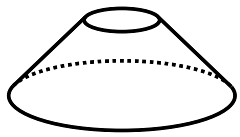
Y100 (Matematiikka I)
Haastavampia lisätehtäviä
Syksy 2013

1. Funktio h määritellään seuraavasti. Kuvan astiaan lasketaan vettä tasaisella nopeudella 1 l/min. Astia on muodoltaan katkaistu suora ympyräkartio, jonka pohjan halkaisija on 30 cm, korkeus 10 cm ja suuaukon halkaisija 10 cm. Funktion arvo $h(t)$ kertoo vedenpinnan korkeuden (cm) ajanhetkellä t (s). Määritä funktion h lauseke. (Tämä funktio esiintyi luentotehtävässä 4.11.)



2. Harjoituksen 2 tehtävässä 1 puhutaan funktiosta

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}.$$

Osoittautuu, että vaikka funktio ei ole määritelty, kun $x = 1$, lähellä kyseistä lähtöarvoa funktio kuitenkin käyttäytyy kauniisti. Osoita tämä täsmällisesti jakamalla funktion lausekkeen osoittaja ja nimittäjä tekijöihin. Kun $x \neq 1$, voit supistaa tekijän $x - 1$ pois osoittajasta ja nimittäjästä, minkä jälkeen voit päätellä funktion käyttäytymisen pisteen $x = 1$ välittömässä läheisyydessä.

3. (Tähän vaaditaan raja-arvojen osaamista.) Derivointikaavat voidaan laskea ns. erotusosamäärän raja-arvoina. Jos x ja y ovat lähtöarvoja, erotusosamäärä

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

kuvaa sellaisen suoran kulmakerrointa, joka leikkaa funktion kuvaajaa pisteissä $(x, f(x))$ ja $(y, f(y))$. Kun piste y lähestyy pistettä x, leikkaajasuora muuttuu sivuajasuoraksi. Tähän perustuen

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

jos raja-arvo on olemassa.

Kun $f(x) = x^2$, johda derivointikaava $f'(x) = 2x$ laskemalla erotusosamäärän raja-arvo. Osaatko johtaa derivointikaavan yleisemmässä tapauksessa $g(x) = x^k$, missä k on positiivinen kokonaisluku? Entä tapauksessa, jossa k on murtoluku, esim. 1/2?

4. (Liittyy edelliseen tehtävään ja vaatii raja-arvojen osaamista.) Harjoituksen 2 tehtävässä 6 esiintyivät funktiot

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1}, \qquad g(x) = |x|, \qquad k(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{kun } -1 \leq x \leq 1 \\ x, & \text{kun } x < -1 \text{ tai } x > 1. \end{cases}$$

   Etsi kuvaajan avulla ne pisteet, joissa funktiot eivät näytä olevan derivoituvia. Osoita erotusosamäärää käyttäen tarkasti, että funktiot eivät todella ole derivoituvia kyseisissä pisteissä (eli erotusosamäärällä ei ole näissä pisteissä raja-arvoa).

5. Funktion derivaatan $f'(x)$ riippuvuus lähtöarvosta x voidaan myös tulkita funktioksi, ja se voidaan monesti myös derivoida. Esimerkiksi funktion $f(x) = x^3$ derivaattafunktio on $f'(x) = 3x^2$ ja tämän derivaatta on funktion f *toinen derivaatta* $f''(x) = 6x$.

   Oletetaan, että eräs funktio g on määritelty ja derivoituva kaikilla reaaliluvuilla. Oletetaan lisäksi, että funktion g derivaatalla on yksi ainoa nollakohta $x = 1$. Oletetaan vielä, että toiselle derivaatalle pätee $g''(1) > 0$. Päättele näistä tiedoista funktion g derivaatan merkkikaavio ja selvitä, saako g pisteessä $x = 1$ suurimman tai pienimmän arvonsa. (Jos yleisen tapauksen käsitteleminen on hankalaa, voit käyttää mallina funktiota $g(x) = x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 19x + 8$.)

6. Osoita, että toisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ derivaatalla on korkeintaan yksi nollakohta (tasan yksi, jos vaaditaan $a \neq 0$). Päättele tästä, että f on kasvava vain yhdellä välillä ja vähenevä myös vain yhdellä välillä. Päättele edelleen, että f:llä voi olla korkeintaan kaksi nollakohtaa.

   Kolmannen asteen polynomifunktion derivaatta on toisen asteen polynomifunktio, jolla edellisen päättelyn mukaan on korkeintaan kaksi nollakohtaa. Päättele tästä, että kolmannen asteen polynomifunktiolla on korkeintaan kolme nollakohtaa. Osaatko todistaa, että n:nnen asteen polynomifunktiolla on korkeintaan n nollakohtaa?

7. Tarkista osittaisintegroinnin kaava

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x + C$$

   derivoimalla molemmat puolet. Käytä kaavaa löytääksesi funktion $h_1(x) = xe^x$ integraalifunktion. Käytä sitten kaavaa kahdesti löytääksesi funktion $h_2(x) = x^2e^x$ integraalifunktion. Osaatko määrittää funktion $h_n(x) = x^ne^x$ integraalifunktion yleisessä tapauksessa?

8. Osoita yhdistetyn funktion derivointisäännön avulla, että

$$\int \frac{g'(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \ln g(t) + C.$$

9. Niin sanottu *eksponentiaalisen kasvun differentiaaliyhtälö* on muotoa

$$g'(t) = kg(t),$$

missä k on jokin vakio. Yhtälö siis ilmaisee, että funktion g kasvunopeus on suoraan verrannollista funktion g arvoon kullakin ajanhetkellä (verrannollisuuskerroin on k). Ratkaise edellisen tehtävän kaavaa hyödyntäen funktion g lauseke. (Vastauksen pitäisi olla muotoa $g(t) = De^{kt}$, missä D riippuu integroimisvakiosta.)

10. Osoita tehtävän 7 kaavan avulla, että

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = 1 - \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, \mathrm{d}x.$$

Päättele tämän perusteella, että

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

11. Jos siirrytään reaalilukujen maailmasta kompleksilukuihin, saadaan uudentyyppisiä laskusääntöjä. Kompleksiluvut voidaan kirjoittaa muodossa $a + bi$, missä a ja b ovat reaalilukuja ja i on *imaginaariyksikkö*, jolle pätee $i^2 = -1$ (siis i ei ole reaaliluku). Kompleksiluvuilla esimerkiksi eksponenttifunktio ja trigonometriset funktiot voidaan yhdistää kaavalla

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{$\heartsuit$}$$

Kompleksilausekkeille pätevät samat derivointisäännöt kuin reaalilausekkeille, kun i:tä ajatellaan tavallisena vakiona. Esimerkiksi $D(ix^2) = 2ix$ jne. Derivoi nyt yllä esitetyn yhtälön ($\heartsuit$) molemmat puolet erikseen ja totea, että derivaatat ovat samat.

12. Selvitä kaikki piilotetut luvut maanantain 9.12. luentokysymyksestä 1.

13. Eräällä alueella maantiekiitäjien (Geococcyx californianus) ja kojoottien (Canis latrans) populaatiot riippuvat toisistaan seuraavalla tavalla. Jos $M(n)$ ja $K(n)$ ovat maantiekiitäjien ja kojoottien määrät vuonna n, seuraavana vuonna määrät ovat

$$\begin{cases} M(n+1) &= 1{,}14M(n) - 0{,}12K(n) \\ K(n+1) &= 0{,}08M(n) + 0{,}86K(n) \end{cases}$$

Esitä matriisi A, jolle pätee $AP(n) = P(n+1)$, missä $P(k)$ on populaatiomatriisi

$$P(k) = \begin{bmatrix} M(k) \\ K(k) \end{bmatrix}.$$

Oletetaan, että populaatiot ovat alussa $M(1) = 300$ ja $K(1) = 40$. Laske populaatiot seuraavana vuonna ja kolmen vuoden päästä. Onko populaatioilla tasapainotilaa, eli sellaisia alkupopulaatioita $M(1)$ ja $K(1)$, joille pätee $M(2) = M(1)$ ja $K(2) = K(1)$?

(*Huom.* Maantiekiitäjien ja kojoottien kilpailu perustuu piirrettyyn televisiosarjaan ja luvut on vedetty hatusta, mutta tosiasiassa matriiseja voidaan kyllä käyttää kuvatunlaiseen populaatioiden kehityksen tutkimiseen.)

14. Matriisin *determinantti* lasketaan seuraavasti: 2×2 -matriisin determinantille on kaava:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Isompien matriisien determinantit saadaan pienemmistä seuraavan säännön mukaisesti (muitakin laskutapoja on):

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} &= a_1 \det \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} - a_2 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} + a_3 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} &= a_1 \det \begin{bmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} - a_2 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \\ &+ a_3 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{bmatrix} - a_4 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} \qquad \text{jne.} \end{aligned}$$

Determinantin eräs merkitys on, että sen avulla voidaan selvittää, onko neliömatriisi kääntyvä. Neliömatriisi on nimittäin kääntyvä täsmälleen silloin, kun sen determinantti ei ole nolla. Selvitä tämän perusteella, ovatko matriisit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 13 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

kääntyviä. Osoita myös determinantin avulla, että yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} x \qquad\; - 2z &= \frac{13}{\sqrt{2}} \\ -3x + 5y + z &= \pi^{19} \\ 4x - 5y - z &= -2 + \sqrt[4]{3} \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu ratkaisematta sitä.

15. (Liittyy edellisessä tehtävässä esitettyihin determinantteihin.) Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 12 & 30 \end{bmatrix}$$

determinantti on $\det A = 30$. Tee matriisille A erilaisia eliminointimenetelmässä tarvittavia rivioperaatioita. Laske matriisin determinantti rivioperaatioiden jälkeen ja arvaa tulosten perusteella, miten determinantti muuttuu eri operaatioissa. Laske myös ykkösmatriisin determinantti. Päättele havaintojesi perusteella, että neliömatriisi on kääntyvä, jos ja vain sen determinantti ei ole 0.