7 Matriisilaskenta

Kurssin loppuosassa tutustutaan matriiseihin ja niiden käyttöön yhtälöryhmien ratkaisemisessa.

7.1 Lineaariset yhtälöryhmät

Yhtälöryhmät liittyvät tilanteisiin, joissa on monta tuntematonta tekijää, jotka kaikki riippuvat toisistaan. Jos riippuvuudet tunnetaan, voidaan muodostaa yhtälöryhmä, jonka jokainen yhtälö kuvaa jotakin riippuvuutta. Nyrkkisääntönä yhtälöitä tarvitaan vähintään yhtä paljon kuin tuntemattomia, jotta tuntemattomat voidaan ratkaista täydellisesti.

Tietynlaisia yhtälöitä ja yhtälöryhmiä kutsutaan *lineaarisiksi*. Ne ovat sellaisia, joissa tuntemattomat esiintyvät vain vakioilla kerrottuna ja näistä on muodostettu summalausekkeita. Tuntemattomia ei siis esiinny esimerkiksi toiseen korotettuna tai neliöjuuren alla. Esimerkiksi seuraavat yhtälöryhmät ovat lineaarisia:

$$\begin{cases} x + y &= 2 \\ x - y &= 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + z &= -2 \\ -3x + 2y - z &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 4x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 12 \end{cases}$$

Kahdessa ensimmäisessä tuntemattomia on merkitty kirjaimilla x, y ja z, ja viimeisessä on käytetty merkintöjä x_1, x_2 ja x_3. Käytetyillä kirjaimilla ei tietysti ole väliä.

Yllä olevista yhtälöryhmistä ensimmäinen kuvaa tilannetta, jossa kahden luvun summa on 2 ja erotus 1. Ei ole vaikeaa keksiä, että sopivat luvut voisivat olla esimerkiksi $x = 3/2$ ja $y = 1/2$. Yhtälöryhmän ratkaiseminen tarkoittaakin sellaisten lukujen selvittämistä, jotka tuntemattomien paikalle sijoitettuna toteuttavat yhtä aikaa kaikki yhtälöryhmän yhtälöt.

Lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisuun on monia menetelmiä. Koulusta tuttuja ovat sijoitus- ja eliminointimenetelmä. Tällä kurssilla opetellaan eliminointimenetelmän kehittyneempi versio, niin kutsuttu *Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä*. Katsotaan aluksi, miten menetelmä toimii yksinkertaisen yhtälöryhmän tapauksessa.

Esimerkki 7.1. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y &= 2 \\ x - y &= 1 \end{cases}$$

järjestelmällisesti eliminointimenetelmällä.

Ensin on jälkimmäisestä yhtälöstä eliminoitava ensimmäinen termi. Tämä tehdään kertomalla ensimmäinen yhtälö luvulla -1 ja lisäämällä saatu tulos toiseen yhtälöön. Ensimmäinen yhtälö kerrottuna -1:llä on

$$-x - y = -2.$$

Lisätään tämä puolittain toiseen yhtälöön:

$$\begin{array}{rcr} -x-y &=& -2 \\ x-y &=& 1 \\ \hline 0-2y &=& -1 \end{array}$$

Toinen yhtälö muuttui lisäyksessä muotoon $-2y = -1$. Nyt yhtälöryhmä näyttää tältä:

$$\begin{cases} x+y &= \quad 2 \\ \quad -2y &= \; -1 \end{cases}$$

Huomaa, että ensimmäinen yhtälö kirjoitetaan vielä sellaisenaan. Jaetaan vielä toinen yhtälö luvulla -2, jolloin päästään eroon y:n kertoimesta:

$$\begin{cases} x+y &= \; 2 \\ \quad y &= \; \frac{1}{2} \end{cases}$$

Toinen yhtälö on nyt saatu muokattua muotoon $y = 1/2$, josta y:n arvo nähdään suoraan. Tämän avulla voitaisiin sitten selvittää myös x. Jatketaan kuitenkin vielä eliminointia siihen asti, että myös x nähdään suoraan. Tämä onnistuu kertomalla toinen yhtälö luvulla -1 ja lisäämällä tulos puolittain ensimmäiseen yhtälöön. Toinen yhtälö -1:llä kerrottuna on

$$-y = -\frac{1}{2}.$$

Lisätään tämä ensimmäiseen yhtälöön puolittain:

$$\begin{array}{rcr} -y &=& -\frac{1}{2} \\ x+y &=& 2 \\ \hline x+0 &=& \frac{3}{2} \end{array}$$

Ensimmäinen yhtälö muuttui nyt muotoon $x = 3/2$. Koko yhtälöpari on siis saatu muokatuksi seuraavanlaiseksi:

$$\begin{cases} x &= \; \frac{3}{2} \\ y &= \; \frac{1}{2} \end{cases}$$

Viimeisestä muodosta sekä x:n että y:n arvot nähdään suoraan. Tähän pääsemiseksi jouduttiin näkemään hieman vaivaa, mutta tulos on sen arvoinen. Tarkistetaan tulos vielä sijoittamalla saadut tuntemattomien arvot alkuperäisiin yhtälöihin:

$$\begin{aligned} & x+y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \text{ja} \qquad & x-y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Tulos on oikea.

Ennen kuin esitellään Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä yleisessä muodossaan, käydään läpi, miten yhtälöryhmiä voidaan esittää *matriisin* muodossa. Tämä helpottaa merkintöjä, koska tuntemattomia ei tarvitse koko ajan pitää mukana.

7.2 Yhtälöryhmän ratkaiseminen matriisimuodossa

Matriiseiksi kutsutaan tietynlaisia suorakulmaisia lukutaulukoita. Yhtälöryhmä voidaan esittää matriisina kokoamalla kaikki yhtälöryhmässä esiintyvät luvut samaan taulukkoon. Esimerkiksi yhtälöpari

$$\begin{cases} 3x - 2y &= -5 \\ x + 5y &= 3 \end{cases}$$

esitetään matriisina näin:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & | & -5 \\ 1 & 5 & | & 3 \end{bmatrix}.$$

Matriisin jokainen rivi vastaa yhtä yhtälöä ja jokainen sarake tietyn tuntemattoman kerrointa, viimeistä saraketta lukuunottamatta. Viimeiseen sarakkeeseen tulee yhtälön oikean puolen vakiot. (Viimeisen sarakkeen erottava pystyviiva ei ole välttämätön merkintä; se vain auttaa muistamaan, mitkä luvut olivat yhtälöiden oikealla puolella.)

Jos jossakin yhtälössä ei esiinny jotakin tuntemattomista, sen paikalle laitetaan matriisissa nolla. Esimerkiksi yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 12 \end{cases}$$

matriisi olisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 1 \\ -3 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 12 \end{bmatrix}.$$

Gaussin–Jordanin menetelmässä pyritään muokkaamaan yhtälöryhmän matriisia niin sanotuilla *rivitoimituksilla* siten, että tuloksena olisi matriisi, josta ratkaisut pystytään lukemaan suoraan. Rivitoimitukset on valittu niin, että ne säilyttävät yhtälöryhmän ratkaisut. Toisin sanoen rivitoimituksilla muokattuja matriiseja vastaavilla yhtälöryhmillä on täsmälleen samat ratkaisut kuin alkuperäisellä yhtälöryhmällä. Rivitoimitukset ovat

1) Jaetaan matriisissa jokin rivi jollain (nollasta poikkeavalla) luvulla.
2) Kerrotaan matriisissa jokin rivi jollain luvulla ja lisätään saatu rivi johonkin toiseen riviin.
3) Vaihdetaan matriisissa kahden rivin paikka.

Rivin kertominen tai jakaminen tarkoittaa kaikkien rivillä olevien lukujen kertomista tai jakamista. Kakkostoimituksessa ensimmäinen rivi – se, jota kerrotaan – ei muutu, vaan sitä ainoastaan käytetään muokkaamaan toista riviä. Esimerkki valaisee rivitoimituksien käyttöä.

Esimerkki 7.2. Ratkaistaan seuraava kolmen yhtälön yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = & 12 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 14 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisi on

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 12 \\ 3 & 1 & -1 & | & -2 \\ 2 & -3 & 2 & | & 14 \end{bmatrix}.$$

Aloitetaan nyt eliminointi. Ensimmäiseksi tarkastellaan matriisin ensimmäistä riviä. Jaetaan rivi 2:lla, jolloin saadaan ensimmäiseksi kertoimeksi 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 12 \\ 3 & 1 & -1 & | & -2 \\ 2 & -3 & 2 & | & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} :2 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 3 & 1 & -1 & | & -2 \\ 2 & -3 & 2 & | & 14 \end{bmatrix}.$$

Käytetään sitten ensimmäisen rivin ensimmäisen sarakkeen kerrointa eliminoimaan kertoimet samasta sarakkeesta kaikilta muilta riveiltä. Aloitetaan toisesta rivistä, jonka ensimmäisessä sarakkeessa on 3. Kerrotaan siis ensimmäinen rivi -3:lla, jolloin siitä tulee

$$-3 \quad -6 \quad -9 \quad | \quad -18 \ .$$

Tätä välitulosta ei merkitä matriisiin, vaan se lisätään suoraan toiseen riviin:

$$\begin{array}{cccc} -3 & -6 & -9 & | & -18 \\ 3 & 1 & -1 & | & -2 \\ \hline 0 & -5 & -10 & | & -20 \end{array}$$

Matriisi muuttuu siis eliminoinnissa muotoon

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & -5 & -10 & | & -20 \\ 2 & -3 & 2 & | & 14 \end{bmatrix}.$$

Jatketaan ensimmäisen sarakkeen lukujen eliminointia kertomalla ensimmäinen rivi luvulla -2 ja lisäämällä se kolmanteen riviin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & -5 & -10 & | & -20 \\ 2 & -3 & 2 & | & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & -5 & -10 & | & -20 \\ 0 & -7 & -4 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Välivaiheet jätettiin tässä kirjoittamatta.

Nyt on eliminoitu ensimmäinen kerroin toiselta ja kolmannelta riviltä (eli tuntematon x_1 on hävinnyt toisesta ja kolmannesta yhtälöstä). Siirrytään tarkastelemaan toista riviä. Toisen rivin ensimmäinen nollasta poikkeava kerroin on -5. Jaetaan rivi tällä luvulla:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & -5 & -10 & | & -20 \\ 0 & -7 & -4 & | & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ :(-5) \\ \\ \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & -7 & -4 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Toisen sarakkeen kerroin on ensimmäisellä rivillä 2 ja kolmannella -7. Ensimmäisen rivin luku saadaan eliminoitua kertomalla kertomalla toinen rivi -2:lla ja lisäämällä ensimmäiseen riviin. Kolmannen rivin luku puolestaan eliminoidaan kertomalla toinen rivi luvulla 7 ja lisäämällä kolmanteen riviin. Tehdään nämä operaatiot nyt peräkkäin (välivaiheet on jätetty kirjoittamatta):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & -7 & -4 & | & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \\ \cdot(-2) & | \cdot 7 \\ & | \leftarrow \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 10 & | & 30 \end{bmatrix}.$$

Jaetaan vielä viimeinen rivi luvulla 10:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 10 & | & 30 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ : 10 \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix},$$

ja lisätään se ensimmäiseen 1:llä kerrottuna sekä toiseen -2:lla kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \\ & | \leftarrow \\ \cdot 1 & | \cdot(-2) \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}.$$

Nyt on eliminointi suoritettu loppuun. Tuloksena saatiin matriisi, jossa pystyviivan vasemmalla puolella (eli yhtälöryhmän tuntemattomien puolella) on lävistäjällä ykkösiä, muualla nollia. Tämä matriisi vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & -2 \\ x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Tästä voidaan lukea suoraan yhtälöryhmän ratkaisu.

Kaikilla yhtälöryhmillä ei ole ratkaisua lainkaan. Tarkastellaan esimerkiksi yhtälöparia

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

Yhtälöpari on ristiriitainen, sillä jos $x + y = 1$, niin $2x + 2y = 2$, mutta toisessa yhtälössä vaaditaan muuta. Lukuja x ja y ei siis voi valita niin, että molemmat yhtälöt toteutuisivat.

Toisinaan yhtälöt toteutuvat useammilla kuin yksillä tuntemattomien arvoilla. Tällöin ratkaisuja on yhden sijasta itse asiassa ääretön määrä. Nämä ovatkin ainoat vaihtoehdot. Ilmaistaan tämä vielä lauseen muodossa.

Lause 7.3. *Lineaarisella yhtälöryhmällä on aina joko yksi, ääretön määrä tai ei yhtään ratkaisua.*

Tarkastellaan joitakin esimerkkejä.

Esimerkki 7.4. Ratkaistaan Gaussin–Jordanin menetelmällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x - y + z &= -2 \\ -3x + 2y - z &= 0 \\ -x + y &= -2 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisimuoto on

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Jaetaan aluksi ensimmäinen rivi 2:lla:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} :2 \\ \\ \\ \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

Lisätään sitten ensimmäinen rivi toiseen 3:lla kerrottuna ja kolmanteen sellaisenaan eli 1:llä kerrottuna:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{ll} \cdot 3 & |\cdot(-1) \\ \leftarrow & | \\ & |\leftarrow \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -3 \end{array}\right].$$

Ensimmäisen sarakkeen eliminoinnit on nyt suoritettu. Jatketaan jakamalla toinen rivi luvulla $\frac{1}{2}$, mikä on sama asia kuin kertominen kahdella:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ :1/2 \\ \\ \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -3 \end{array}\right].$$

Lisätään vielä toinen yhtälö ensimmäiseen 1/2:lla kerrottuna ja kolmanteen −1/2:lla kerrottuna:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{ll} \leftarrow & \\ \cdot 1/2 & |\cdot(-1/2) \\ & |\leftarrow \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eliminointi on nyt suoritettu loppuun. Tulosmatriisi vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x + z &= -4 \\ y + z &= -6 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

Viimeistä tuntematonta z ei voitu eliminoida ensimmäisestä ja toisesta yhtälöstä, koska yhtälön viimeiseltä riviltä hävisivät kaikki tuntemattomat samalla kertaa. Tällaista tuntematonta kutsutaan *vapaaksi muuttujaksi*, sillä sen arvo voi olla mitä vain. Voidaan esimerkiksi valita $z = 1$, jolloin viimeisen yhtälöryhmän yhtälöistä nähdään, että $x = -5$ ja $y = -7$. Toisaalta jos valitaan $z = 2$, niin $x = -6$ ja $y = -8$. Jokaisella z:n arvolla saadaan yhtälöryhmälle eri ratkaisu, joten ratkaisuja on ääretön määrä.

Esimerkki 7.5. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= -2 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisimuoto on

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right].$$

Ensimmäisen rivin ensimmäinen kerroin on valmiiksi 1. Lisätään ensimmäinen rivi toiseen -2:lla kerrottuna ja kolmanteen -1:llä kerrottuna:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{ll} \cdot(-2) & |\cdot(-1) \\ \leftarrow & | \\ & |\leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \end{array}\right].$$

Jaetaan toinen rivi puolittain -1:llä:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \end{array}\right] : (-1) \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \end{array}\right].$$

Lisätään sitten toinen rivi ensimmäiseen -1:llä kerrottuna ja kolmanteen 3:lla kerrottuna:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{ll} \leftarrow & \\ \cdot(-1) & |\cdot 3 \\ & |\leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right].$$

Tulokseksi saatu matriisi vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 &= -1 \\ x_2 + x_3 &= 4 \\ 0 &= 7 \end{cases}$$

Viimeiseltä riviltä eliminoituivat siis kaikki tuntemattomat, mutta oikealle puolelle jäi luku 7. Tämä on selvä ristiriita, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. Huomaa, että vaikka ensimmäisellä rivillä lukeekin $x_1 = -1$, tämä ei kerro mitään tuntemattoman x_1 arvosta, sillä yhtälöryhmää ratkaistaessa on kaikki yhtälöt ratkaistava yhtä aikaa. Jos johonkin kohtaan tulee ristiriita, se tarkoittaa, että koko yhtälöryhmä oli alun pitäen ristiriitainen eikä tuntemattomilla x_1, x_2 ja x_3 ole mitään arvoja, jotka toteuttaisivat yhtälöt.

7.3 Matriisien laskutoimitukset

Paitsi että matriiseja voi käyttää näppärästi apuna yhtälöryhmän merkitsemisessä, niillä on myös kokonaan oma elämänsä. Ne muistuttavat monessa suhteessa tavallisia lukuja. Matriiseja voidaan muun muassa laskea yhteen ja kertoa toisillaan, ja kullakin näistä operaatioista on oma merkityksensä myös yhtälöryhmien kannalta. Toisaalta matriisien laskutoimitukset eivät toimi aivan samalla tavalla kuin lukujen: esimerkiksi mitä tahansa matriiseja ei voi laskea yhteen eikä kertolaskun tulos ole välttämättä riippumaton kertomisjärjestyksestä.

Tutustutaan seuraavaksi kolmeen matriisien laskutoimitukseen. Nämä ovat

1) matriisien yhteenlasku
2) matriisin kertominen luvulla (ns. skalaarikertolasku)
3) matriisien kertolasku.

Matriisit lasketaan yhteen yksinkertaisesti lisäämällä kussakin paikassa olevat luvut kohdakkain yhteen. Tätä varten matriisien on oltava samanmuotoisia. Esimerkiksi matriisien

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

summa lasketaan näin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+(-1) \\ 3+0 & 4+1 \\ 5+3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Vähennyslasku suoritettaisiin samalla periaatteella.

Mikä tahansa matriisi voidaan kertoa tavallisella luvulla, mikä tarkoittaa matriisin jokaisen alkion kertomista samalla luvulla. Tätä kutsutaan *skalaarikertolaskuksi.* Kertomerkkiä ei yleensä käytetä luvun ja matriisin välissä. Esimerkiksi matriisi

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

kerrottuna luvulla 2 on

$$2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot(-1) \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriisien laskutoimituksista hankalin on matriisien kertolasku. Se ei nimittäin lainkaan muistuta tavallista lukujen kertolaskua. Tutustutaan kertolaskuun esimerkin avulla.

Esimerkki 7.6. Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Matriiseja merkitään yleensä isoilla kirjaimilla.) Katsotaan aluksi, miten saadaan tulomatriisin AB ensimmäisen rivin ensimmäisen sarakkeen luku. Tätä varten on otettava matriisista A ensimmäinen rivi ja matriisista B ensimmäinen sarake, kerrottava näiden alkiot keskenään ja laskettava yhteen. Tehdään tämä:

$$\begin{array}{cccl} 2 & -1 & 0 & (A\text{:n 1. rivi}) \\ 1 & -2 & 0 & (B\text{:n 1. sarake}) \\ \hline 2 & 2 & 0 & (\text{tulo}) \end{array}$$

Tulojen summa on $2+2+0=4$. Tämä on tulomatriisin ensimmäisen rivin ensimmäisen sarakkeen luku:

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}.$$

Lasketaan tämän jälkeen ensimmäisen rivin toisen sarakkeen luku kertomalla matriisin A ensimmäisen rivin alkiot matriisin B toisen sarakkeen alkioilla:

$$\begin{array}{cccl} 2 & -1 & 0 & (A\text{:n 1. rivi}) \\ 2 & -1 & 1 & (B\text{:n 2. sarake}) \\ \hline 4 & 1 & 0 & (\text{tulo}) \end{array}$$

Tulojen summa on $4+1+0=5$. Tämä on tulomatriisin ensimmäisen rivin toisen sarakkeen luku:

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ ? & ? \end{bmatrix}.$$

Jäljellä olevat luvut selvitetään samalla tavoin:

$$\begin{array}{cccl} 1 & 3 & 2 & (A\text{:n 2. rivi}) \\ 1 & -2 & 0 & (B\text{:n 1. sarake}) \\ \hline 1 & -6 & 0 & (\text{tulo}) \end{array}$$

Tulomatriisin toisen rivin ensimmäisen sarakkeen luku on siis $1-6+0=-5$. Jatketaan:

$$\begin{array}{cccl} 1 & 3 & 2 & (A\text{:n 2. rivi}) \\ 2 & -1 & 1 & (B\text{:n 2. sarake}) \\ \hline 2 & -3 & 2 & (\text{tulo}) \end{array}$$

Tulomatriisin toisen rivin toisen sarakkeen luku on $2-3+2=1$. Näin ollen tulomatriisi on

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriisikertolasku etenee yleisesti seuraavan kaavan mukaan: laskettaessa tulomatriisin rivillä i sarakkeessa j olevaa lukua otetaan ensimmäisestä matriisista i:s rivi ja toisesta j:s sarake, kerrotaan luvut kohdakkain toisillaan ja lasketaan yhteen. Jotta kertolaskut voidaan suorittaa, on seuraavan ehdon pädettävä:

> Ensimmäisen matriisin kullakin rivillä on yhtä monta lukua kuin toisen matriisin kussakin sarakkeessa.

Ehto voidaan lausua myös niin, että ensimmäisessä matriisissa on oltava yhtä monta saraketta kuin toisessa matriisissa on rivejä.

Jos matriisit A ja B ovat eri kokoisia, kertolasku voi onnistua toisin päin muttei toisin päin. Jos esimerkiksi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{ja} \qquad B = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \\ 15 & 16 \end{bmatrix},$$

niin tulo AB voidaan laskea mutta tuloa BA ei. Tässä kohden matriisien kertolasku poikkeaa tavallisesta lukujen kertolaskusta.

Jos matriisit A ja B ovat samankokoisia *neliömatriiseja*, eli niissä on molemmissa yhtä monta riviä kuin saraketta, ne voidaan aina kertoa keskenään molemmin päin. Silti lopputulos ei välttämättä ole sama. Tämän vuoksi on oltava erityisen tarkkana siinä, miten päin matriisien kertolaskun kirjoittaa.

Esimerkki 7.7. Olkoot $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ ja $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Tällöin

$$AB = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$$

mutta

$$BA = \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ -4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & -4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}.$$

Siispä $AB \neq BA$.

Esimerkki osoittaa, että vaikka kertolasku voitaisiin suorittaa kummin päin tahansa, tuttu laskusääntö $AB = BA$ ei välttämättä päde. Monet tutut säännöt kuitenkin pätevät myös matriisien laskutoimituksille, kuten esimerkiksi seuraavat:

1) $A(BC) = (AB)C$

2) $A(B + C) = AB + AC$

3) $(A + B)C = AC + BC$.

7.4 Käänteismatriisi

Matriiseja ei voi jakaa toisilla matriiseilla. Tämän puutteen korjaamiseksi voidaan toisinaan käyttää niin sanottua *käänteismatriisia*. Käänteismatriisi on ikään kuin käänteisluku: sillä kertominen vastaa jakolaskua. Ennen käänteismatriisiin tutustumista tarkastellaan kuitenkin sitä, miten kokonainen lineaarinen yhtälöryhmä voidaan ilmaista yhtenä matriisiyhtälönä.

Tarkastellaan yksinkertaista yhtälöparia

$$\begin{cases} 3x - 2y &= -5 \\ x + 5y &= 3 \end{cases}$$

Olemme jo oppineet, että tätä yhtälöparia vastaa matriisi

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & | & -5 \\ 1 & 5 & | & 3 \end{bmatrix}.$$

Esitetään yhtälöryhmä nyt vielä uudessa muodossa matriisikertolaskun avulla. Lasketaan sitä varten tulo matriiseista

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{ja} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Matriisissa A on yhtälöryhmän kertoimet, ja matriisi B sisältää yhtälöryhmän tuntemattomat. Tuloksi saadaan matriisikertolaskua käyttäen

$$AX = \begin{bmatrix} 3 \cdot x + (-2) \cdot y \\ 1 \cdot x + 5 \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 2y \\ x + 5y \end{bmatrix}.$$

Kertolaskun tuloksesta huomataan, että tulomatriisiin AX tulee itse asiassa yhtälöryhmän vasemman puolen lausekkeet. Jos kumpikin näistä lausekkeista on yhtä kuin vastaava yhtälöryhmän oikean puolen luku, yhtälöryhmä toteutuu. Yhtälöryhmä voidaan siis ilmaista muodossa $AX = B$, missä matriisi B sisältää yhtälöryhmän oikean puolen luvut:

$$B = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Nyt koko yhtälöryhmä voidaan ilmaista matriisiyhtälönä $AX = B$, eli

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Kun yhtälöryhmä esitetään matriisiyhtälönä $AX = B$, kaikki kertoimet korvataan yhdellä kerroinmatriisilla A, tuntemattomat yhdellä tuntemattomalla matriisilla X ja oikean puolen arvot yhdellä oikean puolen matriisilla B.

Matriisiyhtälö voidaan yrittää ratkaista samalla tavoin kuin tavallinen lukuyhtälö. Yhtälö $ax = b$, missä a ja b ovat reaalilukuja ja $a \neq 0$, ratkaistaisiin jakamalla puolittain luvulla a. Matriiseilla ei voi jakaa, joten emme voi ratkaista matriisiyhtälöä $AX = B$ samalla tavoin. Kuitenkin jakaminen on sama asia kuin käänteismatriisilla kertominen, joten voimme ratkaista lukuyhtälön myös seuraavasti:

$$\begin{aligned} ax &= b \\ a^{-1}ax &= a^{-1}b \\ 1 \cdot x &= a^{-1}b \\ x &= a^{-1}b. \end{aligned}$$

Pyritään tämän vuoksi määrittelemään matriisin *käänteismatriisi* ja käyttämään sitä matriisiyhtälön $AX = B$ ratkaisemiseen. Ensin tarvitaan kuitenkin lukua 1 vastaava matriisi.

Minkä tahansa kokoista neliömatriisia, joka sisältää lävistäjällään ykkösiä ja muualla nollia, kutsutaan *ykkösmatriisiksi* tai *yksikkömatriisiksi*. Sitä merkitään symbolilla I_n, missä n on rivien (ja sarakkeiden) lukumäärä. Ykkösmatriisi näyttää tältä:

$$\mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ykkösmatriisi on tuttu yhtälöryhmien ratkaisusta, sillä sellainen saadaan usein Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmän lopputuloksena yhtälöryhmää vastaavan matriisin vasemmalle puolelle.

Ykkösmatriisilla on se ominaisuus, että kun sillä kertoo mitä tahansa matriisia, kyseinen matriisi ei muutu. Toisin sanoen kaava

$$\mathrm{I}_n A = A$$

pätee kaikilla matriiseilla A, joilla kertolasku on mahdollinen. Ykkösmatriisilla kertominen toimii siis ikään kuin luvulla 1 kertominen.

Olkoon nyt A jokin neliömatriisi, jossa on n riviä (ja saraketta). Jos on olemassa matriisi C, jolle pätee

$$CA = \mathrm{I}_n,$$

matriisia C kutsutaan matriisin A *käänteismatriisiksi*. Tällöin sanotaan, että matriisi A on *kääntyvä* tai *säännöllinen*. Käänteismatriisia merkitään A^{-1}.

Esimerkki 7.8. Olkoot $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ ja $C = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Tällöin

$$CA = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + (-5) \cdot 1 & 3 \cdot 5 + (-5) \cdot 3 \\ -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}_2.$$

Siispä A on kääntyvä ja C on A:n käänteismatriisi eli $C = A^{-1}$.

Jos siis neliömatriisi A on kääntyvä, on olemassa jokin matriisi, jota merkitään A^{-1} ja jolle pätee $A^{-1}A = \mathrm{I}_n$. Käänteismatriisi toimii kuin käänteisluku: luvun ja sen käänteisluvun tulo on nimittäin 1. Nollalla ei ole käänteislukua, eikä kaikilla matriiseillakaan ole käänteismatriisia. Silloin kun käänteismatriisi A^{-1} kuitenkin on olemassa, sen avulla voidaan ratkaista matriisiyhtälö $AX = B$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ \mathrm{I}_n X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B. \end{aligned}$$

Esimerkki 7.9. Tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases} 2x + 5y &= -5 \\ x + 3y &= 2 \end{cases}$$

Yhtälöryhmä vastaa matriisiyhtälöä $AX = B$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Esimerkissä 7.8 todettiin, että matriisin A käänteismatriisi on

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

joten matriisiyhtälön $AX = B$ ratkaisu on

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot (-5) - 5 \cdot 2 \\ -1 \cdot (-5) + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Toisin sanoen $x = -25$ ja $y = 9$. Tarkistetaan vielä tulos:

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 2 \cdot (-25) + 5 \cdot 9 = -50 + 45 = -5, \\ x + 3y &= -25 + 3 \cdot 9 = -25 + 27 = 2. \end{aligned}$$

Tulos on oikein.

7.5 Käänteismatriisin löytäminen

Käänteismatriisin löytämiseksi voidaan soveltaa Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmää. On nimittäin niin, että jos jokin matriisi A saadaan rivioperaatioilla ykkösmatriisiksi, samat rivioperaatiot ykkösmatriisiin sovellettuina tuottavat käänteismatriisin A^{-1}.

Esimerkki 7.10. Etsitään esimerkissä 7.8 esiintynyt matriisin $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ käänteismatriisi. Rivioperaatiot kannattaa suorittaa yhtä aikaa sekä matriisille A että ykkösmatriisille, joten kirjoitetaan nämä vierekkäin yhdeksi matriisiksi. (Voidaan käyttää pystyviivaa eri puolten erottamiseen.) Eliminointimenetelmää on jo harjoiteltu, joten sen suorittaminen käy vaivatta:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 2 & 5 & | & 1 & 0 \\ 1 & 3 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} :2 \\ \end{matrix} &&\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 5/2 & | & 1/2 & 0 \\ 1 & 3 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \leftarrow \end{matrix} \\
\rightsquigarrow &\begin{bmatrix} 1 & 5/2 & | & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & | & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ :1/2 \end{matrix} &&\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 5/2 & | & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & | & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \cdot(-5/2) \end{matrix} \\
\rightsquigarrow &\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3 & -5 \\ 0 & 1 & | & -1 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Vasemman puolen matriisista saatiin ykkösmatriisi, joten oikealle puolelle syntyi käänteismatriisi A^{-1}. Kuten nähdään, saatu käänteismatriisi on sama kuin esimerkissä 7.8.

Yhtälöryhmiä ratkaistaessa huomattiin, että aina vasemmalle puolelle ei saada ykkösmatriisia. Jokin rivi saattaa nimittäin hävitä kokonaan eliminoinnin aikana. Tällaisessa tapauksessa matriisi ei ole kääntyvä eli sillä ei ole lainkaan käänteismatriisia. Tilanne on samankaltainen kuin luvulla 0, jolla ei ole lainkaan käänteislukua.

Esimerkki 7.11. Tarkastellaan matriisia $S = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{smallmatrix}\right]$. Eliminoimalla yhdistettyä matriisia $[S \mid \mathrm{I}_2]$ saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ -3 & 6 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vasemmanpuoleisen matriisin toiselta riviltä hävisivät kaikki alkiot, joten eliminointia ei voida jatkaa. Matriisia S ei saatu eliminoimalla ykkösmatriisiksi, joten sillä ei ole käänteismatriisia.

Jos matriisi A ei ole kääntyvä, matriisiyhtälöä $AX = B$ ei voida ratkaista käänteismatriisin avulla. Käytännössä tämä tarkoittaa joko sitä, että matriisiyhtälöllä ei ole lainkaan ratkaisuja, tai sitä, että ratkaisuja on ääretön määrä. Tällöin matriisiyhtälöä vastaava yhtälöryhmä on ratkaistava Gaussin–Jordanin menetelmällä, josta voidaan päätellä, onko ratkaisuja ääretön määrä vai ei lainkaan.