

Tehtävissä 1–7 tarkastellaan funktioita

$$f(x) = 2x^2 - 3, \quad g(x) = \frac{x+1}{x^2-3x}, \quad h(y) = y + \sqrt{y+1}$$

ja

$$k(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x < -1 \text{ tai } x > 1 \\ -x^2, & \text{kun } -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1. Laske funktioiden f , g , h ja k arvot lähtöarvoilla 0, -1 , 3 ja -2 . (Kaikkia arvoja ei voi laskea, mutta laske ne, mitkä voi.)
2. Selvitä funktioiden f , g , h ja k määrittelyjoukot eli millä lähtöarvoilla funktioiden arvo voidaan laskea.
3. Luku a on funktion f nollakohta, jos $f(a) = 0$. Selvitä funktioiden f , g , h ja k kaikki nollakohdat. (Vihje: Funktio h on hankalampi. Voit kirjoittaa yhtälön muodossa $\sqrt{y+1} = -y$ ja korottaa molemmat puolet toiseen. Tästä saat toisen asteen yhtälön, johon voit soveltaa ratkaisukaavaa.)
4. Piirrä funktioiden f , g , h ja k kuvaajat joko laskimella, tietokoneella tai käsin. (Jos teet tämän tietokoneella, yritä myös tulostaa saamasi kuvaajat.)
5. Funktio f on kasvava, jos suuremmilla lähtöarvoilla saadaan aina suurempi funktion arvo. Toisin sanoen $f(a) \geq f(b)$ aina kun $a > b$. Kasvavan funktion kuvaaja nousee vasemmalta oikealle siirryttäessä. Päätele edellisessä tehtävässä piirrettyjen kuvaajien avulla, missä (eli millä lähtöarvoilla) funktiot f , g , h ja k ovat kasvavia.
6. Funktio on vähenevä, jos suuremmilla lähtöarvoilla saadaan aina pienempi funktion arvo. Päätele kuvaajan avulla kuten edellisessä tehtävässä, missä funktiot f , g , h ja k ovat väheneviä.
7. Laske funktioiden f ja g arvoja suurilla ja pienillä lähtöarvoilla kuten 1000, 10000, -1000 jne. Mitä huomaat? Kasvavatko funktion arvot suuriksi vai pienenevätkö ne? Ovatko arvot positiivisia vai negatiivisia?
8. Käytännön tilanteissa funktiot kuvaavat yleensä jonkin suureen riippuvuutta toisesta. Esimerkiksi ulkolämpömittarin lukema tietyllä ajanhetkellä kuvaa lämpötilan riippuvuutta ajasta. Etsi tilanteita, joissa jokin funktio kuvaa seuraavien suureiden välisiä riippuvuuksia:
 - pituuden, syvyyden tai korkeuden (m) riippuvuus ajasta (s)
 - pinta-alan (m^2) riippuvuus ajasta (s)
 - lämpötilan ($^\circ\text{C}$) riippuvuus pituudesta, syvyydestä tai korkeudesta (m).

9. Muodosta sellaisen funktion lauseke, joka kuvaa

- a) pallon tilavuutta säteen funktiona
- b) kuution tilavuutta sivutahkon pinta-alan funktiona.

10. Määritellään funktiot

$$f(x) = x^2 \quad \text{ja} \quad g(x) = \sqrt{x} + 1.$$

Selvitä seuraavien yhdistettyjen funktioiden lausekkeet:

$$f \circ g, \quad g \circ f, \quad g \circ g, \quad f \circ g \circ f.$$

11. Annettu funktio voidaan aina tulkita yhdistetyksi funktioksi keksimällä sopiva ulko- ja sisäfunktio. Etsi seuraavissa tapauksissa sellainen sisäfunktio g , että yhdistetyllä funktiolla on annettu lauseke.

a) $f(g(x)) = (x^2 - 1)^3$ kun $f(x) = x^3$

b) $f(g(x)) = \frac{1}{x+2}$ kun $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

12. Sama kuin edellisessä tehtävässä, mutta nyt pitää keksiä sekä ulkofunktio f että sisäfunktio g . Ratkaisuvaihtoehtoja on monia.

a) $f(g(x)) = \sqrt{(x-1)^3}$

b) $f(g(x)) = \frac{1}{x^2+1} - 3$.