6.8 Erityisfunktioiden sovelluksia

Tässä luvussa esitellään muutama esimerkki, joissa käytetään hyväksi eksponentti-, logaritmi- sekä trigonometrisia funktioita. Ensimmäinen esimerkki juontaa juurensa siitä, että luonnollinen eksponenttifunktio on oma derivaattansa.

Esimerkki 6.9. (Eksponentiaalinen kasvu.) Tarkastellaan bakteeripopulaatiota, jonka kasvunopeus on suotuisissa olosuhteissa (riittävästi elintilaa ja ravintoa, ei vihollisia jne.) suoraan verrannollinen populaation kokoon. Olkoon $N(t)$ populaation massa milligrammoina ajanhetkellä t (tuntia). Populaation kasvunopeus ajanhetkellä t on derivaatta $N'(t)$. Se, että kasvunopeus on suoraan verrannollinen populaation kokoon, voidaan ilmaista yhtälönä

$$N'(t) = kN(t), \tag{6.1}$$

missä k on jokin verrannollisuuskerroin.

Yhtälö (6.1) on esimerkki *differentiaaliyhtälöstä.* Differentiaaliyhtälöissä esiintyy jonkin tuntemattoman funktion lisäksi sen derivaatta, ja tarkoituksena on löytää funktio, joka toteuttaa yhtälön. Matemaattisesti voidaan osoittaa, että yhtälön (6.1) kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$N(t) = N_0 e^{kt}.$$

Funktio N kuvaa *eksponentiaalista kasvua.* Verrannollisuuskerroin k ilmaisee kasvunopeuden: jos k on negatiivinen, kyse on itse asiassa eksponentiaalisesta vähenemisestä. Vakio N_0 puolestaan kuvaa populaation kokoa alkuhetkellä, sillä

$$N(0) = N_0 e^{k \cdot 0} = N_0 e^0 = N_0 \cdot 1 = N_0.$$

Selvitetään bakteeripopulaation määrää kuvaava funktio tilanteessa, jossa alussa populaation massa on 2 mg ja viiden tunnin kuluttua 2 g eli 2000 mg. Vakio N_0 kuvaa populaation koko alkuhetkellä, joten tässä tapauksessa $N_0 = 2$. Ehdosta $N(5) = 2000$ saadaan yhtälö

$$N(5) = N_0 e^{kt} \quad \text{eli} \quad 2000 = 2e^{k \cdot 5}.$$

Jaetaan yhtälö aluksi puolittain luvulla 2, jolloin saadaan

$$1000 = e^{5k}.$$

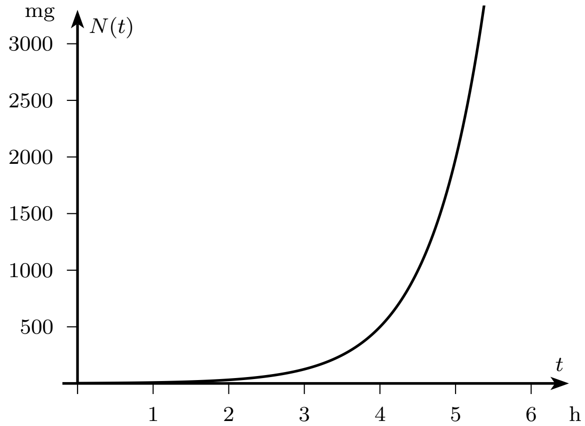
Käytetään luonnollista logaritmia eksponentin selvittämiseen:

$$\ln 1000 = 5k.$$

Viimeisestä yhtälöstä nähdään lopulta, että $k = (\ln 1000)/5 \approx 1{,}38$. Näin ollen bakteeripopulaation kokoa kuvaa funktio

$$N(t) = 2e^{1{,}38t} \quad \text{(mg)}.$$

Eksponentiaalinen kasvu on hyvin nopeaa. Tämä näkyy esimerkiksi oheisesta kuvasta, johon on piirretty funktion $N(t)$ kuvaaja.



Bakteeripopulaatioiden lisäksi muun muassa radioaktiivinen hajoaminen noudattaa yhtälöä (6.1), joten myös radioaktiivinen hajoaminen on eksponentiaalista, verrannollisuuskerroin k vain on tällöin negatiivinen.

Toinen esimerkki liittyy hyvin yleiseen logaritmifunktion sovellukseen.

Esimerkki 6.10. (Logaritminen asteikko.) Toisinaan on käytännöllistä ilmaista jonkin suureen arvoja käyttämällä varsinaisten arvojen sijasta niiden logaritmeja. Tämä tulee kyseeseen erityisesti, jos suureen arvot vaihtelevat erityisen laajoissa rajoissa. Logaritmin ottaminen palauttaa arvot ymmärrettävälle asteikolle.

Esimerkiksi kuuloaisti toimii siten, että äänen intensiteetin kymmenkertaistaminen lisää kuulovaikutelman voimakkuutta vakiomäärällä, oli kyse sitten kovista tai hiljaisista äänistä. Toisin sanoen kymmenkertainen äänen voimistaminen kuulostaa alkuperäiseen verrattuna samalta samalta kuin satakertainen voimistaminen kymmenkertaiseen verrattuna. Jos esimerkiksi kellon tikityksen voimakkuus on 1 ja puheen 10, on ukkosen voimakkuus jopa 1000.

Äänen voimakkuuden kuvaamiseen käytetään yleisesti *desibeliasteikkoa*, joka määritellään kaavalla

$$L = 10\big(\lg(I) - \lg(I_0)\big). \tag{6.2}$$

Kaavassa I on äänen intensiteetti (yksikkönä $\mathrm{W/m^2}$), I_0 on kuulokynnystä vastaava intensiteetti ($10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$), lg on kymmenkantainen logaritmi ja L on äänenvoimakkuuden vaikutelma desibeleinä (dB).

Tutkitaan esimerkin vuoksi, mitä kaavan (6.2) mukaan tapahtuu kuulovaikutelmalle, kun äänen intensiteetti kasvaa kymmenkertaiseksi. Olkoon alkuperäinen intensiteetti I_1. Tällöin äänenvoimakkuus on

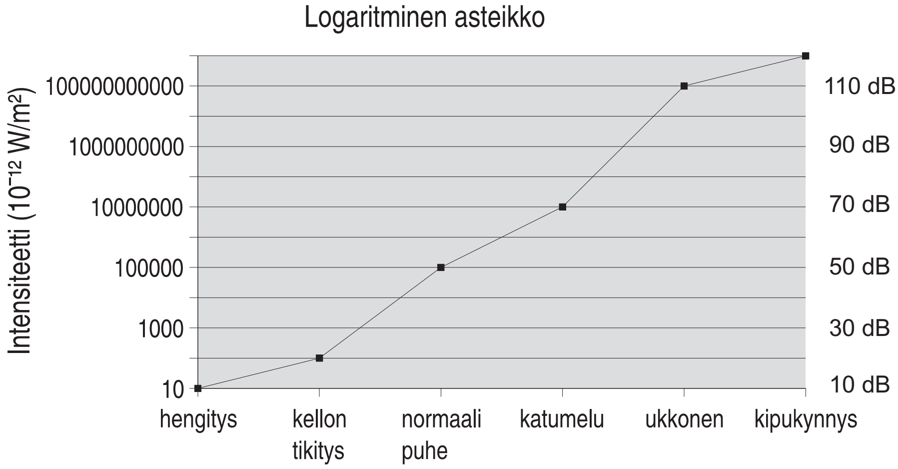
$$L_1 = 10\big(\lg(I_1) - \lg(I_0)\big).$$

Kasvatetaan intensiteetti kymmenkertaiseksi asettamalla $I_2 = 10 \cdot I_2$. Uudeksi äänenvoimakkuudeksi tulee tällöin

$$\begin{aligned} L_2 &= 10\big(\lg(I_2) - \lg(I_0)\big) = 10\big(\lg(10 \cdot I_1) - \lg(I_0)\big) \\ &= 10\big(\lg(10) + \lg(I_1) - \lg(I_0)\big) = 10\big(1 + \lg(I_1) - \lg(I_0)\big) \\ &= 10 + 10\big(\lg(I_1) - \lg(I_0)\big) = 10 + L_1. \end{aligned}$$

Intensiteetin kymmenkertaistaminen lisää siis desibelilukemaa kymmenellä. Laskussa käytettiin hyväksi tulon logaritmin kaavaa $\lg(xy) = \lg x + \lg y$.

Seuraavaan kaavioon on koottu joitakin äänenvoimakkuuksia. Vasemmassa laidassa näkyy äänen intensiteetti ja oikeassa laidassa vastaava desibelilukema. Huomaa, että desibelilukemat nousevat tasaisesti, kun taas intensiteettilukemat kasvavat paljon nopeammin (itse asiassa eksponentiaalisesti).



Desibeliasteikolla kuvataan toisinaan myös muita fysikaalisia suureita kuten jännitteitä ja taajuuksia. Muita logaritmisia asteikkoja esiintyy myös paljon eri ilmiöitä kuvaamassa. Mainittakoon esimerkkinä Richterin asteikko, jolla kuvataan maanjäristysten voimakkuutta sekä pH-asteikko, joka kuvaa vesiliuoksen happamuutta tai emäksisyyttä.

Viimeisissä esimerkeissä hyödynnetään trigonometristen funktioiden jaksollisuutta.

Esimerkki 6.11. (Jaksolliset ilmiöt.) Tietylle alueelle osuvan auringonsäteilyn määrä vaihtelee jaksollisesti vuodenaikojen mukaan. Tämä vaihtelu vaikuttaa merkittävästi kasvien kasvunopeuteen. Jos muita tekijöitä ei oteta huomioon, voitaisiin erään lauhkealla vyöhykkeellä kasvavan lämpimän kasvukauden nurmikasvilajin kasvunopeutta arvioida esimerkiksi seuraavalla funktiolla:

$$k(t) = 1500 - 900\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right) \quad \text{(kg/ha/kk)},$$

missä t on aika kuukausina erään vuoden alusta lähtien. Tämän funktion kuvaaja on piirretty jäljempänä seuraavaan kuvaan.

Valitun funktion ideana on se, että kosini on jaksollinen funktio. Sisäfunktio $\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}$ on asetettu niin, että funktion jakso, joka kosinilla tavallisesti on 2π, muuttuu kuvaamaan 12 kuukautta ja alkamaan sopivasta kohdasta vuotta. Lisäksi funktion arvot on skaalattu niin, että ne osuvat välin $[-1, 1]$ sijasta välille $[600, 2400]$.

Tarkistetaan esimerkin vuoksi funktion k jakson pituus: koska kosinifunktiolle pätee $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ kaikilla x, pätee funktion k lausekkeelle

$$1500 - 900\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right) = 1500 - 900\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2} + 2\pi\right).$$

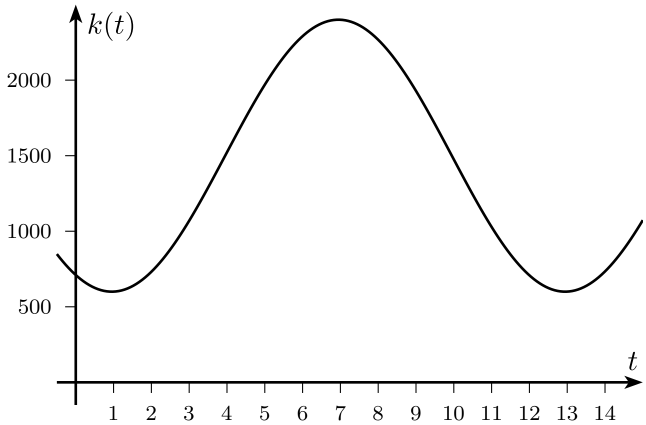
Sisäfunktion lauseketta hieman muokkaamalla nähdään, että

$$\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6} \cdot 12 - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}(t + 12) - \frac{1}{2}.$$

Siispä funktiolle k pätee

$$1500 - 900 \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right) = 1500 - 900 \cos\left(\frac{\pi}{6}(t + 12) - \frac{1}{2}\right)$$

eli $k(t) = k(t + 12)$. Funktion jakson pituus on siis 12.



Tutkitaan nyt derivaatan avulla, missä kuussa kasvi kasvaa nopeiten. Kasvunopeuden huippujen selvittämiseksi derivoidaan se yhdistetyn funktion derivoimissäännöllä. Kosinin sisäfunktion derivaatta on $\pi/6$, joten saadaan

$$\begin{aligned} k'(t) &= 0 - 900\left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right)\right) \cdot \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{150} \sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Derivaatta on nolla silloin, kun sen sisältämä sinilauseke on nolla. Sinifunktion nollakohdat puolestaan ovat 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, jne. Päädytään siis ratkaisemaan yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2} &= n\pi \\ \frac{\pi}{6}t &= \frac{1}{2} + n\pi \\ t &= \frac{3}{\pi} + 6n \approx 0{,}95 + 6n. \end{aligned}$$

Jotkin lasketuista derivaatan nollakohdista ovat mahdollisesti maksimikohtia. Koska funktion k arvot toistuvat 12 kuukauden välein, riittää päätellä funktion kulku ensimmäisen vuoden aikana. Tuon vuoden aikana derivaatan nollakohdat ovat 0,95 ja 6,95 (tammikuun lopussa ja heinäkuun lopussa). Vuosi jakautuu siis kolmeen väliin:

$$[0, 0{,}95[, \quad]0{,}95, 6{,}95[\quad \text{ja} \quad]6{,}95, 12].$$

Tarkistetaan derivaatan etumerkki kullakin välillä:

$$k'(0) \approx -0{,}01, \quad k'(3) \approx 0{,}02 \quad \text{ja} \quad k'(10) \approx -0{,}02.$$

Kulkukaavio on seuraavanlainen:

	$0 < t < 0{,}95$	$0{,}95 < t < 6{,}95$	$6{,}95 < t < 12$
$k'(t)$	$-$	$+$	$-$
$k(t)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Kulkukaaviosta ja funktion jaksollisuudesta päätellen kasvun huippukohta on joka vuosi heinäkuun lopussa.

Esimerkki 6.12. Tarkastellaan vielä edellisen esimerkin nurmikasvia. Kasvunopeus kerryttää kasvin biomassaa. Lasketaan integroimalla biomassan kertymä ensimmäisen talven aikana marraskuun lopusta helmikuun loppuun, eli välillä $[11, 14]$. Käytetään yhdistetyn funktion integrointia:

$$\begin{aligned}
&\int_{11}^{14} 1500 - 900\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{11}^{14} 1500\,\mathrm{d}t - 900\int_{11}^{14} \frac{6}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{6}\,\mathrm{d}t \\
&= \Big/_{11}^{14} 1500t - 900 \Big/_{11}^{14} \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right) \\
&= (21000 - 16500) - 900\cdot\left(\frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{7\pi}{3} - \frac{1}{2}\right) - \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{1}{2}\right)\right) \\
&\approx 4500 - 2400 = 2100.
\end{aligned}$$

Biomassaa kertyy siis talvikuukausien aikana noin 2,1 tonnia hehtaaria kohti.

Lasketaan vertailun vuoksi tuotto myös kesäkuukausien aikana:

$$\begin{aligned}
&\int_{5}^{8} 1500 - 900\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big/_{5}^{8} 1500t - 900 \Big/_{5}^{8} \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}\right) \\
&= (12000 - 7500) - 900\cdot\left(\frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{1}{2}\right) - \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2}\right)\right) \\
&\approx 4500 - (-2400) = 6900.
\end{aligned}$$

Kesäkuukausien aikana biomassaa kertyy 6,9 tonnia hehtaarilta.