6 Joitain erityisfunktioita

Tässä luvussa tutustutaan joihinkin luonnontieteissä tarpeellisiin funktioihin. Aluksi esitellään funktioiden matemaattiset ominaisuudet ja sen jälkeen tarkastellaan esimerkkejä niiden käytöstä.

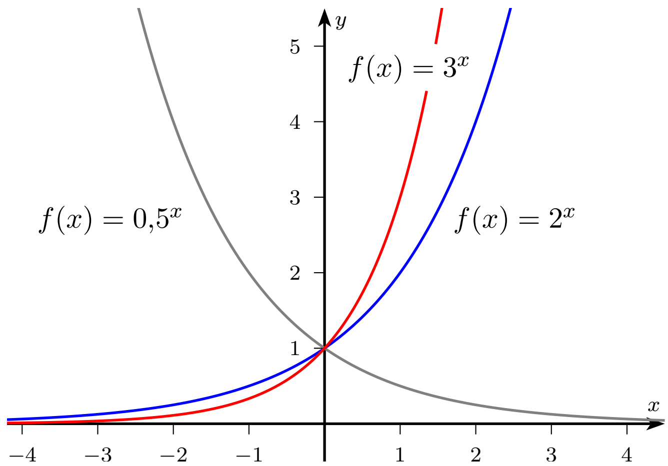
6.1 Eksponenttifunktiot

Potenssifunktioksi kutsutaan sellaista funktiota, jossa lähtöarvo korotetaan johonkin vakiopotenssiin. Esimerkiksi $f(x) = x^2$ on potenssifunktio. Kun jokin vakio korotetaan lähtöarvon ilmaisemaan potenssiin, puhutaan *eksponenttifunktiosta*. Eksponenttifunktioita ovat esimerkiksi

$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x, \quad h(x) = 10^x.$$

Kuhunkin eksponenttifunktioon liittyy vakio, joka korotetaan potenssiin. Tätä lukua nimitetään *kantaluvuksi*. Kantaluku on aina positiivinen, koska negatiivisia lukuja ei voi korottaa mihin tahansa potenssiin. Eksponenttifunktiota, jonka kantaluku on a, nimitetään *a-kantaiseksi* eksponenttifunktioksi.

Jokainen eksponenttifunktio on määritelty ja jatkuva kaikilla reaaliluvuilla. Eksponenttifunktioiden arvot ovat lisäksi aina positiivisia, joten eksponenttifunktioilla ei ole nollakohtia. Eksponenttifunktioiden kasvavuus riippuu kantaluvusta: jos kantaluku on suurempi kuin 1, eksponenttifunktio on kaikkialla aidosti kasvava, ja jos kantaluku on pienempi kuin 1, eksponenttifunktio on aidosti vähenevä. Seuraavaan kuvaan on piirretty eksponenttifunktioiden kuvaajia eri kantaluvuilla.



Eksponenttifunktioita käsiteltäessä potenssien laskusäännöt ovat käyttökelpoisia. Ainakin seuraavat on syytä palauttaa mieleen:

1) $a^{x+y} = a^x a^y$

2) $(a^x)^y = a^{xy}$

3) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

4) $a^0 = 1.$

Kaavat seuraavat potenssilaskun määritelmistä yleistämällä. Koska $a^0 = 1$ kaikilla nollasta poikkeavilla luvuilla a, tiedetään, että jokaisen eksponenttifunktion arvo lähtöarvolla 0 on 1. Tämä nähtiin myös edellä esitetyistä kuvaajista.

Kun kantaluvuksi valitaan ns. *Neperin luku* e, jonka likiarvo on 2,71828..., saadaan aivan erityinen eksponenttifunktio, jota nimitetään *luonnolliseksi* eksponenttifunktioksi. Sen lauseke on siis

$$f(x) = e^x.$$

Koska e on ykköstä suurempi, luonnollinen eksponenttifunktio on kasvava. Toisinaan luonnolliselle eksponenttifunktiolle käytetään myös erityismerkintää exp. Tällöin kirjoitettaisiin

$$f(x) = \exp x \quad \text{tai} \quad f(x) = \exp(x).$$

Esimerkiksi laskimissa ja tietokoneohjelmissa merkintä $\exp(x)$ on yleinen. Se siis tarkoittaa aivan samaa kuin e^x eli luku 2,71828... korotettuna potenssiin x.

Tavallisen eksponenttifunktion tärkein ominaisuus on, että sen derivaattafunktio on sama kuin funktio itse. Toisin sanoen

$$D\, e^x = e^x.$$

Myöhemmin nähdään, miten tämä ominaisuus liittyy niin sanottuun eksponentiaaliseen kasvuun. Koska eksponenttifunktio ei muutu derivoitaessa, ei se muutu myöskään integroitaessa:

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C.$$

Integroimisvakio on toki lisättävä.

Esimerkki 6.1. Luonnollinen eksponenttifunktio esiintyy usein yhdistetyssä muodossa, jossa eksponentissa on jonkin toisen funktion lauseke. Tarkastellaan esimerkiksi funktiota

$$h(x) = e^{2x+1}.$$

Tässä sisäfunktiona on $g(x) = 2x + 1$ ja ulkofunktiona eksponenttifunktio $f(x) = e^x$. Tällainen funktio on suoraviivaista derivoida yhdistetyn funktion derivoimissäännöllä. Sisäfunktion derivaatta on $g'(x) = 2$ ja ulkofunktion $f'(x) = e^x$, joten

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(2x+1) \cdot g'(x) = e^{2x+1} \cdot 2 = 2e^{2x+1}.$$

Eksponenttifunktioiden yhteydessä myös tulon derivointikaavasta on todellista hyötyä. Esimerkiksi funktio $k(x) = x^2 e^x$ on tulo potenssifunktiosta $f(x) = x^2$ ja eksponenttifunktiosta $g(x) = e^x$. Tulon derivoimissäännön nojalla saadaan

$$k'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 2xe^x + x^2e^x.$$

Huomaa, miten luonnollinen eksponenttifunktio ei tosiaan muutu derivoitaessa miksikään.

Esimerkki 6.2. Eksponenttifunktion yhdistelmien integrointi toisinaan onnistuu, toisinaan ei. Esimerkiksi funktion $h(x) = e^{3x}$ tyyppiset funktiot, joissa eksponenttiin on yhdistetty jokin ensimmäisen asteen polynomifunktio, voidaan aina integroida yhdistetyn funktion integroimissäännöllä. Sisäfunktioksi valitaan $g(x) = 3x$ ja ulkofunktioksi $f(x) = e^x$. Sisäfunktio derivaatta olisi $g'(x) = 3$. Koska sisäfunktion derivaatta on vakio, se voidaan järjestää lausekkeeseen kertomalla ja jakamalla luvulla 3. Tällöin päästään käyttämään yhdistetyn funktion integroimissääntöä. Lasku etenee seuraavasti:

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{3}\cdot e^{3x}\cdot 3\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3}\cdot f'(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}f'(g(x)) + C = \frac{1}{3}e^{3x} + C.\end{aligned}$$

Lopputulosta tarkasteltaessa huomataan, että luonnollinen eksponenttifunktio ei muuttunut integroitaessa mihinkään, ei myöskään sen sisäfunktio. Eteen vain ilmestyi sisäfunktion derivaatan käänteisluku. Integroimisvakiota ei myöskään ole syytä unohtaa.

6.2 Logaritmifunktiot

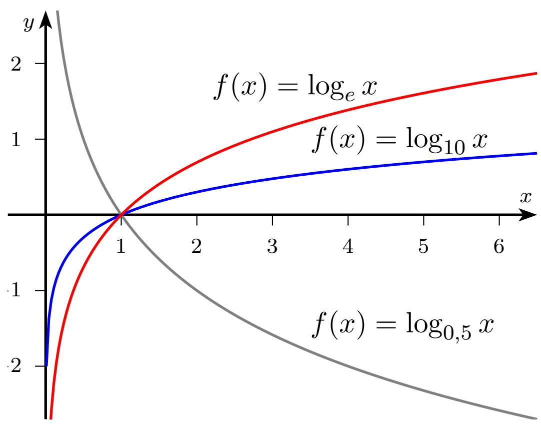
Luvun logaritmi jonkin kantaluvun suhteen kertoo sen, mihin potenssiin kantaluku tulisi korottaa, jotta tuloksena olisi kyseinen luku. Esimerkiksi 2-kantainen logaritmi luvusta 8 on 3, sillä $2^3 = 8$. Tätä logaritmia merkitään $\log_2 8$. Totesimme siis juuri, että $\log_2 8 = 3$.

Sellaista funktiota, jonka arvot ovat logaritmeja kantaluvun a suhteen, nimitetään a-kantaiseksi *logaritmifunktioksi*. Esimerkiksi funktio

$$f(x) = \log_2 x$$

on 2-kantainen logaritmifunktio.

Logaritmifunktiot on määritelty ainoastaan positiivisilla lähtöarvoilla. Ne ovat kaikkialla jatkuvia, ja niiden kasvavuus riippuu kantaluvusta samalla tavoin kuin eksponenttifunktioilla: jos kantaluku on suurempi kuin 1, logaritmifunktio on kasvava, ja jos kantaluku on pienempi kuin 1, logaritmifunktio on vähenevä. Jokainen logaritmifunktio saa lähtöarvolla 1 arvon nolla, ja tämä on logaritmifunktion ainoa nollakohta. Seuraavassa kuvassa on logaritmifunktioiden kuvaajia eri kantaluvun arvoilla.



Logaritmi palauttaa aina kantaluvun eksponentin: jos $2^x = 5$, niin $\log_2 5 = x$. Täten logaritmeja voidaan käyttää ratkaistaessa eksponenttifunktion lähtöarvoja samaan tapaan kuin juuria käytetään ratkaistaessa potenssifunktioiden lähtöarvoja. Logaritmifunktiota kutsutaankin eksponenttifunktion *käänteisfunktioksi.*

Esimerkki 6.3. Selvitetään, milloin funktio $f(x) = 3^{x+2}$ saa arvon 60. Tätä varten on ratkaistava yhtälö

$$3^{x+2} = 60.$$

Logaritmin määritelmän mukaan 3-kantainen logaritmi luvusta 60 kertoo eksponentin, johon korotettuna luvusta 3 tulee 60. Kun tätä sovelletaan yllä olevaan yhtälöön, saadaan

$$\log_3 60 = x + 2,$$

josta edelleen $x = \log_3 60 - 2 \approx 1{,}73$.

Sama toimii myös toisinpäin: jos etsitään logaritmifunktion lähtöarvoja, voidaan turvautua eksponenttifunktioon. Tarkastellaan esimerkiksi yhtälöä

$$\log_2 x = 7.$$

Logaritmin määritelmän nojalla 2-kantainen logaritmi luvusta x kertoo, mihin potenssiin luku 2 on korotettava, jotta saataisiin x. Yhtälöön sovellettuna tästä seuraa, että

$$2^7 = x.$$

Siispä $x = 2^7 = 128$.

Logaritmeja käsiteltäessä on hyötyä logaritmien laskusäännöistä. Ne on mahdollista johtaa vastaavista eksponenttien laskusäännöistä. Huomionarvoisia ovat erityisesti seuraavat:

$$\begin{array}{llll} 1) & \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y & 3) & \log_a(1/x) = -\log_a x \\ 2) & \log_a x^y = y \log_a x & 4) & \log_a 1 = 0. \end{array}$$

Joidenkin kantalukujen tapauksissa on tapana käyttää omaa merkintää. Esimerkiksi

$$\log_{10} x = \lg x \quad \text{ja} \quad \log_e x = \ln x.$$

Usein näkee myös käytettävän merkintää log ilman kantalukua. Tällöin tarkoitetaan yleensä joko 10-kantaista tai e-kantaista logaritmia.

Erikantaisista logaritmeista matematiikassa tärkein on e-kantainen eli *luonnollinen* logaritmi. Sille käytetään yleensä merkintää ln (tai joskus log). Luonnollinen logaritmifunktio on luonnollisen eksponenttifunktion käänteisfunktio.

Luonnollisen logaritmifunktion derivaatalle pätee

$$D \ln x = \frac{1}{x}.$$

Tämä derivointikaava mahdollistaa lopultakin lausekkeen $1/x$ eli x^{-1} integroimisen. On kuitenkin huomattava, että edellisen kaavan sekä yhdistetyn funktion derivointisäännön nojalla pätee

$$D \ln(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Tämän vuoksi funktion $f(x) = 1/x$ integraalifunktiolla on kaksi mahdollisuutta: joko $\ln x + C$ tai $\ln(-x) + C$. Se, kumpi valitaan, selviää asiayhteydestä. Integroimiskaavassa molemmat vaihtoehdot voidaan ottaa huomioon käyttämällä itseisarvomerkkejä:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$$

Esimerkki 6.4. Integroidaan funktiota $f(x) = \frac{1}{x}$ välillä $[1, e]$. Funktion f integraalifunktio on $\ln|x|$. (Integroimisvakiota ei nyt tarvitse huomioida, koska kyse on määrätystä integraalista.) Koska integroimisvälillä kaikki lähtöarvot ovat positiivia, integraalifunktio on itse asiassa $\ln x$. Täten

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big/_1^e \ln x = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Integroidaan sitten samaa funktiota välillä $[-2, -1]$. Koska nyt lähtöarvot ovat negatiivisia, oikea integraalifunktio on $\ln(-x)$. Siispä

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big/_{-2}^{-1} \ln(-x) = \ln 1 - \ln 2 = 0 - \ln 2 = -\ln 2.$$

Entä jos integroimisväli olisi sellainen, joka sisältää sekä positiivisia että negatiivisia lukuja? Tällöin väli sisältäisi myös luvun 0, mutta siinä ei olisi järkeä, sillä funktio f ei ole määritelty nollassa. Kyseistä tapausta ei siis esiinny, joten integraalifunktio voidaan aina valita joko positiivisten tai negatiivisten lähtöarvojen mukaan.

6.3 Kantaluvun vaihtaminen

Toisinaan on samassa tilanteessa käsiteltävä useita eksponentti- tai logaritmifunktioita, joilla voi olla eri kantaluvut. Myös esimerkiksi laskimissa on yleensä oma näppäimensä vain muutamalle eri logaritmifunktiolle. Sen vuoksi on hyvä tietää, miten eksponentti- ja logaritmifunktioiden kantalukuja voidaan muuttaa.

Tarkastellaan ensiksi eksponenttifunktiota ja oletetaan, että halutaan ilmaista funktio $f(x) = 2^x$ luonnollisen eli e-kantaisen eksponenttifunktion avulla. Tässä käytetään hyväksi potenssin potenssin kaavaa, jonka mukaan

$$(e^k)^x = e^{kx}.$$

Jos nyt löydettäisiin sellainen luku k, jolle pätee $e^k = 2$, saataisiin edellisen kaavan perusteella yhtälö

$$e^{kx} = (e^k)^x = 2^x.$$

Tähän kysymykseen vastaa logaritmi: luku k, jolle pätee $e^k = 2$, on luvun 2 e-kantainen logaritmi eli $\ln 2$. Lopulta saadaan siis

$$f(x) = 2^x = e^{kx} = e^{(\ln 2)x}.$$

Olemme siis ilmaisseet 2-kantaisen eksponenttifunktion e-kantaisen eksponenttifunktion avulla.

Esimerkki 6.5. Derivoidaan eksponenttifunktio $f(x) = 2^x$. Tähän mennessä opitun perusteella osaamme derivoida vain luonnollisen eksponenttifunktion. Kantalukua vaihtamalla saadaan voidaan kuitenkin kirjoittaa funktion f lauseke luonnollisen eksponenttifunktion avulla:

$$f(x) = 2^x = e^{(\ln 2)x}.$$

Nyt derivoitavana lausekkeena onkin yhdistetty funktio, jossa sisäfunktion lauseke on $\ln 2 \cdot x$ ja ulkofunktion lausekkeena luonnollisen eksponenttifunktion lauseke e^x. Tämä osataan derivoida (vrt. esimerkkiin 6.1):

$$f'(x) = D\big(e^{(\ln 2)x}\big) = e^{(\ln 2)x} \cdot \ln 2 = e^{(\ln 2)x}.$$

Haluttaessa voidaan vielä lopuksi palata 2-kantaiseen esitykseen:

$$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2.$$

Yleisiä eksponenttifunktioita derivoitaessa tarvitaan siis apuna luonnollista logaritmia.

Eksponenttifunktion kantaluvun vaihtaminen on tarpeellista, jos on tarpeen derivoida tai integroida muita kuin luonnollisia eksponenttifunktioita tai jos joudutaan jostakin syystä vertailemaan kahta erikantaista eksponenttifunktiota keskenään. Logaritmifunktioiden tapauksessa kantaluvun vaihtaminen on kuitenkin vielä tärkeämpi taito.

Oletetaan, että halutaan ilmaista funktio $g(x) = \log_3 x$ luonnollisen logaritmifunktion avulla. Logaritmi $\log_3 x$ vastaa kysymykseen, mihin potenssiin 3 pitää korottaa, jotta saataisiin x. Tämän mukaan siis

$$3^{\log_3 x} = x.$$

Vaihdetaan tässä eksponenttiesityksessä kantaluvuksi e samalla tavalla kuin edellä, jolloin saadaan yhtälö

$$e^{(\ln 3)(\log_3 x)} = x.$$

Nyt käytetään jälleen logaritmin määritelmää: luonnollinen logaritmi luvusta x on se luku, johon e pitää korottaa, jotta saataisiin x. Viimeisen yhtälön perusteella kyseinen luku on $(\ln 3)(\log_3 x)$. On siis saatu

$$\ln x = (\ln 3)(\log_3 x).$$

Jakamalla yhtälö puolittain luvulla $\ln 3$ saadaan lopulta esitys

$$g(x) = \log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}.$$

Logaritmifunktion kannanvaihtoa tarvitaan niin usein, että esitetään se vielä yleisessä muodossa kaavana:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Esimerkki 6.6. Ratkaistaan yksinkertainen eksponenttiyhtälö $4^x = 10$. Koska $4^1 = 4$ ja $4^2 = 16$, ratkaisu on oletettavasti ykkösen ja kakkosen välissä. Logaritmin määritelmän perusteella ratkaisu on $x = \log_4 10$, mutta laskimessa on harvoin toimintoa mielivaltaisen logaritmin laskemiseksi. Laskimen näppäimistä löytyy yleensä vain luonnollinen logaritmi (ln tai log) sekä toisinaan myös 10-kantainen logaritmi (lg, joskus myös log!). Joudumme siis vaihtamaan kantaluvun. Vaihdetaan logaritmi vaikkapa luonnolliseksi, jolloin se voidaan laskea laskimella:

$$x = \log_4 10 = \frac{\ln 10}{\ln 4} \approx \frac{2{,}303}{1{,}386} \approx 1{,}66.$$

Yhtälön voisi ratkaista myös toisella tavalla. Ottamalla alkuperäisen yhtälön $4^x = 10$ molemmilta puolilta luonnollinen logaritmi saadaan yhtäpitävä yhtälö

$$\ln 4^x = \ln 10.$$

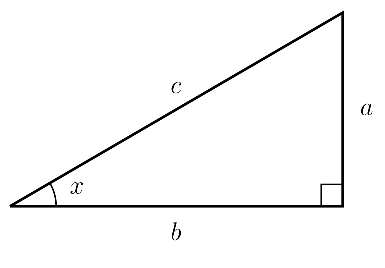
Tähän voidaan käyttää logaritmien laskusääntöä, jonka mukaan $\ln 4^x = x \ln 4$, ja tästä voidaan ratkaista x. Koko päättely etenee seuraavasti:

$$\begin{aligned} 4^x = 10 &\iff \ln 4^x = \ln 10 \\ &\iff x \ln 4 = \ln 10 \quad | : \ln 4 \\ &\iff x = \frac{\ln 10}{\ln 4}. \end{aligned}$$

Lopullinen likiarvo on tietenkin täsmälleen sama kuin edellä.

6.4 Trigonometriset funktiot

Trigonometrisia funktioita ovat koulusta tutut sini-, kosini- ja tangenttifunktiot. Sana ”trigonometria” tulee kreikan kielestä ja tarkoittaa kolmion mittaamista (’trigōnon’ = kolmio, ’metrein’ = mitata). Trigonometriset funktiot ilmaisevat suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksien suhteiden riippuvuutta annetusta kulmasta. Jos lähtöarvona on jokin kulman suuruus, esimerkiksi sinifunktion arvo tuolla lähtöarvolla saadaan seuraavasti: asetetaan kyseinen kulma toiseksi kulmaksi mihin tahansa suorakulmaiseen kolmioon ja luetaan tuon kulman vastaisen kateetin ja hypotenuusan pituuksien suhde. Tuo suhde on sinifunktion arvo eli annetun kulman sini. Trigonometristen funktioiden perinteiset määritelmät näkyvät oheisesta kuvasta.



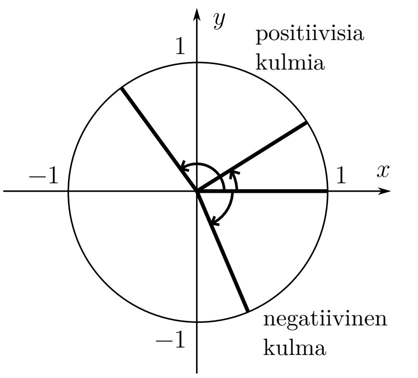
$$\sin x = a/c$$

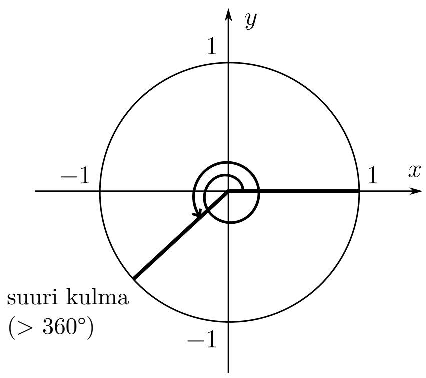
$$\cos x = b/c$$

$$\tan x = a/b$$

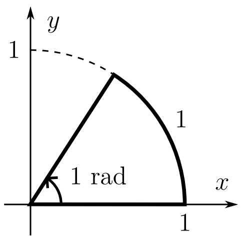
Suorakulmaisen kolmion avulla voidaan kuitenkin määrittää trigonometristen funktioiden arvoja vain tietyillä kulman arvoilla, koska suorakulmaisessa kolmiossa kaikki muut kuin suora kulma ovat pienempiä kuin 90 astetta. Jos siis haluttaisiin määritellä sinin arvo vaikkapa lähtöarvolla 130, törmättäisiin vaikeuksiin. Asia korjaantuu määrittelemällä trigonometriset funktiot uudelleen ns. *yksikköympyrän* avulla.

Yksikköympyrä on koordinaatistoon piirretty ympyrä, jonka keskipiste on origossa ja säde on 1. Tähän ympyrään sijoitetaan kulmia siten, että niiden kärki on origossa ja toinen kylki x-akselin positiivisella osalla. Kulman suuruus tulkitaan positiiviseksi, jos se aukeaa x-akselilla olevasta kyljestä vastapäivään, ja negatiivinen, jos se aukeaa myötäpäivään. Yksikköympyrään voidaan piirtää myös täyskulmaa (360°) suurempi kulma kiertämällä ympyrä ympäri mahdollisesti useampaankin kertaan.





Matematiikassa kulman suuruus ilmoitetaan tavallisesti *radiaaneina*. Radiaani on sen kokoinen kulma, että yksikköympyrässä sitä vastaavan kaaren pituus on sama kuin kulma itse. Kulman koko on siis yksi radiaani, jos sitä vastaavan yksikköympyrän kaaren pituus on 1.

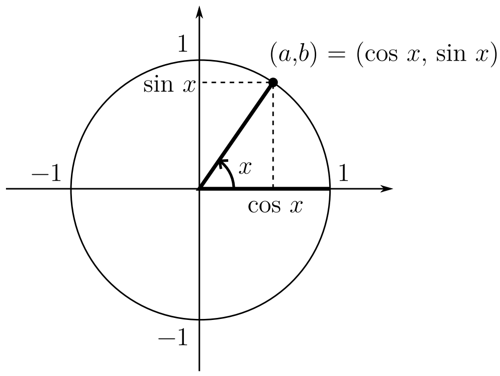


Radiaaneja käytettäessä yksikköä ei yleensä merkitä lainkaan näkyviin. Joskus saatetaan selvyyden vuoksi käyttää lyhennettä "rad". Koska yksikköympyrän koko kaaren pituus on 2π, koko ympyränkaarta vastaavan kulman eli täyskulman suuruus on 2π radiaania. Toisaalta täyskulma on 360 astetta. Tästä saadaan radiaanien ja asteiden välille seuraava muunnoskaava:

$$\text{kulma radiaaneina} = \text{kulma asteina} \cdot \frac{\pi}{180}.$$

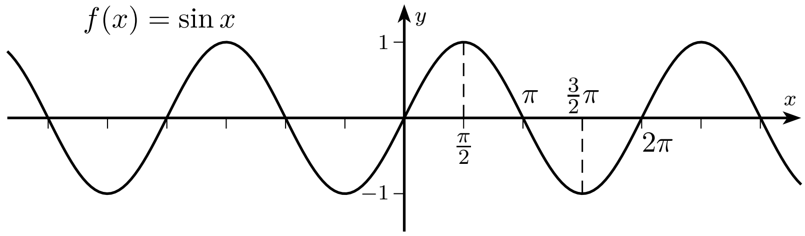
6.5 Sinifunktio ja kosinifunktio

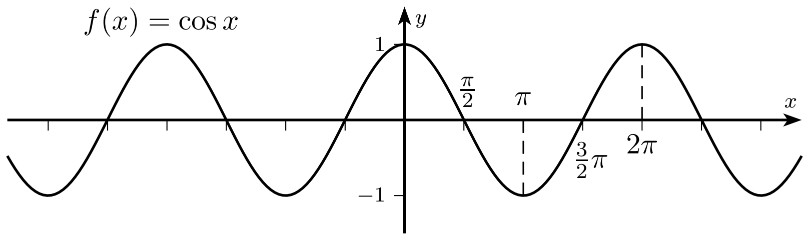
Sini- ja kosinifunktiot voidaan määritellä yksikköympyrän avulla seuraavasti. Olkoon x lähtöarvo. Piirretään yksikköympyrään kulma, jonka suuruus on x siten, että sen alkukylki tulee x-akselin positiiviselle osalle. Oletetaan, että loppukylki leikkaa yksikköympyrän pisteessä (a, b). Tällöin sinifunktion arvo $\sin x$ on tuon leikkauspisteen y-koordinaatti eli a, ja kosinifunktion arvo $\cos x$ on saman leikkauspisteen y-koordinaatin arvo eli b. Määritelmät näkyvät myös oheisesta kuvasta.



Määritelmästä nähdään, että sini- ja kosinifunktion arvot sijoittuvat välille $[-1, 1]$, sillä yksikköympyrällä olevan pisteen x- ja y-koordinaatit eivät voi olla suurempia kuin 1 tai pienempiä kuin -1. Kun negatiiviset kulmat ja yli täysympyrän menevät kulmat tulkitaan aiemmin selitetyllä tavalla, sini- ja kosinifunktiot voidaan määritellä kaikilla reaaliluvuilla. Niiden arvot tosin toistuvat aina täyskulman välein, kun yksikköympyrään piirretyn kulman loppukylki palaa taas x-akselille.

Sini- ja kosinifunktion arvoja laskettaessa käytetään yleensä kulmanyksikkönä radiaania. Funktioiden kuvaajat on piirretty seuraaviin kuviin. Kuvista huomataan, että sekä sini- että kosinifunktion kuvaajat toistavat itseään aina täyskulman eli 2π radiaanin välein. Tällaisia funktioita, joiden arvot toistavat itseään, sanotaan *jaksollisiksi.* Sini- ja kosinifunktio ovat siis jaksollisia funktioita, joiden jakson pituus on 2π.





Sini- ja kosinifunktion kuvaajia vertailemalla huomataan, että niiden kuvaajat vastaavat toisiaan, kun toista siirretään hieman vaakasuunnassa. Tarkka määrä on itse asiassa $\pi/2$ (eli $90°$). Kaavana voitaisiin ilmaista, että $\cos x = \sin(x + \pi/2)$.

Koska sini- ja kosinifunktio ovat jaksollisia, myös niiden nollakohdat toistavat itseään säännöllisesti. Sinifunktio saa arvon nolla, kun kulman suuruus on nolla, ja nollakohdat toistuvat aina π radiaanin (eli $180°$) välein. Nollakohdat voidaan siis ilmaista lyhyesti muodossa

$$x = n\pi, \quad \text{missä } n \text{ on kokonaisluku.}$$

Kosinin ensimmäinen nollakohta puolestaan on kohdassa $x = \pi/2$ (eli $90°$), ja nollakohdat toistuvat π radiaanin välein. Täten nollakohdat voidaan ilmaista muodossa

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad \text{missä } n \text{ on kokonaisluku.}$$

Esimerkki 6.7. Etsitään väliltä $[0, 4]$ ne luvut x, jotka toteuttavat yhtälön

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Tämä yhtälö toteutuu täsmälleen silloin, kun lauseke $2x+\pi/2$ on sinifunktion nollakohta. Eräs tällainen nollakohta on 0, ja muut saadaan tästä π:n välein. Voidaan siis päätellä, että yhtälö pätee, kun

$$2x + \frac{\pi}{2} = n\pi,$$

missä n voi olla mikä tahansa kokonaisluku. Tästä uudesta yhtälöstä voidaan helposti ratkaista x:

$$\begin{aligned} 2x + \frac{\pi}{2} &= n\pi \\ 2x &= n\pi - \frac{\pi}{2} \\ x &= \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Saatu x on yhtälön ratkaisu aina, kun n on kokonaisluku. Sijoittamalla n:n paikalle eri kokonaislukuja saadaan muun muassa ratkaisut

$$\frac{0}{2} - \frac{\pi}{4} \approx -0{,}79, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}79, \quad \frac{2\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \approx 2{,}36, \quad \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \approx 3{,}93 \quad \text{ja} \quad \frac{4\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \approx 5{,}50.$$

Vain osa ratkaisuista osuu tutkittavalle välille $[0, 4]$. Nämä ratkaisut ovat (likiarvoina) 0,79, 2,36 ja 3,93.

6.6 Tangenttifunktio

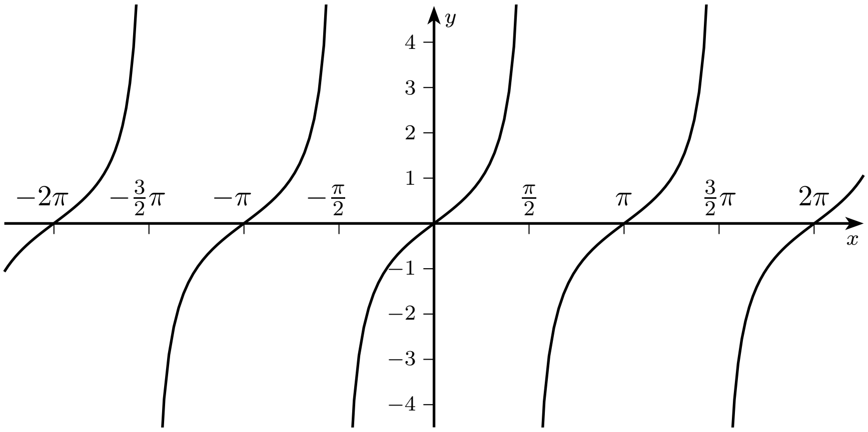
Tangenttifunktio on trigonometrinen funktio, jonka ominaisuudet poikkeavat melkoisesti sini- ja kosinifunktioiden ominaisuuksista. Tangenttifunktio määritellään sinin ja kosinin osamääränä:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Koska nollalla ei voi jakaa, tangenttifunktio ei ole määritelty siellä, missä kosinifunktio saa arvon nolla. Toisin sanoen tangenttifunktion arvo $\tan x$ ei ole määritelty, kun

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad \text{missä } n \text{ on kokonaisluku.}$$

Tangenttifunktion kuvaaja on piirretty seuraavaan kuvaan.



Myös tangenttifunktio on jaksollinen, mutta tällä kertaa jaksona on π. Tangenttifunktion arvot toistuvat siis π:n välein. Tangenttifunktio saa arvon nolla silloin, kun osoittaja on nolla. Nollakohdat ovat siis samat kuin sinifunktiolla, eli ne ovat muotoa $n\pi$, missä n on mikä tahansa kokonaisluku.

6.7 Sini- ja kosinifunktioiden derivaatat

Kun kulman yksikkönä käytetään radiaania, sini- ja kosinifunktioiden derivointi sujuu helposti:

$$\begin{aligned} D \sin x &= \cos x, \\ D \cos x &= -\sin x. \end{aligned}$$

Integrointi on aivan yhtä helppoa:

$$\begin{aligned} \int \sin x \, \mathrm{d}x &= -\cos x + C, \\ \int \cos x \, \mathrm{d}x &= \sin x + C. \end{aligned}$$

Esimerkki 6.8. Tutkitaan, missä pisteissä funktio $f(x) = 2\sin x + x$ saa ääriarvoja avoimella välillä $]0, 10[$. Tätä varten derivoidaan ensin funktio f. Sinin derivaatta on kosini, ja x:n derivaatan tunnemme entuudestaan. Vakiokerroin ei muutu derivoitaessa, joten saadaan

$$f'(x) = 2\cos x + 1.$$

Kulkukaavion selvittämistä varten on ratkaistava derivaatan nollakohdat. Ensinnäkin nähdään, että

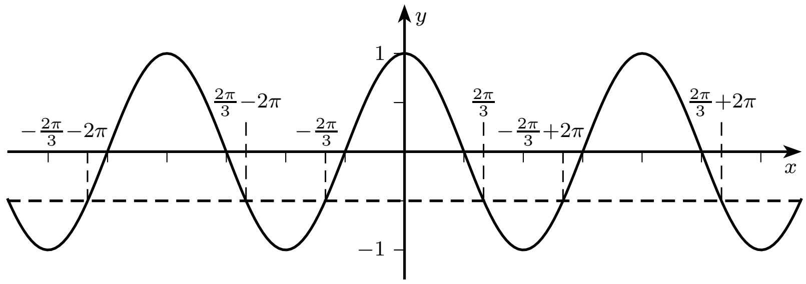
$$2\cos x + 1 = 0 \iff \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Laskimen tai taulukkokirjan avulla voidaan selvittää jokin sellainen lähtöarvo, jolla kosini saa arvon $-1/2$. (Laskimessa toiminto merkitään yleensä "$\cos^{-1}$".) Vastaukseksi pitäisi tulla $2\pi/3$ radiaania ($120°$) tai likiarvona 2,094.

Kaikkien derivaatan nollakohtien selvittämiseksi on kuitenkin nähtävä hieman enemmän vaivaa. Kosinifunktio on nimittäin jaksollinen funktio, joten se saa samat arvot aina 2π:n välein. Arvo $-1/2$ tulee siis paitsi kohdassa $x = 2\pi/3$, myös aina kohdissa $x = 2\pi/3 + 2\pi$, $x = 2\pi/3 + 4\pi$ jne. Toisaalta kosinifunktion kuvaajasta tai yksikköympyrästä nähdään, että luvun ja vastaluvun kosinit ovat samat. Täten arvo $-1/2$ saadaan myös esimerkiksi kohdassa $x = -2\pi/3$. Kun nämä kaksi seikkaa otetaan huomioon, voidaan päätellä, että derivaatan nollakohtia on itse asiassa kahdenlaisia:

$$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = -\left(\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi\right).$$

Kummassakin n voi olla mikä tahansa kokonaisluku. Tilanne näkyy hyvin seuraavasta kuvasta, johon on piirretty kosinifunktion kuvaaja sekä ne kohdat, joissa funktio saa arvon $-1/2$.



Saatuja nollakohtia tutkimalla nähdään, että tarkasteltavalle välille $]0, 10[$ niistä osuvat vain seuraavat:

$$\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}094, \qquad \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3} \approx 8{,}378 \quad \text{ja} \quad -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3} \approx 4{,}188.$$

Laskemalla derivaatan arvoja näiden nollakohtien välissä (muista asettaa laskimeen kulmanyksiköksi radiaanit!) saadaan seuraavanlainen kulkukaavio:

	$0 < x < 2{,}094$	$2{,}094 < x < 4{,}188$	$4{,}188 < x < 8{,}378$	$8{,}378 < x < 10$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Nähdään siis, että funktiolla f on maksimikohdat $x = 2{,}094$ ja $x = 8{,}378$ sekä minimikohta $x = 4{,}188$. Se, onko funktiolla pienintä tai suurinta arvoa, selviää laskemalla arvot tarkasteluvälin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdissa. Osoittautuu, että pienin arvo saavutettaisiin tarkasteluvälin vasemmassa päätepisteessä, mutta koska väli oli avoin, se ei sisällä päätepisteitään, joten pienintä arvoa ei itse asiassa koskaan saavuteta. Suurin arvo sen sijaan saavutetaan jommassakummassa maksimikohdassa. Laskemalla nähdään, että $f(2{,}094) \approx 3{,}826$ ja $f(8{,}378) = 10{,}110$, joten suurin arvo on 10,110 kohdassa $x = 8{,}378$. Ohessa on vielä funktion f kuvaaja.