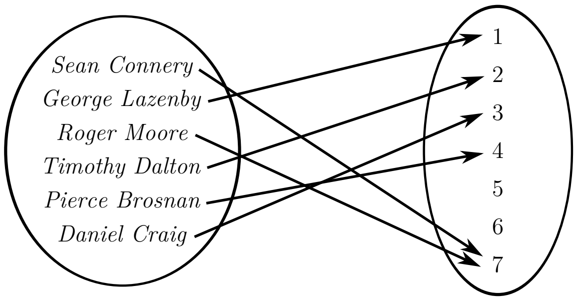
2 Reaaliarvoiset funktiot

2.1 Funktio

Karkeasti ottaen *funktio* on sääntö, joka liittää olioihin toisia olioita. Esimerkiksi voidaan ajatella funktiota, joka liittää jokaiseen James Bondia esittäneeseen näyttelijään niiden elokuvien määrän, joissa hän on esiintynyt (vuoteen 2012 mennessä). Tällainen funktio voidaan esittää alla olevan kuvan muodossa.[1]



Jokaiseen näyttelijään liitetään siis jokin positiivinen kokonaisluku. Näitä kokonaislukuja nimitetään funktion *arvoiksi.* Voidaan esimerkiksi sanoa, että lähtöarvolla *Daniel Craig* funktion arvo on 3.

James Bond -esimerkissä näyttelijöihin liitettiin kokonaislukuja. Tällä kurssilla käsitellään kuitenkin jatkossa vain funktioita, jotka liittävät reaalilukuihin toisia reaalilukuja. Sekä lähtöarvot että funktioiden arvot ovat siis tavallisia lukusuoran lukuja. Tällaisia funktioita ovat esimerkiksi seuraavat:

- ajanhetkeen liittyvä ulkolämpömittarin lukema
- neliön sivun pituuteen liittyvä neliön pinta-ala
- lukuun x liittyvä polynomilausekkeen $x^2 + 2x + 1$ arvo
- käytettävissä olevan kakunkuorrutteen määrään liittyvä kakun maksimipinta-ala
- tilillä olevaan saldoon liittyvä opiskelijan veren stressihormonin pitoisuus.

Funktioita merkitään matematiikassa yleensä kirjaimilla f, g ja h. Jos x on jokin lähtöarvo, funktion f arvoa merkitään $f(x)$. Esimerkiksi funktion arvoa lähtöarvolla 2 merkitään $f(2)$. Koska reaaliluvut voidaan esittää lukusuoran pisteinä, arvoa $f(2)$ kutsutaan myös funktion arvoksi *kohdassa 2* tai *pisteessä 2.*

Silloin kun funktion arvot ovat jonkin konkreettisen suureen arvoja, voidaan käyttää myös tuon suureen yhteydessä vakiintunutta kirjainta. Esimerkiksi funktiota, joka liittää neliön sivun pituuteen sen pinta-alan, voidaan merkitä kirjaimella A. Koska sivun pituutta 2 vastaa pinta-ala 4, merkitään $A(2) = 4$ ja sanotaan, että lähtöarvolla 2 funktion A arvo on 4.

Funktioista voidaan myös ajatella, että ne kuvaavat arvojensa *riippuvuutta* lähtöarvoista. Tästä on useimmiten kyse käytännön esimerkeissä. Esimerkiksi funktio, joka liittää jokaiseen ajanhetkeen ulkolämpötilan arvon, kuvaa lämpötilan riippuvuutta ajan-

[1] Vuonna 1967 ilmestynyt elokuva Casino Royale -parodia on jätetty pois tarkastelusta.

hetkestä. Sanotaan myös, että ulkolämpötila on ilmaistu *ajanhetken funktiona*. Muut yllä luetellut esimerkkifunktiot voidaan ilmaista riippuvuuksina seuraavasti:

- neliön pinta-alan riippuvuus sivun pituudesta
- polynomilausekkeen $x^2 + 2x + 1$ arvon riippuvuus muuttujasta x
- kakun maksimipinta-alan riippuvuus käytettävissä olevasta kakunkuorrutteen määrästä
- opiskelijan veren stressihormonin pitoisuuden riippuvuus tilin saldosta.

Kun funktion arvot tai lähtöarvot kuvaavat konkreettisia suureita, täytyy myös pitää huolta yksiköistä. Tämä voidaan tehdä esimerkiksi sanomalla, että funktio T ilmaisee ulkolämpömittarin arvon Celsius-asteina kunakin ajanhetkenä, joka puolestaan ilmoitetaan sekunteina vuorokauden alusta lukien. Lyhyemmin voidaan myös ilmaista yksiköt esimerkiksi sulkeissa sanomalla, että funktion arvo $T(t)$ (°C) kertoo ulkolämpömittarin lukeman ajanhetkellä t (s).

2.2 Funktion lauseke

Funktio voi kuvata mitä tahansa olemassaolevaa riippuvuutta. Toisinaan tällainen riippuvuus tunnetaan vain mittaustulosten perusteella. Esimerkiksi ulkolämpötila voidaan tarkistaa ainoastaan katsomalla lämpömittarin lukema. Tällä kurssilla kuitenkin keskitytään funktioihin, joiden riippuvuussäännön ilmaisee jokin *laskulauseke*. Vain lausekkeilla ilmaistuja funktioita voidaan käsitellä algebrallisesti eli symbolisesti. Esimerkiksi neliön pinta-alalle sivun pituuden funktiona voidaan kirjoittaa lauseke

$$A(x) = x^2.$$

Lauseke tulkitaan niin, että x kuvaa lähtöarvoa, esimerkiksi sivun pituutta 3, jolloin funktion arvo saadaan sijoittamalla sivun pituus x:n paikalle oikealle puolelle. Pinta-ala sivun pituudella 3, eli funktion arvo $A(3)$, olisi tällöin $3^2 = 9$.

Funktion laskulauseke voidaan ilmaista sanomalla esimerkiksi ”funktio f, jolle pätee $f(x) = x + 2$”. Toisinaan sanotaan myös lyhyemmin ”funktio $f(x) = x + 2$”.

Huomaa, että funktion lausekkeessa käytetty x on vain ”paikanpitäjä”, johon sijoitetaan lähtöarvoja. Tämä kirjain voi olla mikä hyvänsä. Esimerkiksi jos funktio f kuvaa jonkin suureen riippuvuutta ajasta, käytetään yleensä kirjainta t, jolloin funktion arvon määrittelevä lauseke voi olla vaikkapa $f(t) = t^2 + 1$.

Huomaa myös, että laskulausekkeisiin sijoittaminen on ajateltava täysin mekaanisesti (ottamalla kuitenkin laskujärjestys huomioon). Esimerkiksi jos funktio on määritelty lausekkeella $f(x) = \sqrt{x} + 2x$, siihen voidaan sijoittaa lukujen lisäksi mitä tahansa symboleja tai lausekkeita, muistaen kuitenkin lisätä tarvittaessa sulut. Esimerkiksi

$$\begin{aligned} f(\text{å}) &= \sqrt{\text{å}} + 2\text{å} \\ f(\heartsuit) &= \sqrt{\heartsuit} + 2\heartsuit \\ f(y+1) &= \sqrt{y+1} + 2(y+1) = \sqrt{y+1} + 2y + 2 \\ f(4x) &= \sqrt{4x} + 2 \cdot 4x = 2\sqrt{x} + 8x. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.1. Funktioita, joiden lauseke on polynomi, kutsutaan *polynomifunktioiksi.* Tällaisia ovat esimerkiksi funktiot

$$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = -x^2 + 4x - 7, \qquad h(x) = x^5 - x^3 + x.$$

Yleisesti polynomifunktio on muotoa

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

missä luvut $a_0, \ldots, a_n$ ovat vakioita. Näitä lukuja sanotaan polynomin *kertoimiksi.* Suurin luku, joka esiintyy x:n eksponenttina, on polynomin *kertaluku* eli *aste.* Myös *vakiofunktio* $f(x) = a$, joka saa kaikilla lähtöarvoilla saman arvon a, on polynomifunktio. Sen aste on nolla.

Polynomifunktiot ovat tietyssä mielessä yksinkertaisimpia funktioita, sillä niiden matemaattiset ominaisuudet tunnetaan hyvin.

Esimerkki 2.2. Funktion arvot voidaan myös ilmoittaa usealla erilaisilla lausekkeella, joita käytetään erityyppisillä lähtöarvoilla. Tällaista määrittelytapaa kutsutaan *paloittain määrittelemiseksi.* Esimerkiksi itseisarvofunktio $f(x) = |x|$ voidaan määritellä seuraavilla lausekkeilla:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Tämä tarkoittaa, että lähtöarvon x ollessa epänegatiivinen käytetään ylempää lauseketta, jolloin funktion arvo on $f(x) = x$. Jos taas x on negatiivinen, käytetään alempaa lauseketta, ja $f(x) = -x$. Esimerkiksi $f(4) = 4$, mutta $f(-1) = -(-1) = 1$.

Jako voi olla monimutkaisempikin, kuten seuraavalla funktiolla:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{kun } x \text{ on jokin muu kokonaisluku kuin } 0 \\ 1, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

2.3 Funktion määriteltävyys

Kun funktioita määritellään, on kiinnitettävä huomiota kahteen seikkaan:

1) funktion tulee liittää jokaiseen lähtöarvoon *täsmälleen yksi* funktion arvo
2) lähtöarvoiksi eivät välttämättä kelpaa kaikki reaaliluvut.

Ensimmäinen kohta antaa rajoituksen sille, mikä ylipäänsä kelpaa funktioksi. Ei esimerkiksi voida määritellä funktiota ehdolla ”funktion arvo $g(x)$ on sellainen luku, joka toiseen korotettuna antaa lähtöarvon x”. Tämä johtuu siitä, että esimerkiksi luvulla $x = 4$ funktion arvoksi tulisi sekä $g(x) = 2$ että $g(x) = -2$, koska kummankin neliö on 4.

Toinen kohta tulee ilmi esimerkiksi jos määritellään funktio $f(x) = 1/x$. Koska nollalla ei voi jakaa, nolla ei kelpaa funktion lähtöarvoksi. Tällaisessa tilanteessa on huomioitava funktion *määrittelyjoukko.* Esimerkkifunktion f tapauksessa määrittelyjoukkoon kuuluvat kaikki reaaliluvut nollaa lukuunottamatta.

Funktion määrittelyjoukko on aina ilmaistava funktiota määriteltäessä, varsinkin jos se ei ole koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$. Voidaan joko sanoa suoraan, että funktion f määrittelyjoukko on A, tai voidaan käyttää merkintää[1]

$$f\colon A \to \mathbb{R},$$

missä A on funktion määrittelyjoukko. Funktio voidaan nyt määritellä lyhyesti kirjoittamalla esimerkiksi $f\colon [0,\infty[\, \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

Esimerkki 2.3. Funktiota, jonka lauseke on kahden polynomin osamäärä, kutsutaan *rationaalifunktioksi.* Rationaalifunktioita ovat esimerkiksi

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-1}, \qquad g(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+1}, \qquad h(x) = \frac{1}{5x^4+x}.$$

Myös polynomifunktiot ovat rationaalifunktioita, sillä nimittäjäpolynomi voi olla vakio. Esimerkiksi $x+2 = \frac{x+2}{1}$. Lisäksi rationaalifunktioiden ja polynomien summat ovat rationaalifunktioita, koska polynomi voidaan laventaa ja lausekkeet yhdistää. Esimerkiksi

$$\frac{x+1}{x-1} + x^2 = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x^2(x-1)}{x-1} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x^3-x^2}{x-1} = \frac{x^3-x^2+x+1}{x-1}.$$

Rationaalifunktioiden matemaattiset ominaisuudet määräytyvät osoittaja- ja nimittäjäpolynomien ominaisuuksista. Rationaalifunktio on määritelty vain niillä lähtöarvoilla, joilla nimittäjäpolynomi ei saa arvoa 0. Tämä johtuu siitä, että nollalla ei voi jakaa. Esimerkiksi rationaalifunktion

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

määrittelyjoukkoon eivät kuulu luvut 1 ja -1. Tällainen määrittelyjoukko voidaan ilmaista *joukkoerotuksen* avulla seuraavasti: $\mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$. Merkintä $A \setminus B$ tarkoittaa jäljelle jääviä lukuja, kun joukosta A poistetaan joukon B sisältämät luvut.

Osoittajapolynomin nollakohdat puolestaan sanelevat sen, milloin rationaalifunktio saa arvon nolla. Osamäärä a/b ei nimittäin voi olla nolla, ellei osoittaja a ole nolla. Esimerkiksi funktion

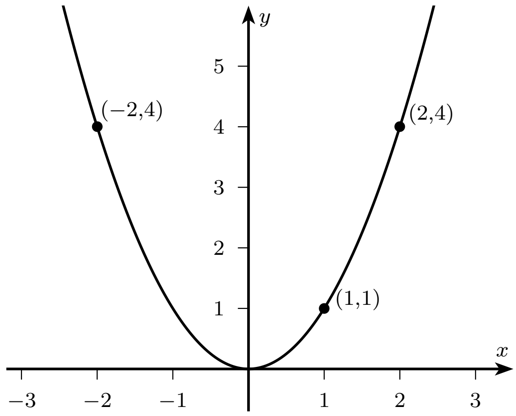
$$g(x) = \frac{x-2}{x^3+x}$$

arvo on nolla ainoastaan lähtöarvolla $x = 2$.

2.4 Kuvaaja

Funktio voidaan esittää visuaalisesti koordinaatistoon piirrettävän *kuvaajan* eli *graafin* avulla. Funktion f kuvaaja on käyrä, jonka jokainen piste on muotoa $(x, f(x))$. Toisin sanoen, piste (x,y) on kuvaajalla täsmälleen silloin, kun $y = f(x)$. Alla on esimerkkinä funktion $f(x) = x^2$ kuvaaja ja muutamia pisteitä kuvaajalla.

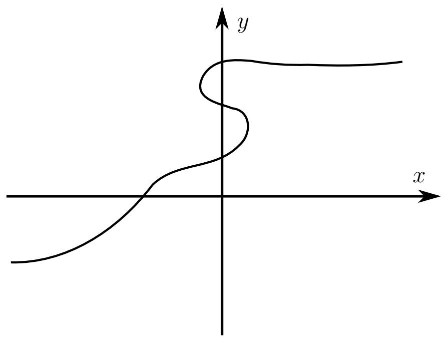
[1] Yleisempi merkintä on $f\colon A \to B$, missä B on funktion *maalijoukko.* Maalijoukko kuvaa funktion arvojen tyyppiä. Koska tällä kurssilla kaikki funktion arvot ovat reaalilukuja, valitaan aina $B = \mathbb{R}$.



Kuvaajan hyöty on siinä, että sen perusteella voidaan saada kuva funktion yleisistä ominaisuuksista tarvitsematta laskea mitään. Kuvaajasta näkyy muun muassa funktion jatkuvuus, kasvu- tai vähenemisnopeus, jaksollisuus, maksimi- ja minimiarvot sekä nollakohtien olemassaolo. On kuitenkin muistettava, että piirros ei koskaan voi olla täysin tarkka, eikä kaikista funktioista edes pystytä piirtämään havainnollistavaa kuvaa. Kuvan perusteella ei siis voi tehdä täsmällisiä päätelmiä funktion arvoista.

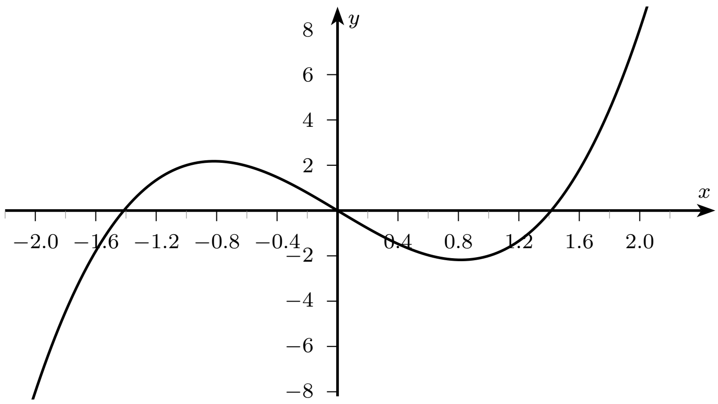
Kuvaajan piirtämiseen voi käyttää graafisia laskimia tai tietokoneohjelmia. Myös internetistä löytyy kuvaajan piirtämiseen hyviä apuneuvoja, joista voidaan mainita esimerkiksi GeoGebra-ohjelmisto (`http://www.geogebra.org`) sekä Wolfram|Alphan matematiikkatyökalut (`http://www.wolframalpha.com`). Kun mitään työkalua ei ole saatavilla, kuvaajaa voi tietysti myös hahmotella laskemalla funktion arvo suurella määrällä mielivaltaisia lähtöarvoja ja piirtämällä syntyvät pisteet koordinaatistoon.

Kaikki koordinaatistoon piirretyt käyrät eivät kuvaa funktioita. Koska funktion arvojen täytyy olla yksikäsitteisiä, kuvaajalla *ei saa olla kahta pistettä, joilla on sama x-koordinaatin arvo mutta eri y-koordinaatin arvo.* Jos siis jokin pystysuora leikkaa kuvaajaksi väitetyn käyrän useammassa kuin yhdessä kohdassa, kyseessä ei ole funktion kuvaaja. Funktion kuvaaja ei esimerkiksi voi "laskostua" seuraavan kuvan tavalla.



Esimerkki 2.4. Seuraavassa kuvassa on polynomifunktion $f(x) = 2x^3 - 4x$ kuvaaja. Kuvaajasta nähdään, että negatiivisilla lähtöluvuilla funktion arvot suurenevat. Noin

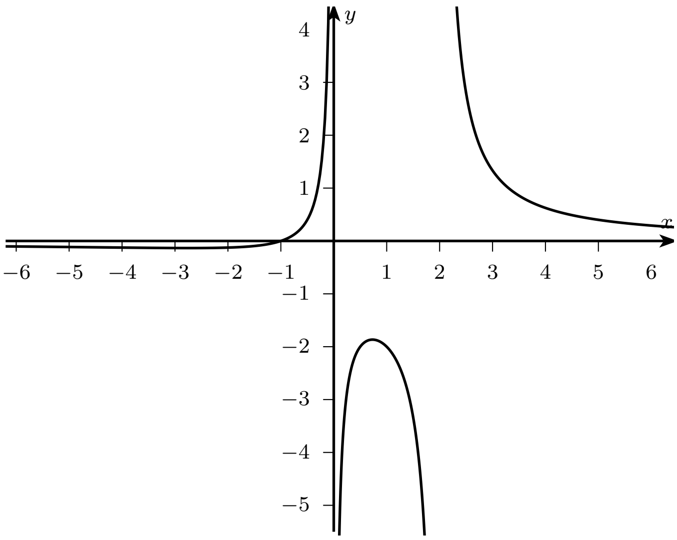
arvosta $x = -0{,}8$ lähtien arvot alkavat pienentyä, kunnes ne jälleen positiivisella puolella lähtevät nousuun. Kuvan perusteella näyttäisi lisäksi siltä, kuin funktio saisi arvon nolla pisteissä 0, 1,4 ja $-1{,}4$, mutta suora lasku osoittaa, että näistä vain 0 on funktion todellinen nollakohta. Esimerkiksi $f(1{,}4) = -0{,}112$.



Esimerkki 2.5. Tarkastellaan rationaalifunktiota

$$g\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x+1}{x^2 - 2x}.$$

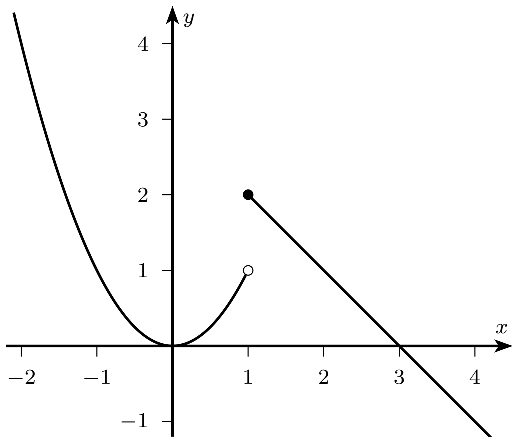
Funktio ei ole määritelty nimittäjän nollakohdissa, eli kun $x = 0$ tai $x = 2$. Alla olevasta kuvasta nähdään, että g:n kuvaaja katkeaa kohdissa, joissa funktio ei ole määritelty. Esimerkiksi nollan vasemmalla puolella funktio kasvaa nopeasti kohti äärettömyyttä ja nollan oikealla puolella puolestaan nousee negatiivisesta äärettömyydestä palatakseen sinne takaisin ja laskeutuakseen myöhemmin jälleen kuvan yläreunasta. Nähdään myös, että suurilla ja pienillä x:n arvoilla funktion arvot näyttävät lähestyvän nollaa.



Esimerkki 2.6. Tarkastellaan paloittain määriteltyä funktiota

$$h(x) = \begin{cases} x^2, \text{ kun } x < 1 \\ -x + 3, \text{ kun } x \geq 1. \end{cases}$$

Funktion h kuvaaja näkyy seuraavassa kuvassa. Kuvaaja katkeaa kohdassa $x = 1$, jossa funktion määrittelevä lauseke vaihtuu. Luku 1 kuitenkin kuuluu funktion määrittelyjoukkoon, koska siinä voidaan laskea funktion arvo. Tämä arvo on $h(1) = -1 + 3 = 2$, ja kuvaajalle on tapana piirtää täytetty pallukka vastaavaan kohtaan $(1, 2)$. Kuvaajan toiseen osaan piirretään tyhjä pallukka osoittamaan, että käyrän päästä "puuttuu" piste.



2.5 Yhdistetty funktio

Funktioita voidaan ketjuttaa, jolloin saadaan uusia funktioita. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että yhden funktion saama arvo annetaan toiselle funktiolle lähtöarvoksi. Funktioista f ja g saadaan ketjuttamalla *yhdistetty funktio*, jota merkitään $f \circ g$.

Esimerkki 2.7. Tarkastellaan funktioita $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x + 1$. Lasketaan aluksi yhdistetyn funktion $f \circ g$ arvo luvulla 2. Ensin käytetään funktiota g, jonka arvo lähtöarvolla 2 on 3. Sen jälkeen annetaan saatu tulos funktiolle f lähtöarvoksi, jolloin saadaan funktion arvo $f(3) = 9$. Yhdistetyn funktion $f \circ g$ arvo pisteessä 2 on siis 9.

On hyvin olennaista, miten päin funktiot kirjoitetaan. *Oikealla puolella olevaa käytetään aina ensiksi.* Jos syötetään luku 2 ensin funktioon f, saadaan 4, joka puolestaan syötettynä funktioon g antaa tulokseksi 5. Siispä $(f \circ g)(2) \neq (g \circ f)(2)$.

Edellä lasketut laskut voidaan myös esittää havainnollistaen vaikkapa näin:

$$f \circ g \colon 2 \xmapsto{g} 3 \xmapsto{f} 9$$

$$g \circ f \colon 2 \xmapsto{f} 4 \xmapsto{g} 5$$

Tärkeätä on muistaa, että yhdistämisjärjestys vaikuttaa yhdistetyn funktion arvoon.

Yhdistetyssä funktiossa $f \circ g$ funktiota g kutsutaan *sisäfunktioksi* ja funktiota f puolestaan *ulkofunktioksi*. Nimitys tulee siitä, että yhdistetyn funktion lauseke saadaan sijoittamalla sisäfunktion g lauseke "sisälle" ulkofunktion f lausekkeeseen. Tämä voidaan esittää kaavana

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Esimerkki 2.8. Tarkastellaan edelleen funktioita $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x + 1$. Yhdistetyn funktion $f \circ g$ laskulauseke muodostetaan sijoittamalla sisäfunktion lauseke $x + 1$ ulkofunktioon muuttujan x paikalle. Tällöin saadaan lauseke

$$f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2.$$

Muilla tavoin yhdistämällä saadaan muun muassa seuraavanlaisia lausekkeita:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1, \\
(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4, \\
(g \circ g)(x) &= g(g(x)) = g(x + 1) = (x + 1) + 1 = x + 2.
\end{aligned}$$

Mikään ei estä myöskään yhdistämästä useampia funktioita. Näin saataisiin esimerkiksi funktio

$$(f \circ g \circ f)(x) = f(g(f(x))) = f(g(x^2)) = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2.$$

Yhdistämisjärjestys on useammankin funktion tapauksessa oikealta vasemmalle.

Huomaa, että funktioita yhdistettäessä niiden lausekkeissa olevilla muuttujilla ei ole mitään tekemistä keskenään, vaikka niitä merkittäisiinkin samalla kirjaimella. Jos tässä on sekaannuksen vaara, voi toisen muuttujan paikalle vaihtaa jonkin toisen kirjaimen. Esimerkiksi yllä olevassa esimerkissä voikin kirjoittaa funktiot muodossa $f(y) = y^2$ ja $g(x) = x + 1$ ja yhdistää $f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$.

Tällä kurssilla on usein osattava esittää jokin funktio yksinkertaisemmista funktioista yhdistettynä funktiona. Tällainen pilkkominen voidaan aina tehdä monella eri tavalla.

Esimerkki 2.9. Funktio

$$h(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$$

voidaan ajatella yhdistetyksi funktioksi, jossa ulkofunktio on $f_1(x) = \frac{1}{x}$ ja sisäfunktio on $g_1(x) = (x^2 + 1)^2$. Tällöin nimittäin

$$f_1(g_1(x)) = f_1\big((x^2 + 1)^2\big) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}.$$

Toisaalta voidaan myös valita $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$ ja $g_2(x) = x^2 + 1$, jolloin

$$f_2(g_2(x)) = f_2(x^2 + 1) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}.$$

Vielä eräs tapa olisi valita $f_3(x) = x^2$ ja $g_3(x) = \frac{1}{x^2+1}$, sillä

$$f_3(g_3(x)) = f_3\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) = \left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)^2 = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}.$$

Muitakin tapoja varmasti löytyy.