1 Johdanto

Kurssilla Y100 on tarkoitus tutustua sellaisiin matemaattisiin menetelmiin, joista voi katsoa olevan hyötyä missä tahansa luonnontieteissä. Erityisesti pidetään kuitenkin mielessä metsien biologian ja talouden tutkimukseen liittyvät sovellukset. Kurssi on kuitenkin pääasiassa matematiikan kurssi, joten sovellukset näyttelevät enimmäkseen sivuosia.

Kurssi jakautuu karkeasti seuraaviin osiin:

- funktiot ja niiden perusominaisuudet
- derivointi
- integrointi
- matriisilaskenta.

Kun jokin suure riippuu toisesta suureesta, riippuvuutta kuvaa yleensä jokin funktio. Derivointi ja integrointi ovat menetelmiä, joilla voidaan saada tietoa tästä funktiosta. Matriisilaskenta sen sijaan on muista aiheista täysin riippumaton. Matriisien avulla voidaan muun muassa helpottaa lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisua.

Kurssilla pyritään myös näyttämään esimerkein, kuinka tietokoneiden käyttö helpottaa matemaattista analyysia. Lisäksi tarkastellaan joitakin yksinkertaisia tapauksia, joissa funktiota ei tunneta täsmällisesti vaan on turvauduttava numeeriseen dataan. Minkään tietyn tietokoneohjelman käyttöä ei kuitenkaan kurssilla opeteta.

Tämän johdannon lopuksi on liitetty muutama esimerkki, joiden on tarkoitus antaa kuvaa siitä, millä tavoin tällä kurssilla opittavaa teoriaa voidaan käyttää sovelluksissa.

Esimerkki 1.1. Maastoalueeseen vuotaa läheisestä tuotantolaitoksesta rikkipitoista yhdistettä tietyllä virtausnopeudella v. Olemme kiinnostuneita tietämään, kuinka nopeasti maaston rikkipitoisuus ylittää tietyn rajan. Jos rikkiyhdisteen virtausnopeus olisi vakio, vastaus olisi helppo laskea ottamalla huomioon maaston nestemäärä ja rikkiliuoksen pitoisuus. Virtausnopeus ei kuitenkaan ole vakio, vaan riippuu tuotantolaitoksen prosessien ajoituksista johtuen tietyllä täsmällisellä tavalla vuorokaudenajasta.

Tätä ongelmaa varten on aluksi tunnettava *funktio*, joka kertoo virtausnopeuden $v(t)$ riippuvuuden ajanhetkestä t. Sen jälkeen on osattava laskea, kuinka paljon virtaus *kerryttää* maastoon rikkipitoista liuosta. Jos virtausnopeus olisi vakio, voitaisiin sanoa suoraan, että kertymä on $v \cdot t$, virtausnopeus kertaa virtauksen alkuhetkestä kulunut aika. Nyt ongelma on kuitenkin monimutkaisempi, ja tarvitaan funktion *integraalin* käsitettä. Integraalin avulla voidaan laskea suureiden kertymiä.

Esimerkki 1.2. Edellisen esimerkin tilanteessa olemme lisäksi kiinnostuneita siitä, mihin vuorokaudenaikaan virtaus saavuttaa huippunopeutensa. Jos tunnemme virtausnopeutta v kuvaavan funktion, voimme käyttää funktion *derivaattaa* selvittämään täsmällisesti virtauksen huipun ajanhetken. Derivaatta kuvaa funktion kasvu- ja vähenemisnopeutta, ja täsmälleen huippukohdassa virtauksen nopeus ei kasva eikä vähene. Derivaattaa voidaan siis käyttää huippukohdan määrittämiseen.

Esimerkki 1.3. Jos eliölajin elinolosuhteet ovat suotuisat (resursseja ja tilaa rajattomasti, ei vihollisia), eliöpopulaation lisääntymistahti on suoraan verrannollinen populaation kokoon. Toisin sanoen lisääntymisnopeus kullakin ajanhetkellä on populaation koko $N(t)$ tuolla samalla ajanhetkellä kerrottuna jollakin verrannollisuuskertoimella r.

Lisääntymisnopeus on populaation koon muuttumisnopeus, joten sitä kuvaa populaation koon *derivaatta* $N'(t)$. Matemaattisesti voidaan osoittaa, että ainoat funktiot, joiden derivaatta on suoraan verrannollinen funktioon itseensä, ovat *eksponenttifunktioita.* Tällä tavoin nähdään, että suotuisissa oloissa populaation koko kasvaa eksponentiaalisesti. Eksponentiaalista kasvumallia kutsutaan myös *Malthusin kasvumalliksi* kehittäjänsä Thomas Malthusin mukaan.

Esimerkki 1.4. Metsän *sukkessiolla* tarkoitetaan sitä, kuinka eri lajit korvaavat toisiaan metsän ikääntyessä. Metsän syntyessä esimerkiksi entiselle viljelyalueelle puuvartiset lajit alkavat raivata tilaa heiniltä, ja vähitellen varsinaiset puut korvaavat ensimmäiset paikalle ehtineet pensaslajit. Lajisto muuttuu vähitellen, kunnes metsä saavuttaa kypsän iän ja tilanne tasapainottuu. Silloin tällöin on mahdollista, että esimerkiksi metsäpalo hävittää osan metsää, jolloin kierto alkaa taas alusta.

Sukkessiota voidaan kuvata siirtymäyhtälöillä. Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi vain nuorta metsää (mukaan lukien heinikko) ja vanhaa metsää. Olkoon x_1 nuoren metsän pinta-ala ja x_2 vanhan metsän pinta-ala jonakin vuonna. Tietyn ajanjakson (esim. 10 vuotta) kuluessa nuoresta metsästä puolet on muuttunut vanhaksi ja puolet on edelleen nuorta. Toisaalta samassa ajassa 0,5 prosenttia vanhasta metsästä on palautunut alkutilaan jonkin katastrofin seurauksena. Jos y_1 ja y_2 kuvaavat nuoren ja vanhan metsän pinta-aloja sovitun ajanjakson jälkeen, saadaan sukkessiota kuvaamaan seuraavat siirtymäyhtälöt:

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}005x_2 &= y_1 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}995x_2 &= y_2 \end{cases}$$

Kyseessä on niin sanottu *lineaarinen yhtälöryhmä.* Toisinaan tunnemme pinta-alat x_1 ja x_2 ja haluamme saada tietää tulevat pinta-alat y_1 ja y_2. Joskus taas tunnemme viimeksi mainitut alat ja haluamme tietää, mitä olivat x_1 ja x_2. On myös tilanteita, joissa haluamme saada selville lajiston jakauman *tasapainotilanteessa*, jossa sovitun ajanjakson jälkeen jakauma ei ole muuttunut lainkaan. Tällaisessa tilanteessa asetamme $x_1 = y_1$ ja $x_2 = y_2$ ja ratkaisemme näillä ehdoilla pinta-alat x_1 ja x_2.

Lineaarisia yhtälöryhmiä käsitellään helpoiten *matriisien avulla.* Yllä olevasta yhtälöparista saisimme kaiken mahdollisen tiedon helposti myös alkeellisemmilla menetelmillä, mutta jos muuttujia ja yhtälöitä on enemmän, matriisien käyttö helpottaa käsittelyä huomattavasti. Myös suurien datamäärien numeeriseen käsittelyyn erikoistunut tietokoneohjelmisto MatLab käyttää laskennassaan hyväksi matriiseja.