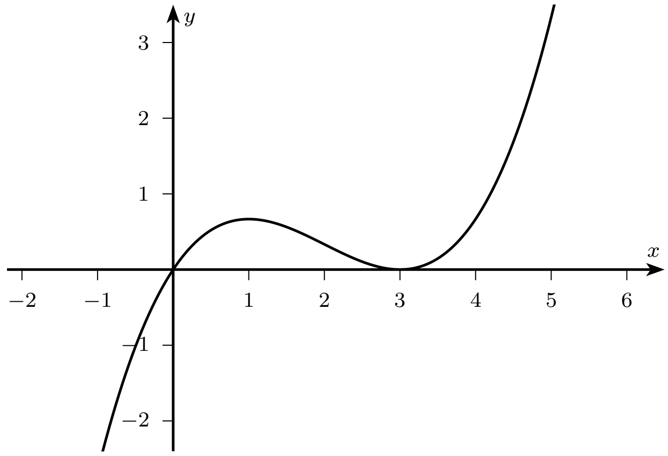
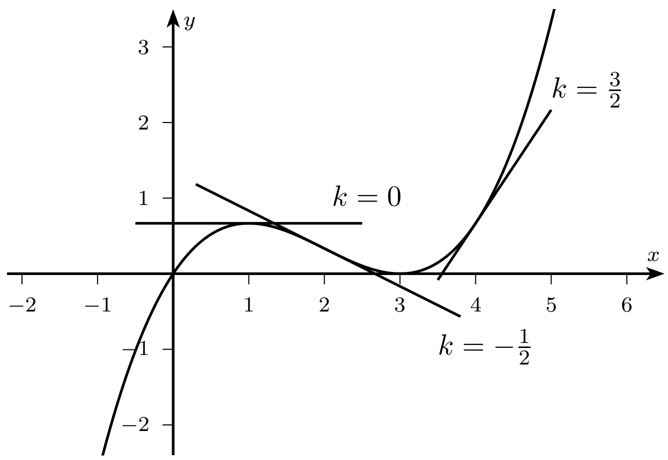
4 Derivaatta

4.1 Funktion kasvun ja vähenemisen tutkiminen

Eräitä kiinnostavimmista asioista funktioita tutkittaessa ovat funktion *kasvavuus* ja *vähenevyys*. Funktio on jollain välillä kasvava, jos $f(a) \geq f(b)$ aina kun $a > b$. Vastaavasti funktio on vähenevä, jos $f(a) \leq f(b)$ aina kun $a > b$. Esimerkiksi funktio, jonka kuvaaja näkyy alla, on kasvava, kun $x \leq 1$ tai $x \geq 3$, ja vähenevä, kun x on välillä $[1, 3]$.



Kuinka funktion kasvavuutta voidaan tutkia täsmällisesti? Ensin täytyy olla jokin keino mitata kasvamisnopeutta. Jos funktion kuvaaja olisi suora, voitaisiin sanoa, että funktion kasvunopeus on suoran kulmakerroin. Yleisen funktion tapauksessa kuvaajalle asetetaan tutkittavaan pisteeseen *sivuaja* eli suora, joka koskettaa käyrää paikallisesti vain yhdessä pisteessä. Funktion kasvunopeudeksi tutkittavassa pisteessä sovitaan tuon sivuajan kulmakerroin. Oheisessa kuvassa näkyy joitakin funktion kuvaajalle piirrettyjä sivuajia ja niiden kulmakertoimia.



Kun funktion f kuvaajalle piirretään sivuaja pisteeseen $(x, f(x))$, tuon sivuajan kulmakerrointa kutsutaan funktion *derivaataksi pisteessä x*. Derivaattaa pisteessä x merkitään

$$f'(x).$$

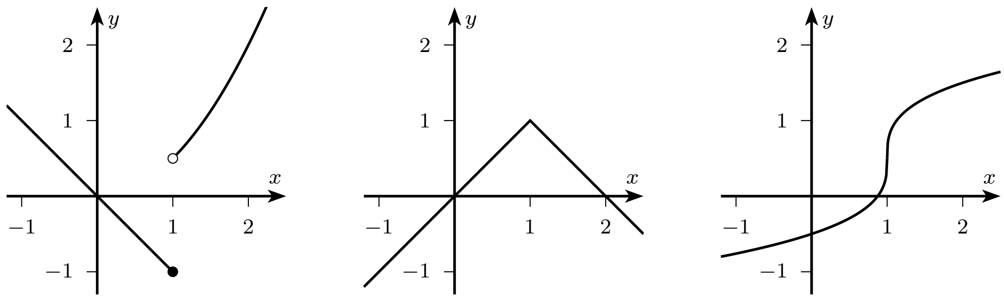
Esimerkiksi edellisen kuvan funktiolle piirrettiin sivuajat pisteisiin $(1, \frac{2}{3})$, $(2, \frac{1}{3})$ ja $(4, \frac{2}{3})$. Kuvan mukaan vastaavat derivaatan arvot ovat $f'(1) = 0$, $f'(2) = -\frac{1}{2}$ ja $f'(4) = \frac{3}{2}$.

Funktion derivaatta kuvaa funktion hetkellistä kasvunopeutta: mitä suurempi on derivaatan arvo, sitä jyrkempi on sivuajasuora, ja sitä nopeammin funktio näyttää kasvavan. Koska derivaatta kuitenkin lasketaan vain yhdessä pisteessä, siitä ei yksinään voi päätellä kasvua tai vähenemistä. Yleensä täytyy tutkia derivaatan arvoja jollakin välillä tai hahmotella funktion kehitystä pisteen ympäristössä jollakin toisella tavalla. Tähän palataan myöhemmin.

Derivaattaa ei aina voida määrittää. Joissakin pisteissä ei funktion kuvaajalle nimittäin voida piirtää sivuajaa. Tämä voi tapahtua lähinnä kolmessa tapauksessa:

1) funktiolla on epäjatkuvuuskohta kyseisessä pisteessä
2) funktion kuvaajalla on terävä ”kärki” kyseisessä pisteessä
3) funktion kuvaaja nousee hetkellisesti pystyyn.

Kahdessa ensimmäisessä tapauksessa ei sivuajaa voida lainkaan järkevästi piirtää. Viimeisessä tapauksessa sivuaja olisi pystysuora, mutta pystysuoralla suoralla ei ole kulmakerrointa. Kaikista tapauksista on esimerkkikuvat alla.



4.2 Derivaatan laskeminen, osa I

Derivaatan määritteleminen kuvaajan avulla ei riitä kovin pitkälle, sillä sivuajan piirtäminen on melko epätäsmällistä. Derivaatta voidaan kuitenkin laskea myös funktion lausekkeesta. Tarkasti ottaen tässä käytettäisiin raja-arvoja, mutta tällä kurssilla riittää osata laskukaavat erityyppisille funktioille.

Aloitetaan laskukaavojen opettelu yksinkertaisista perussäännöistä. Lausekkeen derivointia merkitään kirjaimella D. Esimerkiksi lausekkeen x^2 derivaattaa merkitään $D\,x^2$. Ensimmäiset säännöt koskevat potenssin ja vakiofunktion derivointia sekä lausekkeiden summaa ja vakiolla kertomista.

- $D\,x^k = kx^{k-1}$, kun k on jokin reaaliluku
- $D\,a = 0$, kun a on jokin vakio
- $D\big(f(x) \pm g(x)\big) = D\,f(x) \pm D\,g(x)$
- $D\big(af(x)\big) = a \cdot D\,f(x)$, kun a on jokin vakiokerroin

Esimerkit valaisevat parhaiten sääntöjen soveltamista.

Esimerkki 4.1. Polynomifunktion lauseke on summa x:n potensseista joillakin vakiokertoimilla kerrottuina. Edellä on esitetty derivointisäännöt potensseille, summille ja vakiokertoimille, joten polynomin derivoimisen ei pitäisi tuottaa ongelmia. Tarkastellaan esimerkiksi yksinkertaista lauseketta $3x^2 - 4x$. Lausekkeessa esiintyvät potenssitermit x^2 ja x derivoidaan vastaavan säännön mukaan seuraavasti (huomaa, että $x = x^1$):

$$\begin{aligned} D\,x^2 &= 2x^1 = 2x, \\ D\,x &= 1x^0 = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Koko lauseke derivoidaan nyt välivaiheineen seuraavasti:

$$D(3x^2 - 4x) = D(3x^2) - D(4x) = 3 \cdot D\,x^2 - 4 \cdot D\,x = 3 \cdot 2x - 4 \cdot 1 = 6x - 4.$$

Alla on derivoitu muutamia polynomilausekkeita hieman vähemmillä välivaiheilla:

$$\begin{aligned} D(-x^3 + 5x) &= -D\,x^3 + 5 \cdot D\,x = -3x^2 + 5 \cdot 1 = -3x^2 + 5, \\ D(-3x^5 + x^4) &= -3 \cdot D\,x^5 + D\,x^4 = -3 \cdot 5x^4 + 4x^3 = -15x^4 + 4x^3, \\ D(4x^8 + 11) &= 4 \cdot D\,x^8 + D\,11 = 4 \cdot 8x^7 + 0 = 32x^7. \end{aligned}$$

Viimeisessä kohdassa käytettiin vakion derivoimissääntöä $D\,a = 0$. Tätä ei pidä sekoittaa vakio*kertoimen* derivoimissääntöön, jonka mukaan vakiokerroin säilyy derivoitaessa sellaisenaan, esimerkiksi $D(ax) = a \cdot D\,x = a \cdot 1 = a$.

Esimerkki 4.2. Potenssin derivoimissääntö ei rajoitu pelkästään niihin tapauksiin, missä eksponentti on positiivinen kokonaisluku, vaan sitä voidaan soveltaa myös negatiivisiin ja murtolukueksponentteihin. Esimerkiksi murtolauseke $1/x^2$ voidaan kirjoittaa myös muodossa x^{-2}, jolloin siihen voidaan soveltaa potenssin derivointisääntöä. Näin saadaan

$$D\left(\frac{1}{x^2}\right) = D\,x^{-2} = -2 \cdot x^{-3} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

Täytyy vain muistaa, että eksponentti todellakin *pienenee yhdellä.* Tällöin positiivisesta luvusta 2 tulisi 1, mutta negatiivisesta luvusta -2 tuleekin -3.

Murtopotenssiksi muuntaminen on ainoa tapa neliö- ja muiden juurten derivointiin. Esimerkkinä neliöjuuren derivoiminen:

$$D(\sqrt{x}) = D\,x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Myös vakion derivointisääntö voidaan johtaa potenssin derivoinnista, kun muistetaan, että $1 = x^0$. Tällöin nimittäin vakiolle a pätee $a = a \cdot 1 = a \cdot x^0$, ja saadaan

$$D\,a = D(a \cdot x^0) = a \cdot D\,x^0 = a \cdot 0x^{-1} = a \cdot 0 = 0.$$

Kätevintä on kuitenkin vain muistaa, että vakion derivaatta on aina 0.

Kun osataan derivoida erilaisia lausekkeita, funktioiden derivaatat löytyvät helposti. Esimerkiksi polynomifunktion

$$f(x) = 3x^2 - 4x$$

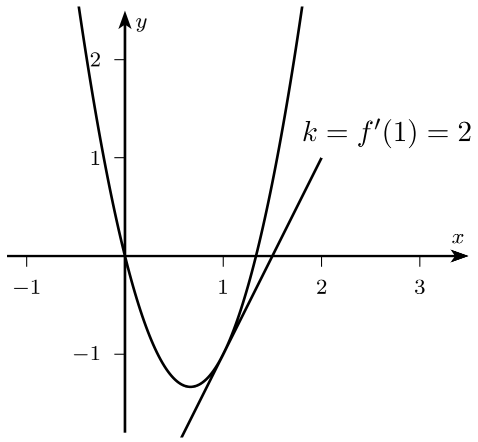
derivaatan arvo pisteessä x saadaan derivoimalla funktion lauseke. Tämä tehtiin esimerkissä 4.2, ja tuloksena oli $6x - 4$. Funktion f derivaatta pisteessä x on siis

$$f'(x) = 6x - 4.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että esimerkiksi funktion f kuvaajalle pisteeseen kohtaan $x = 1$ piirretyn sivuajan kulmakerroin on

$$f'(1) = 6 \cdot 1 - 4 = 2.$$

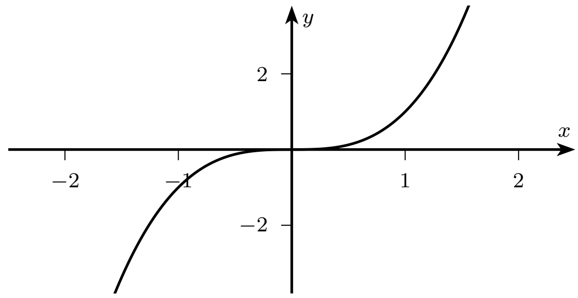
Alla on vielä kuva tilanteesta.



4.3 Derivaatan sovelluksia

Kuten jo luvun alussa mainittiin, derivaattaa voi käyttää funktion kasvun ja vähenemisen tutkimiseen ja mittaamiseen. Mikäli funktion derivaatta jossain pisteessä on positiivinen, funktio on hetkellisesti kasvava tuossa pisteessä, ja mikäli derivaatta on negatiivinen, funktio on vähenevä. Siellä, missä derivaatta on nolla, funktion kasvu on hetkellisesti pysähtynyt.

Mainitun kaltainen tarkastelu ei kuitenkaan ole aivan riittävää. Katsotaan esimerkiksi funktiota $f(x) = x^3$, jonka kuvaaja on piirretty seuraavaan kuvaan. Funktion derivaatan lauseke on $f'(x) = 3x^2$, ja kohdassa $x = 0$ derivaatta on $f'(0) = 0$. Funktion kasvu on siis hetkellisesti pysähtynyt, mutta funktio on silti koko ajan aidosti kasvava. Toisin sanoen jos $x > y$ millä tahansa reaaliluvuilla x ja y, niin $f(x) > f(y)$. Kasvun hetkellinen pysähtyminen ei siis oikeastaan vaikuta kasvuun mitenkään.



Tarkempaa tietoa kasvavuudesta ja vähenevyydestä saadaan, kun tutkitaan derivaatan arvoja laajemmilla väleillä. Seuraava sääntö on niin tärkeä, että puemme sen lauseen muotoon.

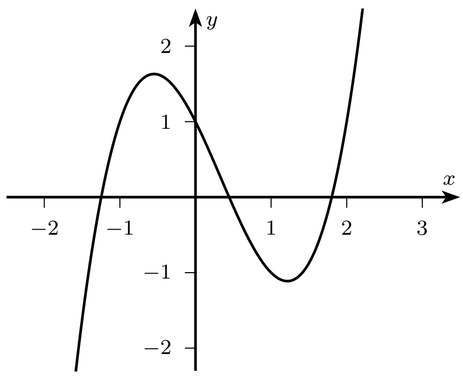
Lause 4.3. *Oletetaan, että funktio f on määritelty vähintään avoimella välillä $]a,b[$ (voi olla myös rajoittamaton väli, vaikka koko $\mathbb{R}$) ja että sillä on derivaatta kaikissa välin $]a,b[$ pisteissä.*

- *Jos $f'(x) > 0$ kaikilla $]a,b[$, niin f on aidosti kasvava koko välillä $]a,b[$.*
- *Jos $f'(x) < 0$ kaikilla $]a,b[$, niin f on aidosti vähenevä koko välillä $]a,b[$.*

Lisäksi edellisten kohtien tilanne ei muutu, vaikka $f'(x)$ olisi 0 välin $]a,b[$ yksittäisissä pisteissä.

”Aidosti” kasvava tarkoittaa, että jos $x > y$, niin $f(x) > f(y)$ eikä funktio voi olla edes väliaikaisesti vakio. Lisähuomautus yksittäisistä pisteistä viittaa sen kaltaiseen tilanteeseen, kuin mitä tarkasteltiin edellä: vaikka funktion $f(x) = x^3$ derivaatta saa yksittäisessä pisteessä $x = 0$ arvon nolla, ei funktion kasvavuus muutu. Tarkastellaan erästä toista esimerkkiä hieman yksityiskohtaisemmin.

Esimerkki 4.4. Määritellään polynomifunktio $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$. Sen kuvaaja on piirretty alla olevaan kuvaan. Tutkitaan derivaatan avulla tarkasti, milloin funktio f on kasvava ja milloin vähenevä.



Polynomilausekkeiden derivointisääntöjen mukaan saadaan funktion derivaataksi

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 2.$$

Tämä lauseke kertoo derivaatan arvon (eli funktion hetkellisen kasvunopeuden) riippuvuuden lähtöarvosta x. Se määrittelee siis itsekin erään funktion, ns. *derivaattafunktion.*

Jotta voitaisiin selvittää funktion f kasvavuus, on edellä olevan lauseen mukaan tutkittava derivaatan etumerkkiä. Käytetään apuna tuttua jatkuviin funktioihin liittyvää sääntöä:

> Jatkuvan funktion arvojen etumerkki voi vaihtua vain funktion nollakohdissa tai siellä, missä funktio ei ole määritelty.

Koska derivaattafunktio $f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$ on polynomifunktio, se on määritelty kaikkialla ja lisäksi jatkuva. Derivaatan etumerkki voi siis vaihtua vain derivaatan nollakohdissa.

Selvitetään ensin derivaattafunktion nollakohdat toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla:

$$\begin{aligned} & 3x^2 - 2x - 2 = 0 \\ \iff \quad & x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} \\ \iff \quad & x = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3} \\ \iff \quad & x \approx 1{,}215 \quad \text{tai} \quad x \approx -0{,}549. \end{aligned}$$

Laaditaan sitten derivaatan merkkikaavio. Koska derivaatan merkki voi vaihtua vain derivaatan nollakohdissa, riittää tarkistaa merkki näiden nollakohtien välissä vaikkapa laskimella. Esimerkiksi

$$f'(-1) = 3 \quad (+), \qquad f'(0) = -2 \quad (-) \qquad \text{ja} \qquad f'(2) = 6 \quad (+).$$

Näin saadaan seuraavan näköinen kaavio:

x	$x < -0{,}549$	$-0{,}549 < x < 1{,}215$	$x > 1{,}215$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

Derivaatan etumerkki nollakohtien eri puolilla olisi voitu päätellä myös siitä, että derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Derivaatan merkkikaaviosta nähdään, että derivaatta on positiivinen, kun $x < -0{,}549$ tai $x > 1{,}215$, ja negatiivinen, kun x on välillä $]-0{,}549, 1{,}215[$. Käyttämällä lausetta 4.3 voidaan derivaatan merkkikaavio täydentää alkuperäisen funktion kulkukaavioksi:

x	$x < -0{,}549$	$-0{,}549 < x < 1{,}215$	$x > 1{,}215$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Kulkukaaviossa nuolet osoittavat funktion kulkusuunnan.

Nyt on selvitetty tarkasti, milloin funktio $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ on kasvava ja milloin vähenevä. Kerrataan vielä lyhyesti tarkastelun vaiheet:

1. Etsitään derivaattafunktio f'.
2. Määritetään derivaattafunktion f' nollakohdat.
3. Laaditaan derivaattafunktion merkkikaavio määrittämällä derivaatan etumerkki nollakohtien välissä.
4. Täydennetään merkkikaavio funktion f kulkukaavioksi.

Derivaatan avulla voidaan selvittää myös funktion pienin ja suurin arvo. Sellaisessa kohdassa, jossa funktion kasvaminen vaihtuu vähenemiseksi tai päinvastoin, kasvu pysähtyy hetkellisesti ja derivaatta on nolla. Tällaisessa kohdassa funktiolla on niin sanottu *paikallinen ääriarvo*, joko *minimi* tai *maksimi*. Funktion suurin arvo voi löytyä tällaisesta maksimikohdasta. Toinen mahdollisuus on, että suurin arvo löytyy määrittelyvälin päätepisteestä. Vastaava pätee pienimmälle arvolle. Toisaalta esimerkiksi funktiolla $f(x) = x^3$ ei ole lainkaan suurinta eikä pienintä arvoa.

Esimerkki 4.5. Jatketaan edellisen esimerkin funktion $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ tarkastelua. Sovitaan kuitenkin tällä kertaa, että funktio on määritelty vain välillä $[0, 5]$. Tuolla välillä funktion kulkukaavio on seuraavanlainen (kopioituna edellisestä esimerkistä):

x	$0 < x < 1{,}215$	$1{,}215 < x < 5$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Vain yksi derivaattafunktion nollakohta osuu määrittelyvälille, nimittäin $x = 1{,}215$. Koska funktio on tuon kohdan edellä vähenevä ja sen jälkeen kasvava, kyseessä on minimikohta. Lisäksi nähdään, että kyseisessä kohdassa funktio myös saa pienimmän arvonsa, koska funktio ei enää käänny laskevaksi määrittelyalueellaan eikä siksi voi saavuttaa pienempiä arvoja. Tuo pienin arvo on $f(1{,}215) \approx -1{,}1$.

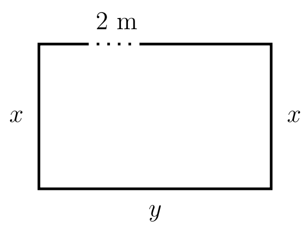
Kun funktio f määritellään suljetulla välillä, sillä on myös suurin arvo. Kulkukaavion perusteella suurin arvo saavutetaan määrittelyvälin jommassakummassa päätepisteessä. Kokeillaan kumpi funktion arvo on suurempi:

$$f(0) = 1 \qquad \text{ja} \qquad f(5) = 91.$$

Selvästi jälkimmäinen arvo on suurempi. Funktion suurin arvo on siis $f(5) = 91$.

Suurimman ja pienimmän arvon löytäminen on erityisen tärkeää seuraavan esimerkin kaltaisissa *optimointitehtävissä*.

Esimerkki 4.6. Halutaan rakentaa suorakulmion muotoinen aitaus. Aitatarpeita riittää yhteensä 150 metrin pituiseen aitaan, mutta aitauksen yhdelle sivulle on tarkoitus jättää 2 metrin levyinen aukko. Tilanne on siis seuraavan kuvan mukainen.



Halutaan löytää sellaisen aitauksen mitat, jonka pinta-ala on suurin mahdollinen. Tämä ongelma ratkeaa muodostamalla funktio, joka kuvaa aitauksen pinta-alaa, sekä etsimällä derivaatan avulla funktion suurin arvo.

Aloitetaan valitsemalla suure, josta pinta-ala riippuu. Suorakulmion pinta-ala lasketaan kaavalla $A = xy$, kun käytetään oheisen kuvan merkintöjä. Sivujen mitat x ja y eivät kuitenkaan ole toisistaan riippumattomia, sillä aidan kokonaispituus on rajoitettu: mikäli pituutta x kasvatetaan, pituus y vähenee, ja päinvastoin. Tarkemmin sanottuna rajoittava ehto on

$$2x + 2y - 2 = 150.$$

Tästä yhtälöstä voidaan ratkaista y, jos x oletetaan tunnetuksi:

$$\begin{aligned} 2y &= 150 - 2x + 2 \\ 2y &= 152 - 2x \\ y &= 76 - x. \end{aligned}$$

Nyt on selvitetty, että jos aitauksen toisen sivun pituus on x, toisen sivun pituus on $y = 76 - x$. Voidaan siis muodostaa pinta-alaa kuvaava funktio

$$A(x) = x \cdot (76 - x) = 76x - x^2 = -x^2 + 76x.$$

Selvitetään funktion A määrittelyjoukko. Voidaan ajatella, että pahimmassa tapauksessa x voi olla 0, jolloin aitauksella ei ole pinta-alaa. Toinen ääritapaus olisi se, jossa $y = 0$ eli $x = 76$. Myöskään tällöin aitauksella ei ole pinta-alaa, vaikka kaikki aitamateriaali on käytössä. Määrittelyjoukoksi voidaan siis valita suljettu väli $[0, 76]$. Tämän välin luvut kuvaavat sivun pituuden x mahdollisia arvoja.

Kun tutkittava funktio on selvitetty, lasketaan sen derivaatta:

$$A'(x) = -2x + 76.$$

Derivaattafunktiolla on yksi nollakohta, ja se on $x = 38$. Koska derivaattafunktion kuvaaja on laskeva suora, derivaatan arvot ovat positiivisia nollakohdan vasemmalla puolella ja negatiivisia oikealla. Näin voidaan muodostaa derivaatan merkkikaavio. (Voitaisiin myös tutkia derivaatan arvoja kokeilupisteissä nollakohdan eri puolilla.) Täydennetään merkkikaavio saman tien funktion A kulkukaavioksi:

x	$0 < x < 38$	$38 < x < 76$
$A'(x)$	$+$	$-$
$A(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Kulkukaaviosta nähdään, että kohdassa $x = 38$ on funktion A maksimikohta ja samalla sen suurin arvo. Suurin aitaus saadaan siis, kun sivun pituus x on 38. Tällöin toinen sivun pituus on $y = 76 - 38 = 38$, eli aitaus on neliön muotoinen. Sen pinta-ala on $A(38) = 38^2 = 1444$ (m^2).

4.4 Derivaatan laskeminen, osa II

Tähän mennessä opittujen laskusääntöjen avulla pystytään derivoimaan polynomifunktioita sekä hyvin yksinkertaisia rationaali- ja juurifunktioita. Seuraavaksi opetellaan funktioiden tulon ja osamäärän sekä yhdistettyjen funktioiden derivointisäännöt. Näiden avulla voidaan derivoida kaikki rationaalifunktiot sekä suuri joukko sellaisia funktioita, jotka voidaan tulkita yhdistetyiksi funktioiksi.

- $D\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $D\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
- $D\big(f(g(x))\big) = f'(g(x))g'(x)$

Aloitetaan tutkimalla rationaalifunktion derivoimista.

Esimerkki 4.7. Tarkastellaan rationaalifunktiota

$$h\colon \mathbb{R} \setminus \{2, -2\} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{3x+1}{x^2-4}.$$

Rationaalifunktion lauseke on kahden polynomin osamäärä. Merkitään osoittajapolynomia $f(x) = 3x + 1$ ja nimittäjäpolynomia $g(x) = x^2 - 4x$. Lausekkeiden osamäärän derivointisäännön nojalla derivaataksi tulee

$$h'(x) = D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \tag{4.1}$$

Lasketaan derivaatta vaiheittain. Ensinnäkin osoittajan derivaatta on

$$f'(x) = D(3x + 1) = 3$$

ja nimittäjän derivaatta on

$$g'(x) = D(x^2 - 4) = 2x.$$

Nyt voidaan koota osamäärän derivaatta sijoittamalla $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ ja $g'(x)$ kaavaan (4.1):

$$\begin{aligned} h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} &= \frac{3 \cdot (x^2-4) - (3x+1) \cdot 2x}{(x^2-4)^2} \\ &= \frac{3x^2 - 12 - 6x^2 - 2x}{(x^2-4)^2} \\ &= \frac{-3x^2 - 2x - 12}{(x^2-4)^2}. \end{aligned}$$

Rationaalifunktioita derivoitaessa ei nimittäjän lauseketta kannata yleensä kertoa auki.

Katsotaan seuraavaksi, miten yhdistetty funktio derivoidaan.

Esimerkki 4.8. Tarkastellaan funktiota $k(x) = (x^2 - 1)^9$. Tämä funktio voitaisiin derivoida kertomalla se auki, mutta kertolasku olisi hyvin työläs. Pääsemme helpommalla, kun tulkitsemme lausekkeen yhdistetyn funktion lausekkeeksi.

Valitaan sisäfunktioksi $g(x) = x^2 - 1$ ja ulkofunktioksi $f(x) = x^9$. Tällöin pätee $k(x) = f(g(x))$, joten $k'(x) = D(f(g(x)))$. Voidaan siis käyttää yhdistetyn funktion derivointisääntöä. Sitä varten derivoidaan ensin valmiiksi ulko- ja sisäfunktiot:

$$f'(x) = 9x^8 \qquad \text{ja} \qquad g'(x) = 2x.$$

Nyt yhdistetyn funktion derivoimissäännön mukaan pätee

$$\begin{aligned} k'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\ &= f'(x^2 - 1) \cdot 2x \\ &= 9(x^2 - 1)^8 \cdot 2x \\ &= 18x(x^2 - 1)^8. \end{aligned}$$

Yhdistettyä funktiota derivoitaessa ideana on, että derivoidaan ensin ulkofunktio ja pidetään sisäfunktio paikallaan, ja sen jälkeen kerrotaan saatu lauseke sisäfunktion derivaatalla. Toisena esimerkkinä voitaisiin ottaa juurifunktio $p(x) = \sqrt{2x - 1}$. Tätä ei osata derivoida ilman yhdistetyn funktion sääntöä. Nyt sisäfunktioksi valitaan $g(x) = 2x - 1$ ja ulkofunktioksi $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$. Yhdistetyn funktion sekä potenssin derivointisääntöjen mukaan saadaan

$$p'(x) = D\Big((\underbrace{2x - 1}_{g(x)})^{1/2}\Big) = \frac{1}{2}(\underbrace{2x - 1}_{g(x)})^{-1/2} \cdot \underbrace{2}_{g'(x)} = (2x - 1)^{-1/2}.$$

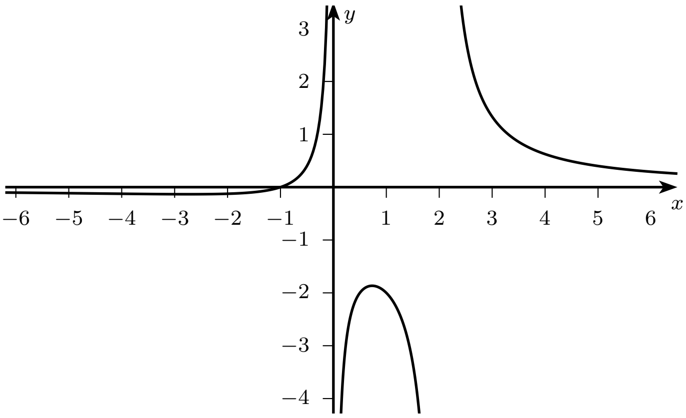
Vastaus voidaan vielä haluttaessa muuttaa muotoon $p'(x) = 1/\sqrt{2x - 1}$.

Tarkastellaan viimeisenä esimerkkinä rationaalifunktion kasvamisen tutkimista.

Esimerkki 4.9. Palataan vielä kerran esimerkin 2.5 funktioon

$$h \colon \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 2x}.$$

Tämän funktion kuvaaja näkyy oheisessa kuvassa. Olemme todenneet, että funktio h ei ole määritelty lähtöarvoilla 0 ja 2. Lisäksi olemme päätelleet esimerkissä 3.3, että funktion arvot lähestyvät nollaa hyvin suurilla ja hyvin pienillä lähtöarvoilla. Tutkitaan nyt derivaatan avulla funktion kasvuominaisuuksia.



Derivoidaan funktio h osamäärän derivointisäännön mukaan. Osoittaja on $f(x) = x+1$ ja nimittäjä on $g(x) = x^2 - 2x$. Saadaan

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (x^2 - 2x) - (x+1) \cdot (2x-2)}{(x^2-2x)^2} \\ &= \frac{(x^2 - 2x) - (2x^2 - 2x + 2x - 2)}{(x^2-2x)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x - 2x^2 + 2}{(x^2-2x)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2-2x)^2}. \end{aligned}$$

Selvitetään seuraavaksi derivaatan etumerkki. Derivaatan nollakohdat ovat samat kuin derivaatan osoittajan nollakohdat:

$$\begin{aligned} & h'(x) = 0 \\ \iff \quad & -x^2 - 2x + 2 = 0 \\ \iff \quad & x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} \\ \iff \quad & x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{-2} = -\frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3} \\ \iff \quad & x = 0{,}732 \quad \text{tai} \quad x = -2{,}732. \end{aligned}$$

Derivaatan merkkikaaviota varten on nyt otettava huomioon myös kohdat, joissa derivaatta h ei ole määritelty. Nämä ovat samat kohdat kuin missä funktio ei ole määritelty, eli lähtöarvot $x = 0$ ja $x = 2$. Näissä kohdissa derivaatan merkki voi muuttua. Derivaatan merkki on siis tarkistettava kullakin osaväleistä

$$]-\infty, -2{,}732[, \quad]-2{,}732, 0[, \quad]0, 0{,}732[, \quad]0{,}732, 2[\quad \text{ja} \quad]2, \infty[.$$

Lasketaan esimerkiksi arvot

$$h'(-3) \approx -4{,}4, \quad h'(-1) \approx 0{,}3, \quad h'(0{,}5) \approx 1{,}3, \quad h'(1) = -1 \quad \text{ja} \quad h'(3) \approx -1{,}4.$$

Nyt voidaan laatia funktion h kulkukaavio:

x	$x < -2{,}732$	$-2{,}732 < x < 0$	$0 < x < 0{,}732$	$0{,}732 < x < 2$	$x > 2$
$h'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$h(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Kulkukaavio kertoo, että funktio h on kasvava väleillä $]-2{,}732, 0[$ ja $]0, 0{,}732[$, muulloin h on vähenevä. Tämän vahvistaa käsityksen, joka saatiin aiemmin h:n kuvaajasta.