Y100 (Matematiikka I)
Harjoitus 2 (2 sivua)
11.–15.11.2013

Tehtävissä 1–2 tarkastellaan funktiota

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}.$$

Kannattaa piirtää funktion kuvaaja.

1. Määritä ne lähtöarvot, joilla funktio f ei ole määritelty. Laske funktion arvoja noiden lähtöarvojen lähellä ja arvioi tulosten perusteella, miten funktio käyttäytyy.

2. Supista funktion f lauseke sillä nimittäjän termillä, jolla on korkein aste. Päättele sitten esimerkin 1.5 tapaan, miten funktio käyttäytyy hyvin suurilla tai pienillä lähtöarvoilla.

3. Piirrä funktion
$$g(x) = \begin{cases} x+5, & \text{kun } x \leq -2 \\ \frac{x^2-1}{x^2+x-2}, & \text{kun } -2 < x < 1 \\ x^2, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$$
kuvaaja. Mikä on g:n määrittelyjoukko? Päättele kuvaajan avulla, missä määrittelyjoukon pisteissä g on jatkuva. (Huomaa, että funktiossa g esiintyy sama lauseke kuin funktiossa f.)

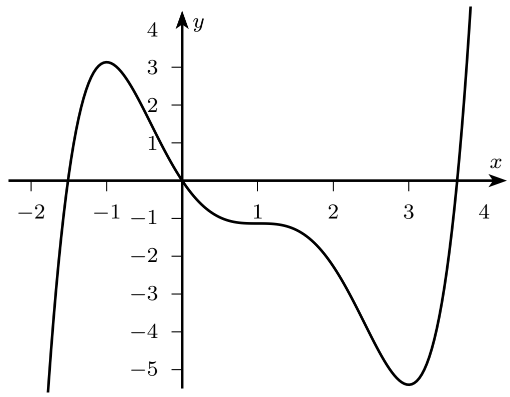
4. Piirrä funktion $f(x) = x^3 - x$ kuvaaja. Piirrä kuvaajalle sivuajasuorat kohtiin $x = 2$, $x = -1$ ja $x = 0$, ja määritä kuvasta sivuajien kulmakertoimet.

5. Derivoi seuraavat funktiot:
$$f(x) = x^3 - x, \qquad g(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x, \qquad h(x) = 5\sqrt[4]{x}.$$
Funktion h lausekkeessa täytyy muuttaa juurimerkintä potenssimerkinnäksi. Laske derivaattojen arvot lähtöarvoilla 2, -1 ja 0.

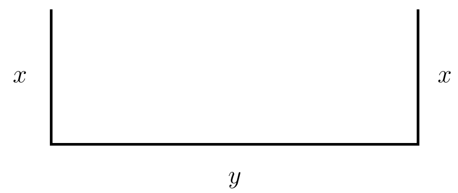
6. Piirrä seuraavien funktioiden kuvaajat ja päättele kuvaajien perusteella, millä lähtöarvoilla funktiot eivät ole derivoituvia.
$$f(x) = \sqrt[3]{x-1}, \qquad g(x) = |x|, \qquad k(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{kun } -1 \leq x \leq 1 \\ x, & \text{kun } x < -1 \text{ tai } x > 1. \end{cases}$$
(Merkintä $|x|$ tarkoittaa itseisarvoa, esimerkiksi $|3| = 3$ and $|-5| = 5$.)

7. Tarkastellaan tehtävän 5 funktiota g. Piirrä funktion kuvaaja ja määritä derivaatan avulla, milloin funktio on kasvava ja milloin vähenevä.

8. Seuraavassa kuvassa on funktion
$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$$
kuvaaja. Määritä kuvan perusteella funktion f derivaatan nollakohdat. Derivoi sitten funktion lauseke ja tarkista, että määrittämäsi nollakohdat olivat todellakin nollakohtia.



9. Halutaan rakentaa oheisen kuvan mukainen suorakulmion muotoinen aitaus, jonka yksi sivu on avoin. Aitamateriaalia on käytettävissä 60 metrin pituiseen aitaan. Jos aitauksen lyhyen sivun pituus on x, mikä on pitkän sivun pituus?



10. Jatkoa edelliseen tehtävään. Muodosta funktio, joka kuvaa aitauksen pinta-alan riippuvuutta lyhyen sivun pituudesta, kun aitamateriaalia on rajoitettu samalla tavalla kuin edellisessä tehtävässä. (Saamasi funktion tulee riippua vain lyhyen sivun pituudesta ja aitamateriaalin kokonaismäärästä.)

11. Etsi sellainen funktio f, jonka derivaattafunktio on

    a) $f'(x) = 2x$ b) $f'(x) = 5x^2$.

12. Olkoon p eräs ajasta t riippuva funktio. Funktion kasvunopeus ajanhetkellä $t = 1$ ilmaistaan derivaatan avulla muodossa $p'(1)$. Miten ilmaistaisiin

    a) puolet funktion kasvunopeudesta ajanhetkellä $t = 0$
    b) funktion kasvunopeus ajanhetkellä $t = 3$ on nolla
    c) funktion kasvunopeus ajanhetkellä t on puolet funktion arvosta samalla hetkellä.

    (Tässä ei siis tarvitse ratkaista mitään, vain ilmaista erilaisia funktion kasvuun liittyviä asioita matemaattisin symbolein.)