3 Raja-arvo ja jatkuvuus

3.1 Raja-arvon käsite

Raja-arvo kuvaa funktion käyttäytymistä jonkin lähtöarvon läheisyydessä. Raja-arvoa tarvitaan toisinaan siksi, että funktion arvoa ei voida laskea kyseisellä lähtöarvolla ja sen vuoksi on tyydyttävä arvoon, jota funktion arvot näyttävät lähestyvän. Raja-arvot ovat myös kiinnostavia, kun tutkitaan funktion jatkuvuutta, sillä funktio on jatkuva täsmälleen silloin, kun se saa missä tahansa lähtöpisteessä melkein saman arvon kuin lähellä olevissa pisteissä.

Tarkastellaan esimerkin vuoksi funktiota

$$f(x) = \frac{2x^2 - 10x + 12}{x - 2}.$$

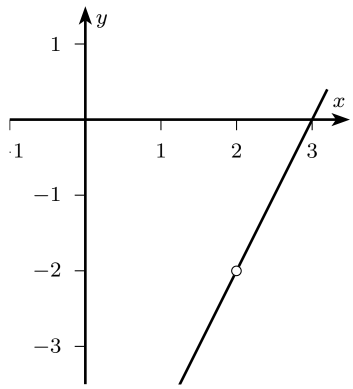
Funktio f ei ole määritelty kohdassa $x = 2$, koska nollalla ei voi jakaa. Lasketaan kuitenkin funktion arvoja muutamissa kakkosen lähellä olevissa pisteissä:

x	$f(x)$
1,9	−2,2
1,99	−2,02
1,999	−2,002
2,001	−1,998
2,01	−1,98
2,1	−1,8

Mitä lähempänä lähtöarvo on lukua 2, sitä lähempänä näyttävät funktion arvot olevan lukua −2. Voidaan sanoa (vaikka väite ei olekaan täsmällisesti perusteltu), että *funktion f raja-arvo kohdassa $x = 2$ on −2*. Tämä merkitään symbolein

$$\lim_{x \to 2} f(x) = -2.$$

Raja-arvo näkyy myös hyvin kuvaajasta, jossa lähtöarvon $x = 2$ kohdalla funktion arvot lähestyvät lukua −2.



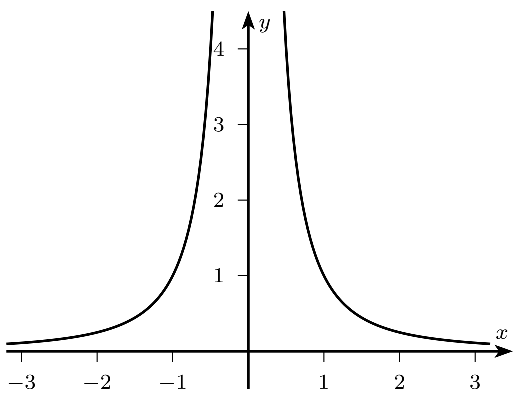
Toisinaan raja-arvoa ei ole olemassa lukuna, vaan sen sijaan funktio *kasvaa tai vähenee rajatta* tietyn lähtöarvon läheisyydessä. Näin käy etenkin rationaalifunktioiden tapauksessa hyvin usein. Esimerkiksi funktio $h(x) = 1/x^2$ ei ole määritelty, kun $x = 0$. Kun lasketaan arvoja lähellä lähtöarvoa 0, saadaan seuraava taulukko:

x	$h(x)$
$-0{,}1$	100
$-0{,}01$	10000
$-0{,}001$	1000000
$0{,}001$	1000000
$0{,}01$	10000
$0{,}1$	100

Huomataan, että mitä lähempänä lähtöarvot ovat lukua 0, sitä suuremmiksi funktion arvot kasvavat. Alla olevasta kuvaajasta voimme päätellä saman asian. (Päättely ei edelleenkään ole aivan aukoton, koska olemme vain laskeneet muutamia mielivaltaisia funktion arvoja.) Tällaisessa tapauksessa sanotaan, että *funktion h arvot kasvavat rajatta kohdassa* $x = 0$. Ilmiölle käytetään merkintää

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \infty.$$

Äärettömyyssymbolia käytetään tässä kuvaamaan sitä, että funktio saa mielivaltaisen suuria arvoja.



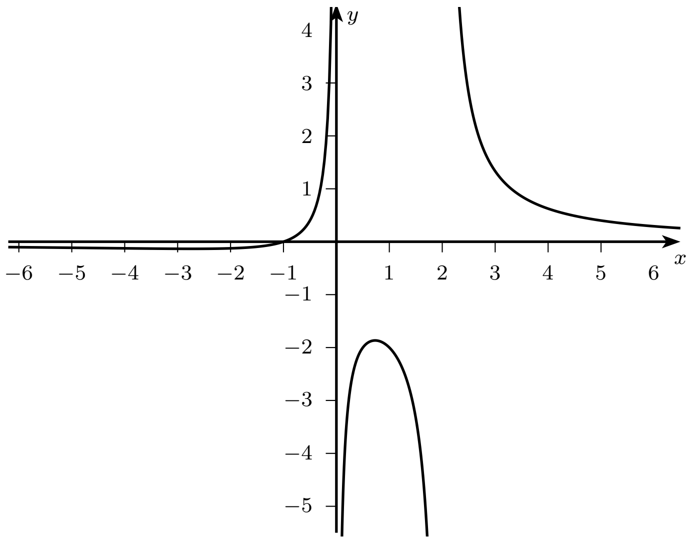
3.2 Rationaalifunktion raja-arvo

Raja-arvo voidaan rationaalifunktioiden tapauksessa myös määrittää täsmällisesti. Tarkastellaan tätä muutamien esimerkkien valossa.

Esimerkki 3.1. Tutkitaan esimerkin 2.5 funktiota

$$g\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x+1}{x^2 - 2x}.$$

Kun $x = 2$, funktio g ei ole määritelty. Alla on piirretty uudestaan funktion g kuvaaja. Kuvaajasta nähdään, että lähestyttäessä kohtaa $x = 2$ oikealta funktion g arvot kasvavat rajatta. Lähestyttäessä samaa kohtaa vasemmalta ne puolestaan pienenevät rajatta. Varsinaista raja-arvoa ei siis ole olemassa, mutta voimme tutkia funktion käyttäytymistä sen lausekkeen avulla.



Huomataan, että nimittäjästä voidaan erottaa tekijä $x - 2$, johon itse asiassa sisältyy kaikki ongelmallisuus. Tällä tavoin voimme muokata funktion lausekkeen muotoon

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2 - 2x} = \frac{x+1}{(x-2)x} = \frac{1}{x-2} \cdot \frac{x+1}{x}.$$

Tarkastellaan näin saatua lauseketta, kun x on lähellä lukua 2 mutta hiukan suurempi. Tällöin tekijä $\frac{x+1}{x}$ on lähellä lukua $\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$. Toisaalta ongelmatekijän $\frac{1}{x-2}$ nimittäjä $x - 2$ on lähellä nollaa, mutta kuitenkin positiivinen, sillä $x > 2$. Kun ykkönen jaetaan lähellä nollaa olevalla positiivisella luvulla, tuloksena on hyvin suuri positiivinen luku. Koska funktion arvo $g(x)$ on tulo tekijöistä $\frac{x+1}{x}$ ja $\frac{1}{x-2}$, se kasvaa hyvin suureksi, kun x lähestyy lukua 2 sen oikealta puolelta. Tätä merkitään toisinaan symbolein

$$\lim_{x \to 2+} g(x) = \infty.$$

Merkintä tarkoittaa, että funktion g arvot kasvavat rajatta, kun lähtöarvo lähestyy lukua 2 sen oikealta puolelta.

Kun x on lähellä lukua 2 mutta hiukan pienempi, voidaan tehdä samanlainen päättely. Kirjoitetaan se tällä kertaa pelkästään symbolisesti:

$$\lim_{x \to 2-} g(x) = \lim_{x \to 2-} \left(\frac{1}{x-2} \cdot \frac{x+1}{x} \right) = -\infty \cdot \frac{3}{2} = -\infty.$$

Tulos on tässä tapauksessa negatiivinen, koska tekijä $\frac{1}{x-2}$ saa vain negatiivisia arvoja, kun $x < 2$.

Toisinaan sekä osoittajalla että nimittäjällä on nollakohta samassa kohdassa a. Tällöin saattaa olla, että raja-arvo löytyy erottamalla tekijä $x-a$ sekä osoittajasta että nimittäjästä.

Esimerkki 3.2. Määritellään funktio

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x}.$$

Funktion määrittelyjoukkoon eivät kuulu lähtöarvot 0 ja 1, sillä ne ovat nimittäjän nollakohtia. Tutkimalla osoittajaa nähdään, että $x = 1$ on myös osoittajan nollakohta. Voimme nyt käyttää sitä tietoa, että jos polynomilla on nollakohta a, siitä voidaan erottaa tekijä $x - a$. Tekijä $x - 1$ voidaan siis erottaa sekä osoittajasta että nimittäjästä. Funktion lauseke voidaan lopulta kirjoittaa muodossa

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)x} = \frac{x-1}{x-1} \cdot \frac{x+2}{x} = \frac{x+2}{x}.$$

Kävi niin hyvin, että muotoa $x - 1$ olevat ongelmatekijät supistuivat kokonaan pois lausekkeesta. Nyt raja-arvo voidaan päätellä suoraan:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3.$$

3.3 Funktion käyttäytyminen suurilla tai pienillä lähtöarvoilla

Funktion raja-arvoa muistuttava asia on funktion käyttäytyminen mielivaltaisen suurilla tai pienillä (negatiivisilla) lähtöarvoilla. Voi käydä niin, että funktion arvot kasvavat tai vähenevät rajatta tai ne voivat lähestyä jotakin lukua. Tarkastellaan tästäkin esimerkkinä paria rationaalifunktiota.

Esimerkki 3.3. Tutkitaan vielä esimerkin 3.1 funktiota

$$g\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}.$$

Tuon esimerkin yhteydessä esitetystä kuvaajasta nähdään, että funktion arvot näyttävät lähestyvän nollaa suurilla ja pienillä lähtöarvoilla. Tätä merkitään

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0.$$

Tarkka päättely voidaan tällä kertaa tehdä supistamalla funktion lauseke sillä nimittäjän termillä, jolla on suurin aste, eli termillä x^2. Jaetaan siis sekä osoittajan että nimittäjän jokainen termi termillä x^2, jolloin funktion lausekkeesta tulee

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2-2x} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}}.$$

Tästä on se hyöty, että lähtöarvon x kasvaessa suureksi, termit $1/x$, $1/x^2$ ja $-2/x$ lähestyvät kaikki nollaa, sillä niissä kaikissa jaetaan jotain hyvin suurella luvulla. Sama tapahtuu, mikäli x pienenee hyvin pieneksi negatiiviseksi luvuksi. Täten voidaan päätellä

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{0+0}{1-0} = 0.$$

Esimerkki 3.4. Määritellään funktio

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$$

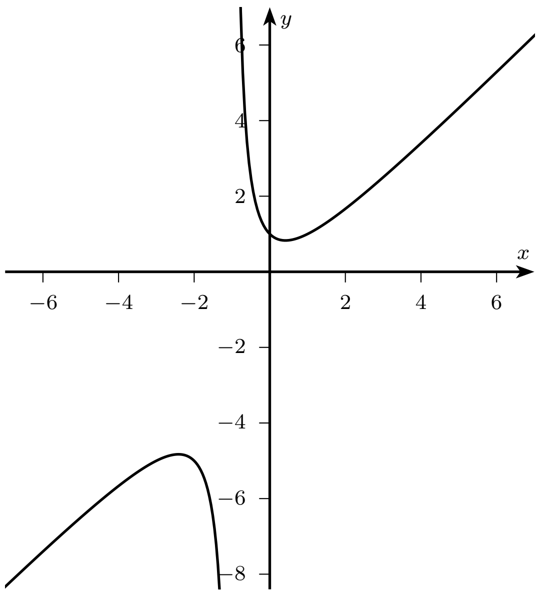
Kun lasketaan funktion f arvoja hyvin suurilla ja hyvin pienillä arvoilla, saadaan seuraavanlainen taulukko:

x	$f(x)$
100	99,02
1000	999,00
10000	9999,00
-100	$-101{,}02$
-1000	$-1001{,}00$
-10000	$-10001{,}00$

Näyttää siltä, että hyvin suurilla ja pienillä lähtöarvoilla funktion arvot eivät lähesty mitään lukua, vaan suurilla lähtöarvoilla ne kasvavat rajatta ja pienillä lähtöarvoilla puolestaan vähenevät rajatta. Tätä merkitään

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Sama tulos näkyy oheisesta kuvaajasta.



Käyttäytyminen voidaan tarkistaa supistamalla funktion lauseke jälleen sillä nimittäjän termillä, jolla on suurin aste, eli termillä x. Tällöin nimittäin voidaan päätellä suurilla arvoilla seuraavasti:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{\infty+0}{1+0} = \infty,$$

ja pienillä arvoilla puolestaan seuraavasti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{-\infty+0}{1+0} = -\infty.$$

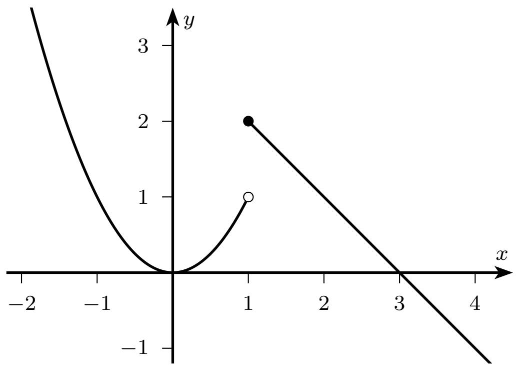
3.4 Jatkuvuus

Monet funktiot ovat sellaisia, että ne muuttuvat tasaisesti lähtöarvojen muuttuessa eivätkä tee hyppäyksiä. Toisin sanoen lähtöarvon muuttuessa hyvin vähän myös funktion arvo muuttuu vain vähän. Tätä ominaisuutta sanotaan *jatkuvuudeksi.* Luonnossa on paljon esimerkkejä jatkuvista funktioista, kuten vaikkapa huoneen keskilämpötila ajan funktiona. Lukuunottamatta hyvin poikkeavia olosuhteita lämpötila ei tee hyppäyksiä ajan kuluessa.

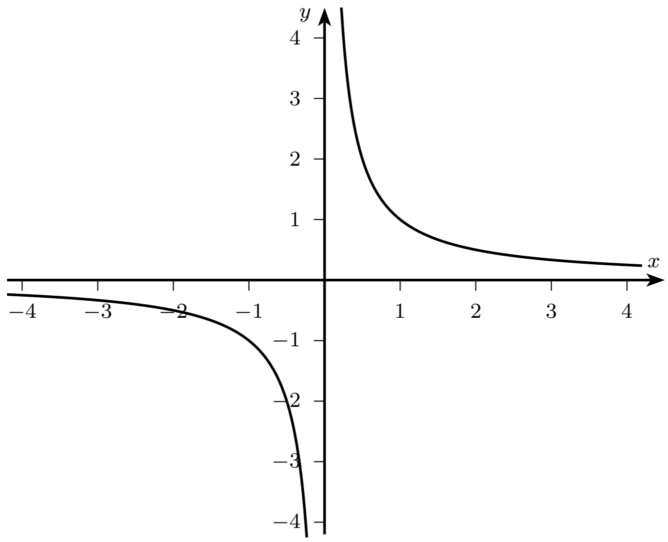
Jatkuvuuden ymmärtää ehkä parhaiten, jos tarkastelee esimerkkiä *epäjatkuvasta* funktiosta. Tällainen syntyy useimmiten silloin, kun funktio määritellään paloittain. Esimerkiksi esimerkissä 2.6 määriteltiin funktio

$$h(x) = \begin{cases} x^2, \text{ kun } x < 1 \\ -x+3, \text{ kun } x \geq 1. \end{cases}$$

Funktion h kuvaaja on piirretty uudestaan seuraavaan kuvaan. Nähdään, että kohdassa $x = 1$ kuvaaja katkeaa ja funktion arvot hyppäävät äkisti aivan toiseen kohtaan. Tällainen kohta on funktion *epäjatkuvuuskohta.* Siinä funktiolla on jokin arvo, mutta kohdan välittömässä läheisyydessä jommalla kummalla puolella funktion arvot poikkeavat rajusti kyseisestä arvosta.



Epäjatkuvan funktion tunnistaa useimmin siitä, että sen kuvaaja katkeaa. On kuitenkin huomattava, että kuvaaja voi näyttää katkeavan myös sellaisessa kohdassa, jossa funktiota ei ole lainkaan määritelty. Tällaisessa kohdassahan funktio ei saa mitään arvoa, joten kuvaaja ei voi kulkea kyseisen kohdan läpi. Ohessa on esimerkkinä funktion $f(x) = 1/x$ kuvaaja.



Kohtaa, jossa funktio ei ole määritelty, *ei* kuitenkaan koskaan kutsuta epäjatkuvuuskohdaksi. Se jätetään yksinkertaisesti kokonaan jatkuvuustarkastelun ulkopuolelle. Voidaan vaikkapa ajatella, että siellä missä funktio ei ole määritelty, mitä tahansa voi tapahtua eikä funktiota voi siitä syyttää.

3.5 Lisätieto: Raja-arvon ja jatkuvuuden täsmälliset määritelmät

Määritelmä 3.5. Luku a on funktion f raja-arvo pisteessä x_0, jos kutakin mielivaltaisen pientä positiivista lukua e kohti voidaan aina löytää jokin väli pisteen x_0 ympäriltä niin, että tällä välillä lasketut funktion arvot sijaitsevat välillä $]a - e, a + e[$ (siis lähempänä kuin luvun e päässä luvusta a), lukuunottamatta mahdollisesti arvoa $f(x_0)$.

Raja-arvon täsmällisen määritelmän käyttö on hyvin haastavaa, eikä siihen paneuduta tässä tämän enempää. Jatkuvuus voidaan kuitenkin määritellä raja-arvon avulla hyvin luontevasti.

Määritelmä 3.6. Funktio f on jatkuva kohdassa x_0, jos sen arvo kohdassa x_0 on sama kuin sen molemminpuoliset raja-arvot kyseisessä kohdassa, eli

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x).$$

Funktio on kaikkialla jatkuva (tai yksinkertaisesti jatkuva), jos se on jatkuva kaikissa määrittelyjoukkonsa pisteissä.

Jatkuvuuden määritelmän ideana on se, että funktion arvon on oltava sopusoinnussa sen ympäristössä saatujen arvojen kanssa. Esimerkiksi paloittain määritelty funktio

$$h(x) = \begin{cases} x^2, \text{ kun } x < 1 \\ -x + 3, \text{ kun } x \geq 1, \end{cases}$$

jonka kuvaaja löytyy edelliseltä sivulta, ei ole jatkuva kohdassa 1. Tämä johtuu siitä, että kyseisessä kohdassa funktion arvo on 2, mutta vasemmanpuoleinen raja-arvo on 1.