5 Jatkuvan funktion integraali

Derivaatalle käänteistä käsitettä kutsutaan *integraaliksi.* Aloitetaan integraaliin tutustuminen esimerkillä.

Esimerkki 5.1. Tuotantolaitoksessa on tapahtunut kemikaalivuoto. Määritellään funktio V siten, että $V(t)$ on vuotaneen kemikaalin määrä litroina ajanhetkellä t (yksikkönä kuluneet tunnit vuodon alusta lukien).

Funktion derivaatta kertoo sen muutosnopeuden. Tässä tapauksessa derivaattafunktio V' kertoo siis kemikaalin vuotonopeuden, ja sen yksikkönä on l/h, litroja tunnissa. Jos vuotaneen kemikaalin määrää kuvaava funktio on esimerkiksi $V(t) = 2t$, vuotonopeus on $V'(t) = 2$ litraa tunnissa eli vuoto on tasaista.

Jos vuoto on tasaista ja tiedämme vuotonopeuden, voimme toisaalta myös päätellä vuotaneen kemikaalin määrän. Jos vuotonopeus $V'(t)$ on 2 litraa tunnissa, tiedämme esimerkiksi että kymmenessä tunnissa ainetta ehtii vuotaa $2 \cdot 10 = 20$ litraa. Jos vuotonopeus sen sijaan ei ole tasainen, tilanne on monimutkaisempi.

Vuotaneen kemikaalin määrän selvittäminen vuotonopeuden perusteella on esimerkki operaatiosta, jotka kutsutaan matematiikassa *integroimiseksi.* Integroiminen on derivoinnille käänteinen toimitus: jos tunnemme vuotonopeuden $V'(t)$ lausekkeen, saamme vuotaneen määrän selville, jos pystymme selvittämään, minkä funktion derivaatta $V'(t)$ on. Tämä on yleensä hankalampaa kuin funktion V derivoiminen.

5.1 Integraalin määritelmä

Funktio F on funktion f *integraalifunktio*, jos f on funktion F derivaattafunktio. Funktion f integraalifunktion lauseketta merkitään

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tässä merkinnässä $\int$ kuvaa integrointia ja lopussa oleva $\mathrm{d}x$ kertoo sen, minkä muuttujan suhteen funktion lauseke on kirjoitettu. Voitaisiin myös kirjoittaa esimerkiksi $\int f(y)\,\mathrm{d}y$.

Integraalifunktion määritelmä voidaan nyt kirjoittaa lyhyesti näin:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{jos} \qquad F'(x) = f(x).$$

Esimerkki 5.2. Etsitään polynomifunktion $f(x) = x^4 + 2x$ eräs integraalifunktio. Termi $2x$ on tullut derivoitaessa vastaan monta kertaa, ja siksi muistetaankin, että $D\,x^2 = 2x$. Täten termistä $2x$ tulee integroituna x^2.

Termi x^4 on hankalampi. Koska potenssitermejä derivoitaessa potenssi pienenee yhdellä, pitäisi integroitaessa potenssin vastaavasti kasvaa. Kuitenkin $D\,x^5 = 5x^4 \neq x^4$, joten integroitu termi ei ole suoraan x^5. Asia kuitenkin korjaantuu lisäämällä eteen vakiokerroin. Vakiokertoimet eivät muutu derivoitaessa, joten ne eivät muutu myöskään integroitaessa. Osoittautuu, että sopiva vakiokerroin on $\frac{1}{5}$. Tämä nimittäin kumoaa derivoinnissa syntyvän kertoimen 5:

$$D\left(\frac{1}{5}x^5\right) = \frac{1}{5} \cdot D\,x^5 = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 = x^4.$$

Yhteensä on siis päätelty, että funktion f eräs integraalifunktio on $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + x^2$.

Toisin kuin funktion derivaattafunktio, funktion integraalifunktio ei ole yksikäsitteinen, vaan jokaisella funktiolla on monta eri integraalifunktiota. Tämä johtuu siitä, että kaikki vakiotermit häviävät derivoitaessa. Integroitaessa derivoitua funktiota ei siis voida tietää, oliko alkuperäisessä funktiossa jokin vakiotermi mukana ja mikä se mahdollisesti oli. Tämän vuoksi täytyy integraalifunktioon lisätä ns. *integroimisvakio.* Yleensä käytetään kirjainta C, mutta kirjaimen valinnalla ei tietenkään ole matemaattista merkitystä.

Esimerkki 5.3. Edellisen esimerkin tilanteessa integraalifunktioksi olisi voitu valita myöskin $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + x^2 + 1$, sillä

$$F'(x) = D\left(\frac{1}{5}x^5 + x^2 + 1\right) = x^4 + 2x + 0 = x^4 + 2x = f(x).$$

Vakiotermin 1 paikalla voisi yhtä hyvin olla mikä tahansa muukin luku. Tämän vuoksi integraalifunktion lauseketta merkitään seuraavasti:

$$\int x^4 + 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 + x^2 + C.$$

Vakiotermi C kuvaa sitä, että integraalifunktioon voi lisätä minkä tahansa vakion.

5.2 Integraalin soveltaminen

Integraalia voidaan soveltaa luvun alun esimerkin kaltaisiin tilanteisiin, joissa funktion muutosnopeus eli derivaattafunktio tunnetaan, ja halutaan tuntea funktion kuvaaman suureen *kertymä.* Tällöin on ensin pääteltävä alkuperäinen funktio derivaattafunktiosta ja sen jälkeen laskettava, kuinka paljon funktion arvot ovat yhteensä muuttuneet.

Esimerkki 5.4. Palataan luvun alun esimerkkiin 5.1. Oletetaan, että on jotenkin päätelty vuotonopeuden kasvavan tasaisesti ja noudattavan funktiota $f(t) = \frac{1}{5}t$, missä t on aika tunteina vuodon alusta lukien ja funktion arvot ilmoitetaan litroina tunnissa. Tehtävänä on laskea, kuinka paljon ainetta vuotaa tuntien 5 ja 7 välillä vuodon alusta lukien.

Ensinnäkin on pääteltävä, minkälainen funktio kuvaa vuodon määrää. Vuotonopeus on vuodon määrän derivaatta, joten vuodon määrä on vuotonopeuden integraali. Etsitään siis funktiota F, jonka derivaattafunktio olisi f. Tällainen löytyy melko helposti päättelemällä:

$$F(t) = \int \frac{1}{5}t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{10}t^2 + C.$$

Derivoimalla voidaan tarkistaa, että $F'(t) = \frac{1}{10} \cdot 2t = \frac{1}{5}t$. (Myöhemmin tutkitaan, miten integraaleja voi laskea integroimiskaavoista.)

Integraalifunktion lausekkeessa esiintyvä integroimisvakio C kuvaa tässä esimerkissä sitä, kuinka paljon ainetta oli vuotanut ajanhetkellä 0, sillä

$$F(0) = \frac{1}{10} \cdot 0^2 + C = 0 + C = C.$$

Voimme siis ajatella, että $C = 0$ (litraa). Toisaalta C ei tule vaikuttamaan tehtävän ratkaisuun, joten voimme myös olla välittämättä siitä.

Integraalifunktion arvo $F(t)$ kuvaa nyt sitä, kuinka paljon ainetta on vuotanut ajanhetkellä t. Tehtävän vastaus, eli vuotaneen aineen määrä, saadaan sijoittamalla annetun ajanjakson alku- ja loppuhetket integraalifunktion lausekkeeseen ja laskemalla erotus. Näin saadaan

$$F(7) - F(5) = \left(\frac{1}{10} \cdot 7^2 + C\right) - \left(\frac{1}{10} \cdot 5^2 + C\right) = 4{,}9 + C - 2{,}5 - C = 2{,}4 \text{ (litraa)}.$$

Kuten huomataan, integroimisvakiot supistuvat pois lopullisesta vastauksesta, joten niitä ei tarvitsisi ottaa huomioon.

Jos F on funktion f integraalifunktio, halutaan usein laskea arvoja $F(b) - F(a)$, missä a ja b ovat joitakin lähtöarvoja. Kuten edellisessä esimerkissä nähtiin, tällainen erotus kuvaa kertymää esimerkiksi ajanhetkien a ja b välillä. Kyseistä erotusta kutsutaan funktion f *(määrätyksi) integraaliksi välillä* $[a, b]$ ja sitä merkitään

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Määrättyä integraalia laskettaessa on siis ensin laskettava funktion f integraalifunktio, ja sitten sijoitettava siihen annetut ylä- ja alarajat.

Myös välivaiheelle, jossa on määritetty integraalifunktio, mutta sijoitus on vielä tekemättä, on oma merkintänsä. Voidaan laskea esimerkiksi

$$\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x = \Big/_0^1 x^2 = 1^2 - 0^2 = 1.$$

Tässä on siis ensin integroitu lauseke $2x$ lausekkeeksi x^2 (jolloin integroimissymboli $\int$ "oikenee" ja dx häviää) ja sen jälkeen sijoitettu ylä- ja alarajat 0 ja 1. Integroimisvakiota ei tarvitse ottaa lukuun, koska se supistuisi joka tapauksessa pois erotusta laskettaessa.

5.3 Integraalin laskeminen

Integraalifunktion laskeminen funktion lausekkeesta perustuu siihen, että päätellään, minkä funktion derivaatalla on kyseinen lauseke. Esimerkiksi potenssilauseke derivoidaan ottamalla eksponentti kertoimeksi ja vähentämällä eksponenttia yhdellä. Potenssilausekkeen integrointi tapahtuu siis vastaavasti lisäämällä eksponenttiin yksi ja jakamalla syntyneellä eksponentilla. Samalla tavalla vakiota integroitaessa on lisättävä x, joka derivoitaessa katoaisi. Näin saadaan seuraavat kaavat.

- $\int a \, \mathrm{d}x = ax + C, \quad$ kun a on mikä tahansa reaaliluku
- $\int x^k \, \mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad$ kun $k \neq -1$

Yllä olevassa potenssilausekkeen integroimiskaavassa oikeanpuoleinen lauseke voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\frac{1}{k+1} x^{k+1} + C.$$

Huomautus $k \neq -1$ on tarpeellinen, sillä muuten jaettaisiin nollalla. Tarkastellaan esimerkkiä.

Esimerkki 5.5. Integroidaan polynomi $x^3 - 5x^2 + 6$. Koska derivointi voidaan suorittaa termi kerrallaan, voidaan myös integrointi tehdä tällä tavoin vaiheittain. Potenssin integroimiskaavan nojalla

$$\int x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} x^4.$$

(Lisäämme integroimisvakion C vasta lopulliseen lausekkeeseen.) Tulos on helppo tarkistaa derivoimalla:

$$D\left(\frac{1}{4} x^4\right) = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3.$$

Koska vakiokertoimet eivät muutu derivoitaessa, eivät ne muutu myöskään integroitaessa. Täten termi $5x^2$ voidaan integroida seuraavasti:

$$\int 5x^2 \, \mathrm{d}x = 5 \cdot \int x^2 \, \mathrm{d}x = 5 \cdot \frac{1}{3} x^3 = \frac{5}{3} x^3.$$

Vakiotermi voidaan ajatella nollannen asteen potenssitermiksi:

$$\int 6 \, \mathrm{d}x = \int 6x^0 \, \mathrm{d}x = 6 \cdot \frac{1}{1} x^1 = 6x.$$

Toinen vaihtoehto on vain muistaa, että vakion a integraali on aina ax. Kun edellisten vaiheiden laskut kootaan yhteen, saadaan koko integraalifunktioksi

$$\int x^3 - 5x^2 + 6 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} x^4 - \frac{5}{3} x^3 + 6x + C.$$

Nyt ei sovi unohtaa integroimisvakiota.

Esimerkki 5.6. Myös negatiiviset ja murtopotenssit voidaan integroida potenssin integroimiskaavalla. Esimerkiksi

$$\int \frac{1}{x^3} \, \mathrm{d}x = \int x^{-3} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C = -\frac{1}{2} x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

Ainoastaan potenssia x^{-1} ei voida integroida näin, koska jakajaksi tulisi nolla. *Erityisesti emme voi integroida lauseketta*

$$\frac{1}{x}$$

potenssilausekkeen integroimissäännöllä, koska $\frac{1}{x} = x^{-1}$. Kyseinen lauseke opitaan integroimaan myöhemmin.

Potenssilausekkeen integroiminen ei ole vaikeaa, mutta yleisessä tapauksessa lausekkeen integroiminen on paljon hankalampaa kuin sen derivoiminen. Periaatteessa mistä tahansa derivointikaavasta voitaisiin tietysti johtaa vastaava integroimiskaava kääntämällä se toisin päin, mutta tällaiset kaavat eivät ole yleensä käyttökelpoisia. Esimerkiksi rationaalifunktion derivoimiskaava johtaa niin monimutkaiseen lausekkeeseen, että vastaava integroimiskaava ei olisi enää hyödyllinen.

On kuitenkin syytä mainita yhdistetyn funktion derivoimiskaavasta saatava integroimiskaava. Sitä voidaan nimittää yhdistetyn funktion integroimiskaavaksi, vaikka sillä ei voidakaan integroida mitä tahansa yhdistettyjä funktioita. Kaava on esitetty alla.

- $\int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + C$

Kaava perustuu suoraan yhdistetyn funktion derivoimiskaavaan. Yhdistettyjä funktioita derivoitaessa lauseke on kerrottava lopuksi sisäfunktion derivaatalla. Vastaavasti integroitaessa lausekkeessa *on oltava sisäfunktion derivaatta valmiina.* Integrointia suoritettaessa se sitten häviää jäljettömiin.

Esimerkki 5.7. Etsitään funktion $h(x) = 2x(x^2 - 1)^9$ integraalifunktio. Funktion h lausekkeessa on yhdistetyn funktion lauseke, jonka kertoimena on lisäksi $2x$. Yritetään soveltaa yhdistetyn funktion integroimiskaavaa.

Jotta kaavaa voitaisiin soveltaa, on valittava, mitä kaavassa esiintyvät f', g ja g' ovat. On luonnollista valita $g(x) = x^2 - 1$ ja $f'(x) = x^9$, koska tällöin

$$f'(g(x)) = (x^2 - 1)^9.$$

Integroimiskaavassa esiintyy lisäksi sisäfunktion derivaatta $2x$. Koska olemme valinneet, että $g(x) = x^2 - 1$, näemme, että $g'(x) = 2x$. Kaava sopii siis tilanteeseen täydellisesti, ja voidaan kirjoittaa

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int (x^2 - 1)^9 \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + C.$$

On enää selvitettävä, mikä f on. Koska $f'(x) = x^9$, näemme potenssin integroimissäännöstä, että $f(x) = \frac{1}{10}x^{10}$. Täten

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + C = \frac{1}{10}(x^2 - 1)^{10} + C.$$

Esimerkki 5.8. Edellisen esimerkin tavoin voidaan integroida myös samankaltainen funktio $k(x) = x^2(x^3+1)^{12}$. Nyt valittaisiin $g(x) = x^3 + 1$ ja $f'(x) = x^{12}$. Funktion k lausekkeessa on kuitenkin tällä kertaa kertoimena x^2, kun taas $g'(x) = 3x^2$. Ongelma saadaan ratkaistua kertomalla ja jakamalla lauseke samalla vakiolla 3. Näin saadaan

$$\int k(x)\,\mathrm{d}x = \int (x^3+1)^{12} \cdot x^2\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3} \cdot (x^3+1)^{12} \cdot 3x^2\,\mathrm{d}x.$$

Vakiokerroin $\frac{1}{3}$ ei muutu integroitaessa, ja toisaalta lausekkeeseen on saatu sisäfunktion derivaatta $g'(x) = 3x^2$. Voidaan siis integroida säännön mukaisesti:

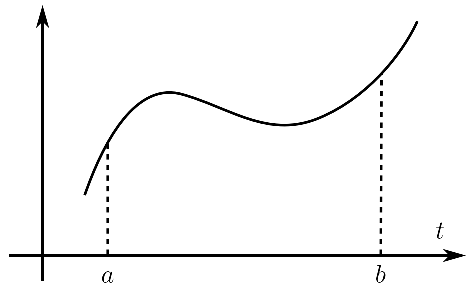
$$\int \frac{1}{3} \cdot (x^3+1)^{12} \cdot 3x^2\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3} \cdot f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot f(g(x)) + C.$$

Kun vielä todetaan, että $f(x) = \frac{1}{13}x^{13}$, saadaan lopulta

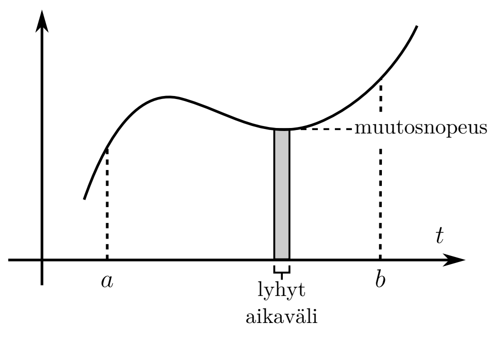
$$\int k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot f(g(x)) + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{13}(x^3+1)^{13} + C = \frac{1}{39}(x^3+1)^{13} + C.$$

5.4 Integraalin tulkinta kuvaajassa

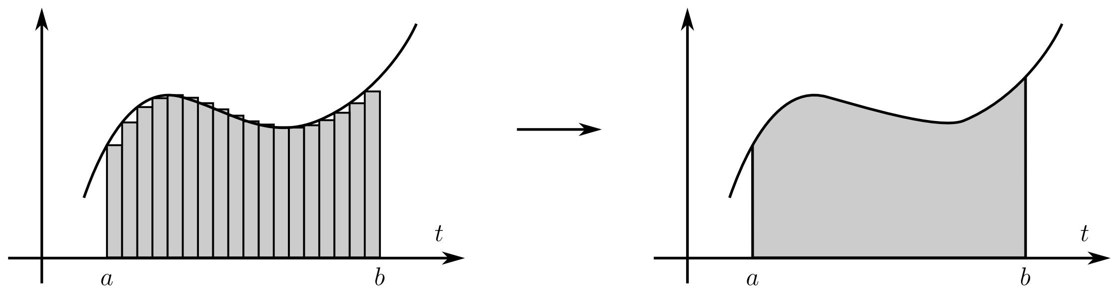
Oheisessa kuvassa on erään jatkuvan funktion kuvaaja. Oletetaan, että tämä funktio kuvaa jonkin suureen muutosnopeutta ajan suhteen, ja yritetään sen avulla selvittää suureen kertymä aikavälillä $[a, b]$.



Ongelma ratkeaa seuraavasti. Hyvin pienellä aikavälillä voidaan olettaa, että funktion arvo, eli suureen muutosnopeus, ei ehdi muuttua paljonkaan. (Tähän vaaditaan funktion jatkuvuutta.) Voidaan siis arvioida, että tällä lyhyellä aikavälillä muutosnopeus on vakio, jolloin kertymä on suoraan muutoksen nopeus kertaa aikavälin pituus. Tämä vastaa seuraavan kuvan mukaisen suorakaiteen pinta-alaa.



Jaetaan nyt koko tarkasteltava aikaväli pieniin osaväleihin, joilla jokaisella muutosnopeuden oletetaan olevan vakio. Näin saadaan suureen kokonaiskertymäksi seuraavaan kuvaan piirrettyjen suorakulmioiden yhteispinta-ala. Kun osavälien pituus lähestyy nollaa, suorakulmioiden pinta-ala lähestyy puolestaan kuvaajan alle jäävän alueen pinta-alaa.

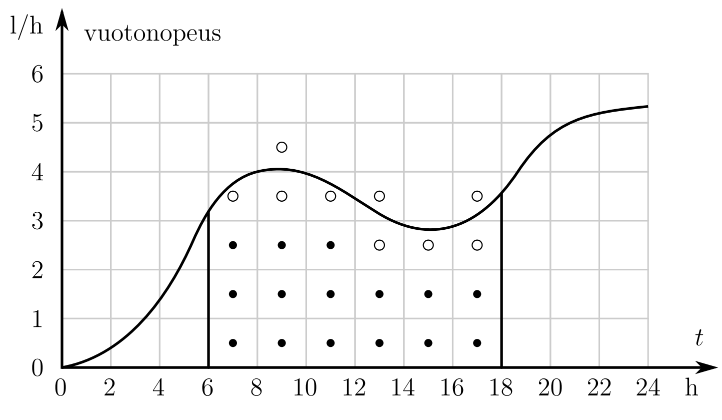


Näin on päätelty seuraava tulos:

> Jatkuvan positiivisen funktion integraali välillä $[a, b]$ vastaa funktion kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa kyseisellä välillä.

Positiivinen funktio on sellainen, joka saa pelkästään positiivisia arvoja. Vastaava tulos pätisi myös negatiiviselle funktiolle, eli sellaiselle, joka saa koko ajan negatiivisia arvoja. Tällöin kuitenkin integraalin tulos on negatiivinen, vaikka pinta-ala tietysti on positiivinen. Integraalilla ja pinta-alalla on kuitenkin sama lukuarvo (eli itseisarvo). Jos funktio saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, kummatkin on käsiteltävä erikseen.

Esimerkki 5.9. Pinta-alatulkinta mahdollistaa integraalin arvon arvioimisen kuvaajan perusteella. Tarkastellaan vielä esimerkin 5.1 kemikaalivuotoa. Oletetaan, että mittaustulosten perusteella vuotonopeus vaihteli ensimmäisen vuorokauden aikana suunnilleen seuraavan kuvaajan mukaisesti. Tehtävänä on arvioida vuodon määrä (eli kertymä) aikavälillä 6–18 tuntia vuodon alkamisesta.



Olisi vaikeaa keksiä sellaisen funktion lauseke, jonka kuvaaja vastaisi tilannetta, joten myös integraalifunktion lauseke jää hämärän peittoon. Kuvan perusteella voimme kuitenkin suoraan arvioida integraalin suuruutta.

Integraalin suuruus välillä $[6, 18]$ vastaa pinta-alaa, joka jää tuolla välillä kuvaajan ja x-akselin väliin. (Tässä tapauksessa x-akseli kuvaa aikaa, joten voitaisiin oikeastaan puhua t-akselista.) Kuvasta arvioituna tuolle välille jää 15 kokonaista ruutua (kuvassa täytetyt pallot) ja 9 osittaista ruutua (tyhjät pallot). Jos arvioidaan kaikki osittaiset ruudut puolikkaina, saadaan pinta-alaksi suunnilleen $15 + 9/2 \approx 20$ ruutua. Jokaisen ruudun vaakasivu puolestaan vastaa kahta tuntia aika-asteikolla ja pystysivu taas litraa tunnissa. Yhden ruudun pinta-ala on siis $2\ \mathrm{h} \cdot 1\ \mathrm{l/h} = 2\ \mathrm{l}$. Yhteensä pinta-alaksi saadaan arvioitua 20 kertaa 2 litraa eli 40 litraa.

Integraalin arviota voitaisiin tietysti parantaa paljon, jos pinta-ala arvioitaisiin tarkemmin. Käytännössä tällaisissa tilanteissa käytetään apuna tietokonetta, joka pystyy arvioimaan pinta-alan hyvinkin tarkasti.