kannanvaihtoa tarvitaan niin usein, että esitetään se vielä yleisessä muodossa kaavana:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Esimerkki 4.6. Ratkaistaan yksinkertainen eksponenttiyhtälö $4^x = 10$. Koska $4^1 = 4$ ja $4^2 = 16$, ratkaisu on oletettavasti ykkösen ja kakkosen välissä. Logaritmin määritelmän perusteella ratkaisu on $x = \log_4 10$, mutta laskimessa on harvoin toimintoa mielivaltaisen logaritmin laskemiseksi. Laskimen näppäimistä löytyy yleensä vain luonnollinen logaritmi (ln tai log) sekä toisinaan myös 10-kantainen logaritmi (lg, joskus myös log(!)). Joudumme siis vaihtamaan kantaluvun. Vaihdetaan logaritmi vaikkapa luonnolliseksi, jolloin se voidaan laskea laskimella:

$$x = \log_4 10 = \frac{\ln 10}{\ln 4} \approx \frac{2{,}303}{1{,}386} \approx 1{,}66.$$

Yhtälön voisi ratkaista myös toisella tavalla. Ottamalla alkuperäisen yhtälön $4^x = 10$ molemmilta puolilta luonnollinen logaritmi saadaan yhtäpitävä yhtälö

$$\ln 4^x = \ln 10.$$

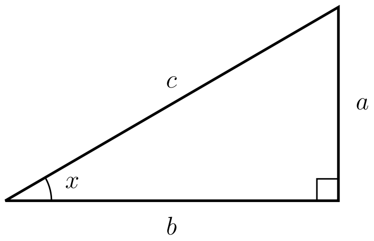
Tähän voidaan käyttää logaritmien laskusääntöä, jonka mukaan $\ln 4^x = x \ln 4$, ja tästä voidaan ratkaista x. Koko päättely etenee seuraavasti:

$$\begin{aligned} 4^x &= 10 \\ \ln 4^x &= \ln 10 \\ x \ln 4 &= \ln 10 \quad \mid : \ln 4 \\ x &= \frac{\ln 10}{\ln 4}. \end{aligned}$$

Lopullinen likiarvo on tietenkin täsmälleen sama kuin edellä.

4.4 Trigonometriset funktiot

Trigonometrisia funktioita ovat koulusta tutut sini-, kosini- ja tangenttifunktiot. Sana ”trigonometria” tulee kreikan kielestä ja tarkoittaa kolmion mittaamista (’trigōnon’ = kolmio, ’metrein’ = mitata). Trigonometriset funktiot ilmaisevat suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksien suhteiden riippuvuutta annetusta kulmasta. Jos lähtöarvona on jokin kulman suuruus, esimerkiksi sinifunktion arvo tuolla lähtöarvolla saadaan seuraavasti: asetetaan kyseinen kulma toiseksi kulmaksi mihin tahansa suorakulmaiseen kolmioon ja luetaan tuon kulman vastaisen kateetin ja hypotenuusan pituuksien suhde. Tuo suhde on sinifunktion arvo eli annetun kulman sini. Trigonometristen funktioiden perinteiset määritelmät näkyvät oheisesta kuvasta.



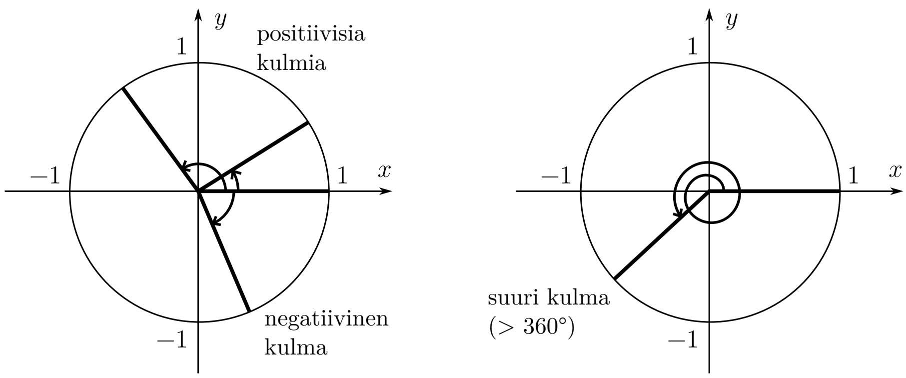
$\sin x = a/c$

$\cos x = b/c$

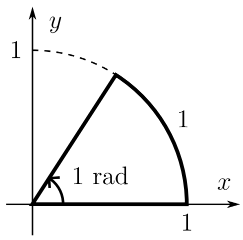
$\tan x = a/b$

Suorakulmaisen kolmion avulla voidaan kuitenkin määrittää trigonometristen funktioiden arvoja vain tietyillä kulman arvoilla, koska suorakulmaisessa kolmiossa kaikki muut kuin suora kulma ovat pienempiä kuin 90 astetta. Jos siis haluttaisiin määritellä sinin arvo vaikkapa lähtöarvolla 130, törmättäisiin vaikeuksiin. Asia korjaantuu määrittelemällä trigonometriset funktiot uudelleen ns. *yksikköympyrän* avulla.

Yksikköympyrä on koordinaatistoon piirretty ympyrä, jonka keskipiste on origossa ja säde on 1. Tähän ympyrään sijoitetaan kulmia siten, että niiden kärki on origossa ja toinen kylki x-akselin positiivisella osalla. Kulman suuruus tulkitaan positiiviseksi, jos se aukeaa x-akselilla olevasta kyljestä vastapäivään, ja negatiivinen, jos se aukeaa myötäpäivään. Yksikköympyrään voidaan piirtää myös täyskulmaa (360°) suurempi kulma kiertämällä ympyrä ympäri mahdollisesti useampaankin kertaan.



Matematiikassa kulman suuruus ilmoitetaan tavallisesti *radiaaneina*. Radiaani on sen kokoinen kulma, että yksikköympyrässä sitä vastaavan kaaren pituus on sama kuin kulma itse. Kulman koko on siis yksi radiaani, jos sitä vastaavan yksikköympyrän kaaren pituus on 1.

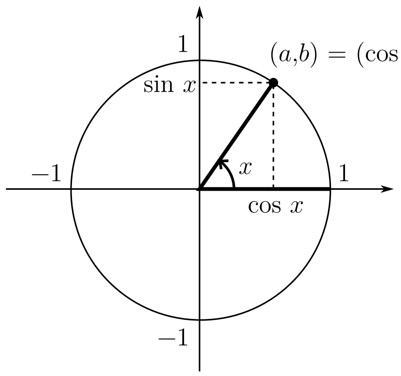


Radiaaneja käytettäessä yksikköä ei yleensä merkitä lainkaan näkyviin. Joskus saatetaan selvyyden vuoksi käyttää lyhennettä ”rad”. Koska yksikköympyrän kaaren puolikkaan pituus on π, puoliympyrää vastaavan kulman eli oikokulman suuruus on π radiaania. Toisaalta oikokulma on 180 astetta. Tästä saadaan radiaanien ja asteiden välille seuraava muunnoskaava:

$$\text{kulma radiaaneina} = \text{kulma asteina} \cdot \frac{\pi}{180}.$$

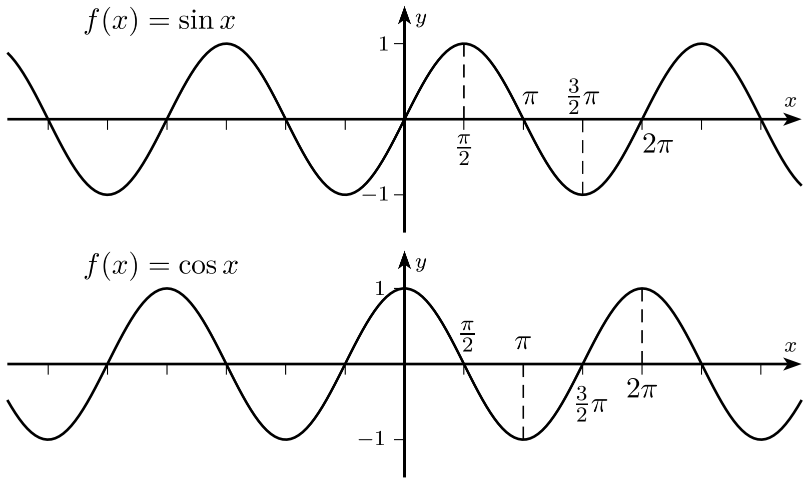
4.5 Sinifunktio ja kosinifunktio

Sini- ja kosinifunktiot voidaan määritellä yksikköympyrän avulla seuraavasti (ks. oheinen kuva). Olkoon x lähtöarvo. Piirretään yksikköympyrään kulma, jonka suuruus on x siten, että sen alkukylki tulee x-akselin positiiviselle osalle. Oletetaan, että loppukylki leikkaa yksikköympyrän pisteessä (a, b). Tällöin sinifunktion arvo $\sin x$ on tuon leikkauspisteen y-koordinaatti eli a, ja kosinifunktion arvo $\cos x$ on saman leikkauspisteen y-koordinaatin arvo eli b.



Määritelmästä nähdään, että sini- ja kosinifunktion arvot sijoittuvat välille $[-1, 1]$, sillä yksikköympyrällä olevan pisteen x- ja y-koordinaatit eivät voi olla suurempia kuin 1 tai pienempiä kuin -1. Kun negatiiviset kulmat ja yli täysympyrän menevät kulmat tulkitaan aiemmin selitetyllä tavalla, sini- ja kosinifunktiot voidaan määritellä kaikilla reaaliluvuilla. Niiden arvot tosin toistuvat aina täyskulman välein, kun yksikköympyrään piirretyn kulman loppukylki palaa taas x-akselille.

Sini- ja kosinifunktion arvoja laskettaessa käytetään yleensä kulmanyksikkönä radiaania. Funktioiden kuvaajat on piirretty seuraaviin kuviin. Kuvista huomataan, että sekä sini- että kosinifunktion kuvaajat toistavat itseään aina täyskulman eli 2π radiaanin välein. Tällaisia funktioita, joiden arvot toistavat itseään, sanotaan *jaksollisiksi.* Sini- ja kosinifunktio ovat siis jaksollisia funktioita, joiden jakson pituus on 2π.



Sini- ja kosinifunktion kuvaajia vertailemalla huomataan, että niiden kuvaajat vastaavat toisiaan, kun toista siirretään hieman vaakasuunnassa. Tarkka määrä on itse asiassa $\pi/2$ (eli 90°). Kaavana voitaisiin ilmaista, että $\cos x = \sin(x + \pi/2)$.

Koska sini- ja kosinifunktio ovat jaksollisia, myös niiden nollakohdat toistavat itseään säännöllisesti. Sinifunktio saa arvon nolla, kun kulman suuruus on nolla, ja nollakohdat toistuvat aina π radiaanin (eli 180°) välein. Nollakohdat voidaan siis ilmaista lyhyesti muodossa

$$x = n\pi, \quad \text{missä } n \text{ on kokonaisluku.}$$

Kosinin ensimmäinen nollakohta puolestaan on kohdassa $x = \pi/2$ (eli 90°), ja nollakohdat toistuvat π radiaanin välein. Täten nollakohdat voidaan ilmaista muodossa

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad \text{missä } n \text{ on kokonaisluku.}$$

Esimerkki 4.7. Etsitään väliltä $[0, 4]$ ne luvut x, jotka toteuttavat yhtälön

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Tämä yhtälö toteutuu täsmälleen silloin, kun lauseke $2x+\pi/2$ on sinifunktion nollakohta. Eräs tällainen nollakohta on 0, ja muut saadaan tästä π:n välein. Voidaan siis päätellä, että yhtälö pätee, kun

$$2x + \frac{\pi}{2} = n\pi,$$

missä n voi olla mikä tahansa kokonaisluku. Tästä uudesta yhtälöstä voidaan helposti ratkaista x:

$$\begin{aligned} 2x + \frac{\pi}{2} &= n\pi \\ 2x &= -\frac{\pi}{2} + n\pi \\ x &= -\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Saatu x on yhtälön ratkaisu aina, kun n on kokonaisluku. Sijoittamalla n:n paikalle eri kokonaislukuja saadaan muun muassa ratkaisut

$$-\frac{\pi}{4}+\frac{0}{2}\approx -0{,}79, \quad -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\approx 0{,}79, \quad -\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{2}\approx 2{,}36,$$
$$-\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\approx 3{,}93 \quad \text{ja} \quad -\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{2}\approx 5{,}50.$$

Vain osa ratkaisuista osuu tutkittavalle välille $[0,4]$. Nämä ratkaisut ovat (likiarvoina) 0,79, 2,36 ja 3,93.

4.6 Tangenttifunktio

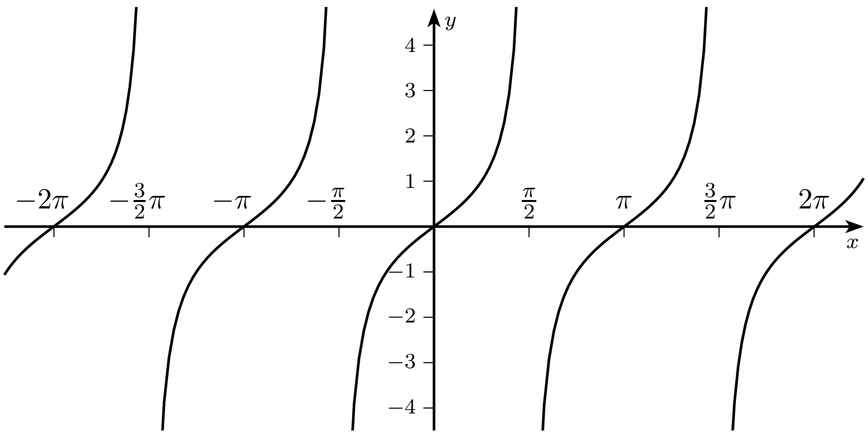
Tangenttifunktio on trigonometrinen funktio, jonka ominaisuudet poikkeavat melkoisesti sini- ja kosinifunktioiden ominaisuuksista. Tangenttifunktio määritellään sinin ja kosinin osamääränä:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Koska nollalla ei voi jakaa, tangenttifunktio ei ole määritelty siellä, missä kosinifunktio saa arvon nolla. Toisin sanoen tangenttifunktion arvo $\tan x$ ei ole määritelty, kun

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad \text{missä } n \text{ on kokonaisluku.}$$

Tangenttifunktion kuvaaja on piirretty seuraavaan kuvaan.



Myös tangenttifunktio on jaksollinen, mutta tällä kertaa jaksona on π. Tangenttifunktion arvot toistuvat siis π:n välein. Tangenttifunktio saa arvon nolla silloin, kun osoittaja on nolla. Nollakohdat ovat siis samat kuin sinifunktiolla, eli ne ovat muotoa $n\pi$, missä n on mikä tahansa kokonaisluku.

4.7 Sini- ja kosinifunktioiden derivaatat

Kun kulman yksikkönä käytetään radiaania, sini- ja kosinifunktioiden derivointi sujuu helposti:

$$\begin{aligned} D\sin x &= \cos x, \\ D\cos x &= -\sin x. \end{aligned}$$

Integrointi on aivan yhtä helppoa:

$$\begin{aligned} \int \sin x \,\mathrm{d}x &= -\cos x + C, \\ \int \cos x \,\mathrm{d}x &= \sin x + C. \end{aligned}$$

On vain muistettava, mihin miinusmerkit tulevat.

Esimerkki 4.8. Tutkitaan, missä pisteissä funktio $f(x) = 2\sin x + x$ saa ääriarvoja avoimella välillä $]0, 10[$. Tätä varten derivoidaan ensin funktio f. Sinin derivaatta on kosini, ja x:n derivaatan tunnemme entuudestaan. Vakiokerroin ei muutu derivoitaessa, joten saadaan

$$f'(x) = 2\cos x + 1.$$

Kulkukaavion selvittämistä varten on ratkaistava derivaatan nollakohdat. Ensinnäkin nähdään, että

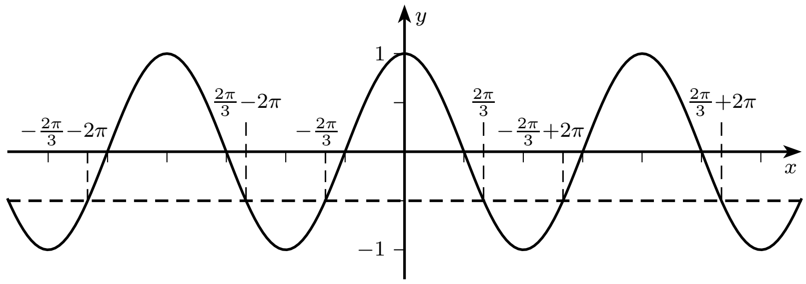
$$2\cos x + 1 = 0 \iff \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Laskimen tai taulukkokirjan avulla voidaan selvittää jokin sellainen lähtöarvo, jolla kosini saa arvon $-1/2$. (Laskimessa toiminto merkitään yleensä "$\cos^{-1}$".) Vastaukseksi pitäisi tulla $2\pi/3$ radiaania ($120°$) tai likiarvona 2,094.

Kaikkien derivaatan nollakohtien selvittämiseksi on kuitenkin nähtävä hieman enemmän vaivaa. Kosinifunktio on nimittäin jaksollinen funktio, joten se saa samat arvot aina 2π:n välein. Arvo $-1/2$ tulee siis paitsi kohdassa $x = 2\pi/3$, myös aina kohdissa $x = 2\pi/3 + 2\pi$, $x = 2\pi/3 + 4\pi$ jne. Toisaalta kosinifunktion kuvaajasta tai yksikköympyrästä nähdään, että luvun ja vastaluvun kosinit ovat samat. Täten arvo $-1/2$ saadaan myös esimerkiksi kohdassa $x = -2\pi/3$. Kun nämä kaksi seikkaa otetaan huomioon, voidaan päätellä, että derivaatan nollakohtia on itse asiassa kahdenlaisia:

$$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = -\left(\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi\right).$$

Kummassakin n voi olla mikä tahansa kokonaisluku. Tilanne näkyy hyvin seuraavasta kuvasta, johon on piirretty kosinifunktion kuvaaja sekä ne kohdat, joissa funktio saa arvon $-1/2$.



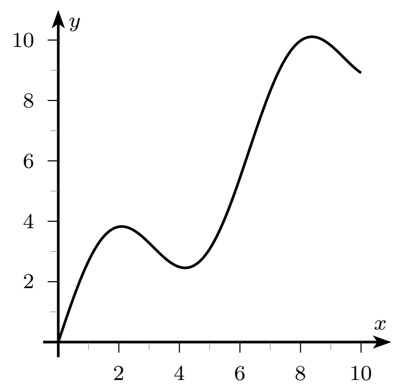
Saatuja nollakohtia tutkimalla nähdään, että tarkasteltavalle välille $]0, 10[$ niistä osuvat vain seuraavat:

$$\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}094, \qquad \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3} \approx 8{,}378 \quad \text{ja} \quad -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3} \approx 4{,}188.$$

Laskemalla derivaatan arvoja näiden nollakohtien välissä (muista asettaa laskimeen kulmanyksiköksi radiaanit!) saadaan seuraavanlainen kulkukaavio:

	$0 < x < 2{,}094$	$2{,}094 < x < 4{,}188$	$4{,}188 < x < 8{,}378$	$8{,}378 < x < 10$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Nähdään siis, että funktiolla f on maksimikohdat $x = 2{,}094$ ja $x = 8{,}378$ sekä minimikohta $x = 4{,}188$. Se, onko funktiolla pienintä tai suurinta arvoa, selviää laskemalla arvot tarkasteluvälin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdissa. Osoittautuu, että pienin arvo saavutettaisiin tarkasteluvälin vasemmassa päätepisteessä, mutta koska väli oli avoin, se ei sisällä päätepisteitään, joten pienintä arvoa ei itse asiassa koskaan saavuteta. Suurin arvo sen sijaan saavutetaan jommassakummassa maksimikohdassa. Laskemalla nähdään, että $f(2{,}094) \approx 3{,}826$ ja $f(8{,}378) = 10{,}110$, joten suurin arvo on $10{,}110$ kohdassa $x = 8{,}378$. Ohessa on vielä funktion f kuvaaja.



4.8 Erityisfunktioiden sovelluksia

Tässä luvussa esitellään muutama esimerkki, joissa käytetään hyväksi eksponentti-, logaritmi- sekä trigonometrisia funktioita. Ensimmäinen esimerkki juontaa juurensa siitä, että luonnollinen eksponenttifunktio on oma derivaattansa.

Esimerkki 4.9. (Eksponentiaalinen kasvu.) Tarkastellaan bakteeripopulaatiota, jonka kasvunopeus on suotuisissa olosuhteissa (riittävästi elintilaa ja ravintoa, ei vihollisia jne.) suoraan verrannollinen populaation kokoon. Olkoon $N(t)$ populaation massa milligrammoina ajanhetkellä t (tuntia). Populaation kasvunopeus ajanhetkellä t on derivaatta $N'(t)$. Se, että kasvunopeus on suoraan verrannollinen populaation kokoon, voidaan ilmaista yhtälönä

$$N'(t) = kN(t), \tag{2}$$

missä k on jokin verrannollisuuskerroin.

Yhtälö (2) on esimerkki *differentiaaliyhtälöstä*. Differentiaaliyhtälöissä esiintyy jonkin tuntemattoman funktion lisäksi sen derivaatta, ja tarkoituksena on löytää funktio, joka toteuttaa yhtälön. Matemaattisesti voidaan osoittaa, että yhtälön (2) kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$N(t) = N_0 e^{kt}.$$

Funktio N kuvaa *eksponentiaalista kasvua*. Verrannollisuuskerroin k ilmaisee kasvunopeuden: jos k on negatiivinen, kyse on itse asiassa eksponentiaalisesta vähenemisestä. Vakio N_0 puolestaan kuvaa populaation kokoa alkuhetkellä, sillä

$$N(0) = N_0 e^{k \cdot 0} = N_0 e^0 = N_0 \cdot 1 = N_0.$$

Selvitetään bakteeripopulaation määrää kuvaava funktio tilanteessa, jossa alussa populaation massa on 2 mg ja viiden tunnin kuluttua 2 g eli 2000 mg. Vakio N_0 kuvaa populaation koko alkuhetkellä, joten tässä tapauksessa $N_0 = 2$. Ehdosta $N(5) = 2000$ saadaan yhtälö

$$N(5) = N_0 e^{kt} \quad \text{eli} \quad 2000 = 2e^{k \cdot 5}.$$

Jaetaan yhtälö aluksi puolittain luvulla 2, jolloin saadaan

$$1000 = e^{5k}.$$

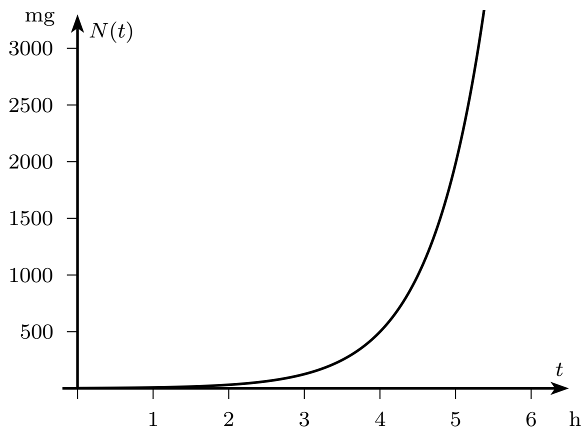
Käytetään luonnollista logaritmia eksponentin selvittämiseen:

$$\ln 1000 = 5k.$$

Viimeisestä yhtälöstä nähdään lopulta, että $k = (\ln 1000)/5 \approx 1{,}38$. Näin ollen bakteeripopulaation kokoa kuvaa funktio

$$N(t) = 2e^{1{,}38t} \quad \text{(mg)}.$$

Eksponentiaalinen kasvu on hyvin nopeaa. Tämä näkyy esimerkiksi oheisesta kuvasta, johon on piirretty funktion $N(t)$ kuvaaja.



Bakteeripopulaatioiden lisäksi muun muassa radioaktiivinen hajoaminen noudattaa yhtälöä (2), joten myös radioaktiivinen hajoaminen on eksponentiaalista, verrannollisuuskerroin k vain on tällöin negatiivinen.

Toinen esimerkki liittyy hyvin yleiseen logaritmifunktion sovellukseen.

Esimerkki 4.10. (Logaritminen asteikko.) Toisinaan on käytännöllistä ilmaista jonkin suureen arvoja käyttämällä varsinaisten arvojen sijasta niiden logaritmeja. Tämä tulee kyseeseen erityisesti, jos suureen arvot vaihtelevat erityisen laajoissa rajoissa. Logaritmin ottaminen palauttaa arvot ymmärrettävälle asteikolle.

Esimerkiksi kuuloaisti toimii siten, että äänen intensiteetin kymmenkertaistaminen lisää kuulovaikutelman voimakkuutta vakiomäärällä, oli kyse sitten kovista tai hiljaisista äänistä. Toisin sanoen kymmenkertainen äänen voimistaminen kuulostaa alkuperäiseen verrattuna samalta samalta kuin satakertainen voimistaminen kymmenkertaiseen verrattuna. Jos esimerkiksi kellon tikityksen voimakkuus on 1 ja puheen 10, on ukkosen voimakkuus jopa 1000.

Äänen voimakkuuden kuvaamiseen käytetään yleisesti *desibeliasteikkoa*, joka määritellään kaavalla

$$L = 10\big(\lg(I) - \lg(I_0)\big). \tag{3}$$

Kaavassa I on äänen intensiteetti (yksikkönä $\mathrm{W/m^2}$), I_0 on kuulokynnystä vastaava intensiteetti ($10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$), lg on kymmenkantainen logaritmi ja L on äänenvoimakkuuden vaikutelma desibeleinä (dB).

Tutkitaan esimerkin vuoksi, mitä kaavan (3) mukaan tapahtuu kuulovaikutelmalle, kun äänen intensiteetti kasvaa kymmenkertaiseksi. Olkoon alkuperäinen intensiteetti I_1. Tällöin äänenvoimakkuus on

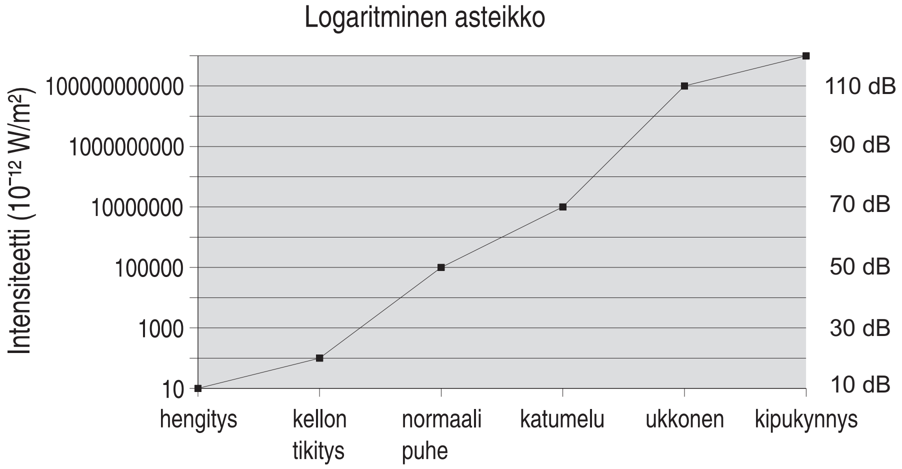
$$L_1 = 10\big(\lg(I_1) - \lg(I_0)\big).$$

Kasvatetaan intensiteetti kymmenkertaiseksi asettamalla $I_2 = 10 \cdot I_2$. Uudeksi äänenvoimakkuudeksi tulee tällöin

$$\begin{aligned} L_2 &= 10\big(\lg(I_2) - \lg(I_0)\big) = 10\big(\lg(10 \cdot I_1) - \lg(I_0)\big) \\ &= 10\big(\lg(10) + \lg(I_1) - \lg(I_0)\big) = 10\big(1 + \lg(I_1) - \lg(I_0)\big) \\ &= 10 + 10\big(\lg(I_1) - \lg(I_0)\big) = 10 + L_1. \end{aligned}$$

Intensiteetin kymmenkertaistaminen lisää siis desibelilukemaa kymmenellä. Laskussa käytettiin hyväksi tulon logaritmin kaavaa $\lg(xy) = \lg x + \lg y$.

Seuraavaan kaavioon on koottu joitakin äänenvoimakkuuksia. Vasemmassa laidassa näkyy äänen intensiteetti ja oikeassa laidassa vastaava desibelilukema. Huomaa, että desibelilukemat nousevat tasaisesti, kun taas intensiteettilukemat kasvavat paljon nopeammin (itse asiassa eksponentiaalisesti).



Desibeliasteikolla kuvataan toisinaan myös muita fysikaalisia suureita kuten jännitteitä ja taajuuksia. Muita logaritmisia asteikkoja esiintyy myös paljon eri ilmiöitä kuvaamassa. Mainittakoon esimerkkinä Richterin asteikko, jolla kuvataan maanjäristysten voimakkuutta sekä pH-asteikko, joka kuvaa vesiliuoksen happamuutta tai emäksisyyttä.

Viimeisissä esimerkeissä hyödynnetään trigonometristen funktioiden jaksollisuutta.

Esimerkki 4.11. (Jaksolliset ilmiöt.) Tietylle alueelle osuvan auringonsäteilyn määrä vaihtelee jaksollisesti vuodenaikojen mukaan. Tämä vaihtelu vaikuttaa merkittävästi kasvien kasvunopeuteen. Jos muita tekijöitä ei oteta huomioon, voitaisiin erään lauhkealla vyöhykkeellä kasvavan lämpimän kasvukauden nurmikasvilajin kasvunopeutta arvioida esimerkiksi seuraavalla funktiolla:

$$k(t) = 1500 - 900\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right) \quad (\text{kg/ha/kk}),$$

missä t on aika kuukausina erään vuoden alusta lähtien. Tämän funktion kuvaaja on piirretty jäljempänä seuraavaan kuvaan.

Valitun funktion ideana on se, että kosini on jaksollinen funktio. Sisäfunktio $\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}$ on asetettu niin, että funktion jakso, joka kosinilla tavallisesti on 2π, muuttuu kuvaamaan 12 kuukautta ja alkamaan sopivasta kohdasta vuotta. Lisäksi funktion arvot on skaalattu niin, että ne osuvat välin $[-1, 1]$ sijasta välille $[600, 2400]$.

Tarkistetaan esimerkin vuoksi funktion k jakson pituus: koska kosinifunktiolle pätee $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ kaikilla x, pätee funktion k lausekkeelle

$$1500 - 900\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right) = 1500 - 900\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2} + 2\pi\right).$$

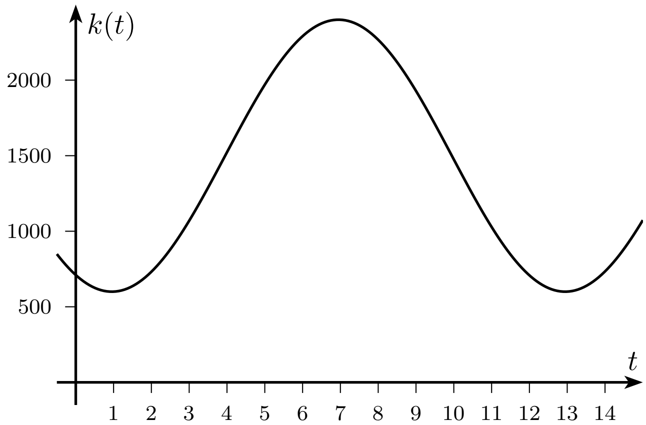
Sisäfunktion lauseketta hieman muokkaamalla nähdään, että

$$\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\cdot 12 - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}(t+12) - \frac{1}{2}.$$

Siispä funktiolle k pätee

$$1500 - 900\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right) = 1500 - 900\cos\left(\frac{\pi}{6}(t+12) - \frac{1}{2}\right)$$

eli $k(t) = k(t+12)$. Funktion jakson pituus on siis 12.



Tutkitaan nyt derivaatan avulla, missä kuussa kasvi kasvaa nopeiten. Kasvunopeuden huippujen selvittämiseksi derivoidaan se yhdistetyn funktion derivoimissäännöllä. Kosinin sisäfunktion derivaatta on $\pi/6$, joten saadaan

$$\begin{aligned} k'(t) &= 0 - 900\left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right)\right)\cdot\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{150}\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Derivaatta on nolla silloin, kun sen sisältämä sinilauseke on nolla. Sinifunktion nollakohdat puolestaan ovat 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, jne. Päädytään siis ratkaisemaan yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2} &= n\pi \\ \frac{\pi}{6}t &= \frac{1}{2} + n\pi \\ t &= \frac{3}{\pi} + 6n \approx 0{,}95 + 6n. \end{aligned}$$

Jotkin lasketuista derivaatan nollakohdista ovat mahdollisesti maksimikohtia. Koska funktion k arvot toistuvat 12 kuukauden välein, riittää päätellä funktion kulku ensimmäisen vuoden aikana. Tuon vuoden aikana derivaatan nollakohdat ovat 0,95 ja 6,95 (tammikuun lopussa ja heinäkuun lopussa). Vuosi jakautuu siis kolmeen väliin:

$$[0, 0{,}95[, \quad]0{,}95, 6{,}95[\quad \text{ja} \quad]6{,}95, 12].$$

Tarkistetaan derivaatan etumerkki kullakin välillä:

$$k'(0) \approx -0{,}01, \quad k'(3) \approx 0{,}02 \quad \text{ja} \quad k'(10) \approx -0{,}02.$$

Kulkukaavio on seuraavanlainen:

	$0 < t < 0{,}95$	$0{,}95 < t < 6{,}95$	$6{,}95 < t < 12$
$k'(t)$	$-$	$+$	$-$
$k(t)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Kulkukaaviosta ja funktion jaksollisuudesta päätellen kasvun huippukohta on joka vuosi heinäkuun lopussa.

Esimerkki 4.12. Tarkastellaan vielä edellisen esimerkin nurmikasvia. Kasvunopeus kerryttää kasvin biomassaa. Lasketaan integroimalla biomassan kertymä ensimmäisen talven aikana marraskuun lopusta helmikuun loppuun, eli välillä $[11, 14]$. Käytetään yhdistetyn funktion integrointia:

$$\begin{aligned}
&\int_{11}^{14} 1500 - 900\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{11}^{14} 1500\,\mathrm{d}t - 900\int_{11}^{14} \frac{6}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{6}\,\mathrm{d}t \\
&= \Big/_{11}^{14} 1500t - 900 \Big/_{11}^{14} \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right) \\
&= (21000 - 16500) - 900\cdot\left(\frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{7\pi}{3} - \frac{1}{2}\right) - \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{1}{2}\right)\right) \\
&\approx 4500 - 2400 = 2100.
\end{aligned}$$

Biomassaa kertyy siis talvikuukausien aikana noin 2,1 tonnia hehtaaria kohti.

Lasketaan vertailun vuoksi tuotto myös kesäkuukausien aikana:

$$\begin{aligned}
&\int_{5}^{8} 1500 - 900\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big/_{5}^{8} 1500t - 900 \Big/_{5}^{8} \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right) \\
&= (12000 - 7500) - 900\cdot\left(\frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{1}{2}\right) - \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2}\right)\right) \\
&\approx 4500 - (-2400) = 6900.
\end{aligned}$$

Kesäkuukausien aikana biomassaa kertyy 6,9 tonnia hehtaarilta.

5 Matriisilaskenta

Kurssin loppuosassa tutustutaan matriiseihin ja niiden käyttöön yhtälöryhmien ratkaisemisessa.

5.1 Lineaariset yhtälöryhmät

Yhtälöryhmät liittyvät tilanteisiin, joissa on monta tuntematonta tekijää, jotka kaikki riippuvat toisistaan. Jos riippuvuudet tunnetaan, voidaan muodostaa yhtälöryhmä, jonka jokainen yhtälö kuvaa jotakin riippuvuutta. Nyrkkisääntönä yhtälöitä tarvitaan vähintään yhtä paljon kuin tuntemattomia, jotta tuntemattomat voidaan ratkaista täydellisesti. (Silti ratkaisu ei välttämättä aina onnistu.)

Tietynlaisia yhtälöitä ja yhtälöryhmiä kutsutaan *lineaarisiksi*. Ne ovat sellaisia, joissa tuntemattomat esiintyvät vain vakioilla kerrottuna ja näistä on muodostettu summalausekkeita. Tuntemattomia ei siis esiinny esimerkiksi toiseen korotettuna tai neliöjuuren alla. Esimerkiksi seuraavat yhtälöryhmät ovat lineaarisia:

$$\begin{cases} x+y &= 2 \\ x-y &= 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y+z &= -2 \\ -3x+2y-z &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+4x_3 &= 1 \\ -3x_1+2x_2-x_3 &= 0 \\ x_2+x_3 &= 12 \end{cases}$$

Kahdessa ensimmäisessä tuntemattomia on merkitty kirjaimilla x, y ja z, ja viimeisessä on käytetty merkintöjä x_1, x_2 ja x_3. Käytetyillä kirjaimilla ei tietysti ole väliä.

Yllä olevista yhtälöryhmistä ensimmäinen kuvaa tilannetta, jossa kahden luvun summa on 2 ja erotus 1. Ei ole vaikeaa keksiä, että sopivat luvut voisivat olla esimerkiksi $x = 3/2$ ja $y = 1/2$. Yhtälöryhmän ratkaiseminen tarkoittaakin sellaisten lukujen selvittämistä, jotka tuntemattomien paikalle sijoitettuna toteuttavat yhtä aikaa kaikki yhtälöryhmän yhtälöt.

Lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisuun on monia menetelmiä. Koulusta tuttuja ovat sijoitus- ja eliminointimenetelmä. Tällä kurssilla opetellaan eliminointimenetelmän kehittyneempi versio, niin kutsuttu *Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä*. Katsotaan aluksi, miten menetelmä toimii yksinkertaisen yhtälöryhmän tapauksessa.

Esimerkki 5.1. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x+y &= 2 \\ x-y &= 1 \end{cases}$$

järjestelmällisesti eliminointimenetelmällä.

Ensin eliminoidaan jälkimmäisestä yhtälöstä ensimmäinen termi. Tämä tehdään kertomalla ensimmäinen yhtälö luvulla -1 ja lisäämällä saatu tulos toiseen yhtälöön. Ensimmäinen yhtälö kerrottuna -1:llä on

$$-x-y=-2.$$

Lisätään tämä puolittain toiseen yhtälöön:

$$\begin{array}{rcr} -x-y & = & -2 \\ x-y & = & 1 \\ \hline 0-2y & = & -1 \end{array}$$

Toinen yhtälö muuttui lisäyksessä muotoon $-2y = -1$. Nyt yhtälöryhmä näyttää tältä:

$$\begin{cases} x+y & = & 2 \\ -2y & = & -1 \end{cases}$$

Huomaa, että ensimmäinen yhtälö kirjoitetaan vielä sellaisenaan. Jaetaan vielä toinen yhtälö luvulla -2, jolloin päästään eroon y:n kertoimesta:

$$\begin{cases} x+y & = & 2 \\ y & = & \frac{1}{2} \end{cases}$$

Toinen yhtälö on nyt saatu muokattua muotoon $y = 1/2$, josta y:n arvo nähdään suoraan. Tämän avulla voitaisiin sitten selvittää myös x. Jatketaan kuitenkin vielä eliminointia siihen asti, että myös x nähdään suoraan. Tämä onnistuu kertomalla toinen yhtälö luvulla -1 ja lisäämällä tulos puolittain ensimmäiseen yhtälöön. Toinen yhtälö -1:llä kerrottuna on

$$-y = -\frac{1}{2}.$$

Lisätään tämä ensimmäiseen yhtälöön puolittain:

$$\begin{array}{rcr} -y & = & -\frac{1}{2} \\ x+y & = & 2 \\ \hline x+0 & = & \frac{3}{2} \end{array}$$

Ensimmäinen yhtälö muuttui nyt muotoon $x = 3/2$. Koko yhtälöpari on siis saatu muokatuksi seuraavanlaiseksi:

$$\begin{cases} x & = & \frac{3}{2} \\ y & = & \frac{1}{2} \end{cases}$$

Viimeisestä muodosta sekä x:n että y:n arvot nähdään suoraan. Tähän pääsemiseksi jouduttiin näkemään hieman vaivaa, mutta tulos on sen arvoinen. Tarkistetaan tulos vielä sijoittamalla saadut tuntemattomien arvot alkuperäisiin yhtälöihin:

$$x+y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad \text{ja} \qquad x-y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Tulos on oikea.

Ennen kuin esitellään Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä yleisessä muodossaan, käydään läpi, miten yhtälöryhmiä voidaan esittää *matriisin* muodossa. Tämä helpottaa merkintöjä, koska tuntemattomia ei tarvitse koko ajan pitää mukana.

5.2 Yhtälöryhmän ratkaiseminen matriisimuodossa

Matriiseiksi kutsutaan tietynlaisia suorakulmaisia lukutaulukoita. Yhtälöryhmä voidaan esittää matriisina kokoamalla kaikki yhtälöryhmässä esiintyvät luvut samaan taulukkoon. Esimerkiksi yhtälöpari

$$\begin{cases} 3x - 2y &= -5 \\ x + 5y &= 3 \end{cases}$$

esitetään matriisina näin:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & | & -5 \\ 1 & 5 & | & 3 \end{bmatrix}.$$

Matriisin jokainen rivi vastaa yhtä yhtälöä ja jokainen sarake tietyn tuntemattoman kerrointa, viimeistä saraketta lukuunottamatta. Viimeiseen sarakkeeseen tulee yhtälön oikean puolen vakiot. (Viimeisen sarakkeen erottava pystyviiva ei ole välttämätön merkintä; se vain auttaa muistamaan, mitkä luvut olivat yhtälöiden oikealla puolella.)

Jos jossakin yhtälössä ei esiinny jotakin tuntemattomista, sen paikalle laitetaan matriisissa nolla. Esimerkiksi yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 12 \end{cases}$$

matriisi olisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 1 \\ -3 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 12 \end{bmatrix}.$$

Gaussin–Jordanin menetelmässä pyritään muokkaamaan yhtälöryhmän matriisia niin sanotuilla *rivitoimituksilla* siten, että tuloksena olisi matriisi, josta ratkaisut pystytään lukemaan suoraan. Rivitoimitukset on valittu niin, että ne säilyttävät yhtälöryhmän ratkaisut. Toisin sanoen rivitoimituksilla muokattuja matriiseja vastaavilla yhtälöryhmillä on täsmälleen samat ratkaisut kuin alkuperäisellä yhtälöryhmällä. Rivitoimitukset ovat

1) Jaetaan matriisissa jokin rivi jollain (nollasta poikkeavalla) luvulla.
2) Kerrotaan matriisissa jokin rivi jollain luvulla ja lisätään saatu rivi johonkin toiseen riviin.
3) Vaihdetaan matriisissa kahden rivin paikka.

Rivin kertominen tai jakaminen tarkoittaa kaikkien rivillä olevien lukujen kertomista tai jakamista. Kakkostoimituksessa ensimmäinen rivi – se, jota kerrotaan – ei muutu, vaan sitä ainoastaan käytetään muokkaamaan toista riviä. Esimerkki valaisee rivitoimituksien käyttöä.

Esimerkki 5.2. Ratkaistaan seuraava kolmen yhtälön yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = & 12 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 14 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisi on

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 12 \\ 3 & 1 & -1 & | & -2 \\ 2 & -3 & 2 & | & 14 \end{bmatrix}.$$

Aloitetaan nyt eliminointi. Ensimmäiseksi tarkastellaan matriisin ensimmäistä riviä. Jaetaan rivi 2:lla, jolloin saadaan ensimmäiseksi kertoimeksi 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 12 \\ 3 & 1 & -1 & | & -2 \\ 2 & -3 & 2 & | & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} :2 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 3 & 1 & -1 & | & -2 \\ 2 & -3 & 2 & | & 14 \end{bmatrix}.$$

Käytetään sitten ensimmäisen rivin ensimmäisen sarakkeen kerrointa eliminoimaan kertoimet samasta sarakkeesta kaikilta muilta riveiltä. Aloitetaan toisesta rivistä, jonka ensimmäisessä sarakkeessa on 3. Kerrotaan siis ensimmäinen rivi -3:lla, jolloin siitä tulee

$$-3 \quad -6 \quad -9 \quad | \quad -18 \ .$$

Tätä välitulosta ei merkitä matriisiin, vaan se lisätään suoraan toiseen riviin:

$$\begin{array}{cccc|c} -3 & -6 & -9 & & -18 \\ 3 & 1 & -1 & & -2 \\ \hline 0 & -5 & -10 & & -20 \end{array}$$

Matriisi muuttuu siis eliminoinnissa muotoon

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & -5 & -10 & | & -20 \\ 2 & -3 & 2 & | & 14 \end{bmatrix}.$$

Jatketaan ensimmäisen sarakkeen lukujen eliminointia kertomalla ensimmäinen rivi luvulla -2 ja lisäämällä se kolmanteen riviin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & -5 & -10 & | & -20 \\ 2 & -3 & 2 & | & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & -5 & -10 & | & -20 \\ 0 & -7 & -4 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Välivaiheet jätettiin tässä kirjoittamatta.

Nyt on eliminoitu ensimmäinen kerroin toiselta ja kolmannelta riviltä (eli tuntematon x_1 on hävinnyt toisesta ja kolmannesta yhtälöstä). Siirrytään tarkastelemaan toista riviä. Toisen rivin ensimmäinen nollasta poikkeava kerroin on -5. Jaetaan rivi tällä luvulla:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & -5 & -10 & | & -20 \\ 0 & -7 & -4 & | & 2 \end{bmatrix} :(-5) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & -7 & -4 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Toisen sarakkeen kerroin on ensimmäisellä rivillä 2 ja kolmannella -7. Ensimmäisen rivin luku saadaan eliminoitua kertomalla kertomalla toinen rivi -2:lla ja lisäämällä ensimmäiseen riviin. Kolmannen rivin luku puolestaan eliminoidaan kertomalla toinen rivi luvulla 7 ja lisäämällä kolmanteen riviin. Tehdään nämä operaatiot nyt peräkkäin (välivaiheet on jätetty kirjoittamatta):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & -7 & -4 & | & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & & \\ \cdot(-2) & | \cdot 7 \\ & | \leftarrow \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 10 & | & 30 \end{bmatrix}.$$

Jaetaan vielä viimeinen rivi luvulla 10:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 10 & | & 30 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ : 10 \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix},$$

ja lisätään se ensimmäiseen 1:llä kerrottuna sekä toiseen -2:lla kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \\ & | \leftarrow \\ \cdot 1 & | \cdot (-2) \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}.$$

Nyt on eliminointi suoritettu loppuun. Tuloksena saatiin matriisi, jossa pystyviivan vasemmalla puolella (eli yhtälöryhmän tuntemattomien puolella) on lävistäjällä ykkösiä, muualla nollia. Tämä matriisi vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & -2 \\ x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Tästä voidaan lukea suoraan yhtälöryhmän ratkaisu.

Kaikilla yhtälöryhmillä ei ole ratkaisua lainkaan. Tarkastellaan esimerkiksi yhtälöparia

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

Yhtälöpari on ristiriitainen, sillä jos $x + y = 1$, niin $2x + 2y = 2$, mutta toisessa yhtälössä vaaditaan muuta. Lukuja x ja y ei siis voi valita niin, että molemmat yhtälöt toteutuisivat.

Toisinaan yhtälöt toteutuvat useammilla kuin yksillä tuntemattomien arvoilla. Tällöin ratkaisuja on yhden sijasta itse asiassa ääretön määrä. Nämä ovatkin ainoat vaihtoehdot. Ilmaistaan tämä vielä lauseen muodossa.

Lause 5.3. *Lineaarisella yhtälöryhmällä on aina joko yksi, ääretön määrä tai ei yhtään ratkaisua.*

Tarkastellaan joitakin esimerkkejä.

Esimerkki 5.4. Ratkaistaan Gaussin–Jordanin menetelmällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x - y + z &= -2 \\ -3x + 2y - z &= 0 \\ -x + y &= -2 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisimuoto on

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & | & -2 \\ -3 & 2 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & | & -2 \end{bmatrix}$$

Jaetaan aluksi ensimmäinen rivi 2:lla:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & | & -2 \\ -3 & 2 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & | & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} :2 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & | & -1 \\ -3 & 2 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & | & -2 \end{bmatrix}.$$

Lisätään sitten ensimmäinen rivi toiseen 3:lla kerrottuna ja kolmanteen sellaisenaan eli 1:llä kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & | & -1 \\ -3 & 2 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & | & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 & | \cdot (-1) \\ \leftarrow & | \\ & | \leftarrow \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & | & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & | & -3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & | & -3 \end{bmatrix}.$$

Ensimmäisen sarakkeen eliminoinnit on nyt suoritettu. Jatketaan jakamalla toinen rivi luvulla $\frac{1}{2}$, mikä on sama asia kuin kertominen kahdella:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & | & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & | & -3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & | & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ :1/2 \\ \\ \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -6 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & | & -3 \end{bmatrix}.$$

Lisätään vielä toinen yhtälö ensimmäiseen 1/2:lla kerrottuna ja kolmanteen $-1/2$:lla kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -6 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & | & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \\ \cdot 1/2 & | \cdot (-1/2) \\ & | \leftarrow \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -4 \\ 0 & 1 & 1 & | & -6 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Eliminointi on nyt suoritettu loppuun. Tulosmatriisi vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x + z &= -4 \\ y + z &= -6 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

Viimeistä tuntematonta z ei voitu eliminoida ensimmäisestä ja toisesta yhtälöstä, koska yhtälön viimeiseltä riviltä hävisivät kaikki tuntemattomat samalla kertaa. Tällaista tuntematonta kutsutaan *vapaaksi muuttujaksi*, sillä sen arvo voi olla mitä vain. Voidaan esimerkiksi valita $z = 1$, jolloin viimeisen yhtälöryhmän yhtälöistä nähdään, että $x = -5$ ja $y = -7$. Toisaalta jos valitaan $z = 2$, niin $x = -6$ ja $y = -8$. Jokaisella z:n arvolla saadaan yhtälöryhmälle eri ratkaisu, joten ratkaisuja on ääretön määrä.

Esimerkki 5.5. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= -2 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisimuoto on

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & -2 & -2 & | & -2 \end{bmatrix}.$$

Ensimmäisen rivin ensimmäinen kerroin on valmiiksi 1. Lisätään ensimmäinen rivi toiseen -2:lla kerrottuna ja kolmanteen -1:llä kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & -2 & -2 & | & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & | \cdot (-1) \\ \leftarrow & | \\ & | \leftarrow \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & -1 & | & -4 \\ 0 & -3 & -3 & | & -5 \end{bmatrix}.$$

Jaetaan toinen rivi puolittain -1:llä:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & -1 & | & -4 \\ 0 & -3 & -3 & | & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ :(-1) \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & -3 & -3 & | & -5 \end{bmatrix}.$$

Lisätään sitten toinen rivi ensimmäiseen -1:llä kerrottuna ja kolmanteen 3:lla kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & -3 & -3 & | & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \\ \cdot(-1) & | \cdot 3 \\ & | \leftarrow \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 7 \end{bmatrix}.$$

Tulokseksi saatu matriisi vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 &= -1 \\ x_2 + x_3 &= 4 \\ 0 &= 7 \end{cases}$$

Viimeiseltä riviltä eliminoituivat siis kaikki tuntemattomat, mutta oikealle puolelle jäi luku 7. Tämä on selvä ristiriita, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. Huomaa, että vaikka ensimmäisellä rivillä lukeekin $x_1 = -1$, tämä ei kerro mitään tuntemattoman x_1 arvosta, sillä yhtälöryhmää ratkaistaessa on kaikki yhtälöt ratkaistava yhtä aikaa. Jos johonkin kohtaan tulee ristiriita, se tarkoittaa, että koko yhtälöryhmä oli alun pitäen ristiriitainen eikä tuntemattomilla x_1, x_2 ja x_3 ole mitään arvoja, jotka toteuttaisivat yhtälöt.

5.3 Matriisien laskutoimitukset

Paitsi että matriiseja voi käyttää näppärästi apuna yhtälöryhmän merkitsemisessä, niillä on myös kokonaan oma elämänsä. Ne muistuttavat monessa suhteessa tavallisia lukuja. Matriiseja voidaan muun muassa laskea yhteen ja kertoa toisillaan, ja kullakin näistä operaatioista on oma merkityksensä myös yhtälöryhmien kannalta. Toisaalta matriisien laskutoimitukset eivät toimi aivan samalla tavalla kuin lukujen: esimerkiksi mitä tahansa matriiseja ei voi laskea yhteen eikä kertolaskun tulos ole riippumaton kertomisjärjestyksestä.

Tutustutaan seuraavaksi kolmeen matriisien laskutoimitukseen. Nämä ovat

1) matriisien yhteenlasku
2) matriisin kertominen luvulla (ns. skalaarikertolasku)
3) matriisien kertolasku.

Matriisit lasketaan yhteen yksinkertaisesti lisäämällä kussakin paikassa olevat luvut kohdakkain yhteen. Tätä varten matriisien on oltava samanmuotoisia. Esimerkiksi matriisien

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

summa lasketaan näin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+(-1) \\ 3+0 & 4+1 \\ 5+3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Vähennyslasku suoritettaisiin samalla periaatteella.

Mikä tahansa matriisi voidaan kertoa tavallisella luvulla, mikä tarkoittaa matriisin jokaisen alkion kertomista samalla luvulla. Tätä kutsutaan *skalaarikertolaskuksi*. Kertomerkkiä ei yleensä käytetä luvun ja matriisin välissä. Esimerkiksi matriisi

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

kerrottuna luvulla 2 on

$$2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot(-1) \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriisien laskutoimituksista hankalin on matriisien kertolasku. Se ei nimittäin lainkaan muistuta tavallista lukujen kertolaskua. Tutustutaan kertolaskuun esimerkin avulla.

Esimerkki 5.6. Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Matriiseja merkitään yleensä isoilla kirjaimilla.) Katsotaan aluksi, miten saadaan tulomatriisin AB ensimmäisen rivin ensimmäisen sarakkeen luku. Tätä varten on otettava matriisista A ensimmäinen rivi ja matriisista B ensimmäinen sarake, kerrottava näiden alkiot keskenään ja laskettava yhteen. Tehdään tämä:

$$\begin{array}{rrrl} 2 & -1 & 0 & (A\text{:n 1. rivi}) \\ 1 & -2 & 0 & (B\text{:n 1. sarake}) \\ \hline 2 & 2 & 0 & (\text{tulo}) \end{array}$$

Tulojen summa on $2+2+0 = 4$. Tämä on tulomatriisin ensimmäisen rivin ensimmäisen sarakkeen luku:

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}.$$

Lasketaan tämän jälkeen ensimmäisen rivin toisen sarakkeen luku kertomalla matriisin A ensimmäisen rivin alkiot matriisin B toisen sarakkeen alkioilla:

$$\begin{array}{rrrl} 2 & -1 & 0 & (A\text{:n 1. rivi}) \\ 2 & -1 & 1 & (B\text{:n 2. sarake}) \\ \hline 4 & 1 & 0 & (\text{tulo}) \end{array}$$

Tulojen summa on $4 + 1 + 0 = 5$. Tämä on tulomatriisin ensimmäisen rivin toisen sarakkeen luku:

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ ? & ? \end{bmatrix}.$$

Jäljellä olevat luvut selvitetään samalla tavoin:

$$\begin{array}{rrrl} 1 & 3 & 2 & (A\text{:n 2. rivi}) \\ 1 & -2 & 0 & (B\text{:n 1. sarake}) \\ \hline 1 & -6 & 0 & (\text{tulo}) \end{array}$$

Tulomatriisin toisen rivin ensimmäisen sarakkeen luku on siis $1-6+0 = -5$. Jatketaan:

$$\begin{array}{rrrl} 1 & 3 & 2 & (A\text{:n 2. rivi}) \\ 2 & -1 & 1 & (B\text{:n 2. sarake}) \\ \hline 2 & -3 & 2 & (\text{tulo}) \end{array}$$

Tulomatriisin toisen rivin toisen sarakkeen luku on $2-3+2 = 1$. Näin ollen tulomatriisi on

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriisikertolasku etenee yleisesti seuraavan kaavan mukaan: laskettaessa tulomatriisin rivillä i sarakkeessa j olevaa lukua otetaan ensimmäisestä matriisista i:s rivi ja toisesta j:s sarake, kerrotaan luvut kohdakkain toisillaan ja lasketaan yhteen. Jotta kertolaskut voidaan suorittaa, on seuraavan ehdon pädettävä:

> Ensimmäisen matriisin kullakin rivillä on yhtä monta lukua kuin toisen matriisin kussakin sarakkeessa.

Ehto voidaan lausua myös niin, että ensimmäisessä matriisissa on oltava yhtä monta saraketta kuin toisessa matriisissa on rivejä.

Jos matriisit A ja B ovat eri muotoisia, kertolasku voi onnistua toisin päin muttei toisin päin. Jos esimerkiksi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{ja} \qquad B = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \\ 15 & 16 \end{bmatrix},$$

niin tulo AB voidaan laskea mutta tuloa BA ei. Tässä kohden matriisien kertolasku poikkeaa tavallisesta lukujen kertolaskusta.

Jos matriisit A ja B ovat samankokoisia *neliömatriiseja*, eli niissä on molemmissa yhtä monta riviä kuin saraketta, ne voidaan aina kertoa keskenään molemmin päin. Silti lopputulos ei välttämättä ole sama. Tämän vuoksi on oltava erityisen tarkkana siinä, miten päin matriisien kertolaskun kirjoittaa.

Esimerkki 5.7. Olkoot $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ ja $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Tällöin

$$AB = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$$

mutta

$$BA = \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ -4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & -4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}.$$

Siispä $AB \neq BA$.

Esimerkki osoittaa, että vaikka kertolasku voitaisiin suorittaa kummin päin tahansa, tuttu laskusääntö $AB = BA$ ei välttämättä päde. Monet tutut säännöt kuitenkin pätevät myös matriisien laskutoimituksille, kuten esimerkiksi seuraavat:

1) $A(BC) = (AB)C$

2) $A(B + C) = AB + AC$

3) $(A + B)C = AC + BC$.

5.4 Käänteismatriisi

Matriiseja ei voi jakaa toisilla matriiseilla. Tämän puutteen korjaamiseksi voidaan toisinaan käyttää niin sanottua *käänteismatriisia*. Käänteismatriisi on ikään kuin käänteisluku: sillä kertominen vastaa jakolaskua. Ennen käänteismatriisiin tutustumista tarkastellaan kuitenkin sitä, miten kokonainen lineaarinen yhtälöryhmä voidaan ilmaista yhtenä matriisiyhtälönä.

Tarkastellaan yksinkertaista yhtälöparia

$$\begin{cases} 3x - 2y &= -5 \\ x + 5y &= 3 \end{cases}$$

Olemme jo oppineet, että tätä yhtälöparia vastaa matriisi

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & | & -5 \\ 1 & 5 & | & 3 \end{bmatrix}.$$

Esitetään yhtälöryhmä nyt vielä uudessa muodossa matriisikertolaskun avulla. Lasketaan sitä varten tulo matriiseista

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{ja} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Matriisissa A on yhtälöryhmän kertoimet, ja matriisi B sisältää yhtälöryhmän tuntemattomat. Tuloksi saadaan matriisikertolaskua käyttäen

$$AX = \begin{bmatrix} 3 \cdot x + (-2) \cdot y \\ 1 \cdot x + 5 \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 2y \\ x + 5y \end{bmatrix}.$$

Kertolaskun tuloksesta huomataan, että tulomatriisiin AX tulee itse asiassa yhtälöryhmän vasemman puolen lausekkeet. Jos kumpikin näistä lausekkeista on yhtä kuin vastaava yhtälöryhmän oikean puolen luku, yhtälöryhmä toteutuu. Yhtälöryhmä voidaan siis ilmaista muodossa $AX = B$, missä matriisi B sisältää yhtälöryhmän oikean puolen luvut:

$$B = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Nyt koko yhtälöryhmä voidaan ilmaista matriisiyhtälönä $AX = B$, eli

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Kun yhtälöryhmä esitetään matriisiyhtälönä $AX = B$, kaikki kertoimet korvataan yhdellä kerroinmatriisilla A, tuntemattomat yhdellä tuntemattomalla matriisilla X ja oikean puolen arvot yhdellä oikean puolen matriisilla B.

Matriisiyhtälö voidaan yrittää ratkaista samalla tavoin kuin tavallinen lukuyhtälö. Yhtälö $ax = b$, missä a ja b ovat reaalilukuja ja $a \neq 0$, ratkaistaisiin jakamalla puolittain luvulla a. Matriiseilla ei voi jakaa, joten emme voi ratkaista matriisiyhtälöä $AX = B$ samalla tavoin. Kuitenkin jakaminen on sama asia kuin käänteisluvulla kertominen, joten voimme ratkaista lukuyhtälön myös seuraavasti:

$$\begin{aligned} ax &= b \\ a^{-1}ax &= a^{-1}b \\ 1 \cdot x &= a^{-1}b \\ x &= a^{-1}b. \end{aligned}$$

Pyritään tämän vuoksi määrittelemään matriisin *käänteismatriisi* ja käyttämään sitä matriisiyhtälön $AX = B$ ratkaisemiseen. Ensin tarvitaan kuitenkin lukua 1 vastaava matriisi.

Minkä tahansa kokoista neliömatriisia, joka sisältää lävistäjällään ykkösiä ja muualla nollia, kutsutaan *ykkösmatriisiksi* tai *yksikkömatriisiksi*. Sitä merkitään symbolilla I_n, missä n on rivien (ja sarakkeiden) lukumäärä. Ykkösmatriisi näyttää tältä:

$$\mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ykkösmatriisi on tuttu yhtälöryhmien ratkaisusta, sillä sellainen saadaan usein Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmän lopputuloksena yhtälöryhmää vastaavan matriisin vasemmalle puolelle.

Ykkösmatriisilla on se ominaisuus, että kun sillä kertoo mitä tahansa matriisia, kyseinen matriisi ei muutu. Toisin sanoen kaava

$$\mathrm{I}_n A = A$$

pätee kaikilla matriiseilla A, joilla kertolasku on mahdollinen. Ykkösmatriisilla kertominen toimii siis ikään kuin luvulla 1 kertominen.

Olkoon nyt A jokin neliömatriisi, jossa on n riviä (ja saraketta). Jos on olemassa matriisi C, jolle pätee

$$CA = \mathrm{I}_n,$$

matriisia C kutsutaan matriisin A *käänteismatriisiksi*. Tällöin sanotaan, että matriisi A on *kääntyvä* tai *säännöllinen*. Käänteismatriisia merkitään A^{-1}.

Esimerkki 5.8. Olkoot $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ ja $C = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Tällöin

$$CA = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + (-5) \cdot 1 & 3 \cdot 5 + (-5) \cdot 3 \\ -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}_2.$$

Siispä A on kääntyvä ja C on A:n käänteismatriisi eli $C = A^{-1}$.

Jos siis neliömatriisi A on kääntyvä, on olemassa jokin matriisi, jota merkitään A^{-1} ja jolle pätee $A^{-1}A = \mathrm{I}_n$. Käänteismatriisin käänteismatriisi on sama kuin alkuperäinen matriisi, eli $(A^{-1})^{-1} = A$.

Käänteismatriisi toimii kuin käänteisluku: luvun ja sen käänteisluvun tulo on nimittäin 1. Nollalla ei ole käänteislukua, eikä kaikilla matriiseillakaan ole käänteismatriisia. Silloin kun käänteismatriisi A^{-1} kuitenkin on olemassa, sen avulla voidaan ratkaista matriisiyhtälö $AX = B$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ \mathrm{I}_n X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B. \end{aligned}$$

Esimerkki 5.9. Tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases} 2x + 5y &= -5 \\ x + 3y &= 2 \end{cases}$$

Yhtälöryhmä vastaa matriisiyhtälöä $AX = B$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Esimerkissä 5.8 todettiin, että matriisin A käänteismatriisi on

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

joten matriisiyhtälön $AX = B$ ratkaisu on

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot (-5) - 5 \cdot 2 \\ -1 \cdot (-5) + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Toisin sanoen $x = -25$ ja $y = 9$. Tarkistetaan vielä tulos:

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 2 \cdot (-25) + 5 \cdot 9 = -50 + 45 = -5, \\ x + 3y &= -25 + 3 \cdot 9 = -25 + 27 = 2. \end{aligned}$$

Tulos on oikein.

5.5 Käänteismatriisin löytäminen

Käänteismatriisin löytämiseksi voidaan soveltaa Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmää. On nimittäin niin, että jos jokin matriisi A saadaan rivioperaatioilla ykkösmatriisiksi, samat rivioperaatiot ykkösmatriisiin sovellettuina tuottavat käänteismatriisin A^{-1}.

Esimerkki 5.10. Etsitään esimerkissä 5.8 esiintynyt matriisin $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ käänteismatriisi. Rivioperaatiot kannattaa suorittaa yhtä aikaa sekä matriisille A että ykkösmatriisille, joten kirjoitetaan nämä vierekkäin yhdeksi matriisiksi. (Voidaan käyttää pystyviivaa eri puolten erottamiseen.) Eliminointimenetelmää on jo harjoiteltu, joten sen suorittaminen käy vaivatta:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 2 & 5 & | & 1 & 0 \\ 1 & 3 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} :2 \\ \end{matrix}
&& \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 5/2 & | & 1/2 & 0 \\ 1 & 3 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \leftarrow \end{matrix} \\
\rightsquigarrow &\begin{bmatrix} 1 & 5/2 & | & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & | & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ :1/2 \end{matrix}
&& \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 5/2 & | & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & | & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \cdot(-5/2) \end{matrix} \\
\rightsquigarrow &\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3 & -5 \\ 0 & 1 & | & -1 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Vasemman puolen matriisista saatiin ykkösmatriisi, joten oikealle puolelle syntyi käänteismatriisi A^{-1}. Kuten nähdään, saatu käänteismatriisi on sama kuin esimerkissä 5.8.

Yhtälöryhmiä ratkaistaessa huomattiin, että aina vasemmalle puolelle ei saada ykkösmatriisia. Jokin rivi saattaa nimittäin hävitä kokonaan eliminoinnin aikana. Tällaisessa tapauksessa matriisi ei ole kääntyvä eli sillä ei ole lainkaan käänteismatriisia. Tilanne on samankaltainen kuin luvulla 0, jolla ei ole lainkaan käänteislukua.

Esimerkki 5.11. Tarkastellaan matriisia $S = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{smallmatrix}\right]$. Eliminoimalla yhdistettyä matriisia $[S \mid \mathrm{I}_2]$ saadaan

$$
\begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ -3 & 6 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 3 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Vasemmanpuoleisen matriisin toiselta riviltä hävisivät kaikki alkiot, joten eliminointia ei voida jatkaa. Matriisia S ei saatu eliminoimalla ykkösmatriisiksi, joten sillä ei ole käänteismatriisia.

Jos matriisi A ei ole kääntyvä, matriisiyhtälöä $AX = B$ ei voida ratkaista käänteismatriisin avulla. Käytännössä tämä tarkoittaa joko sitä, että matriisiyhtälöllä ei ole lainkaan ratkaisuja, tai sitä, että ratkaisuja on ääretön määrä. Tällöin matriisiyhtälöä vastaava yhtälöryhmä on ratkaistava Gaussin–Jordanin menetelmällä, josta voidaan päätellä, onko ratkaisuja ääretön määrä vai ei lainkaan.

LOPPU