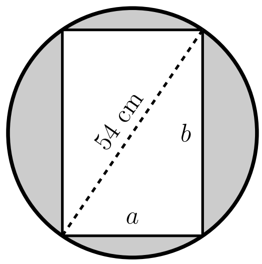
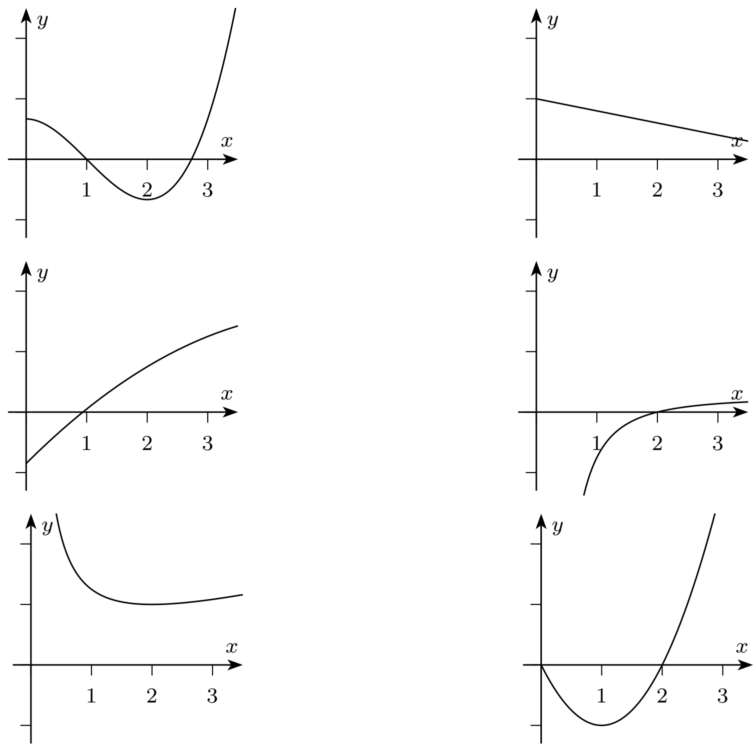
Y100 (Matematiikka I)
Harjoitus 4 (2 sivua)
26.–30.11.2012

1. Tämä tehtävä on jatkoa edellisen harjoituksen tehtävään 10. Tukista, jonka läpimitta on 54 cm, sahataan poikkileikkaukseltaan suorakulmion muotoinen parru (ks. oheinen kuva). Lujuusopin mukaan parru kestää suurimman kuormituksen tiettyyn suuntaan, kun tulo ab^2 on suurin mahdollinen. Laske sahattavan parrun mitat, kun parrusta halutaan vahvin mahdollinen.



2. Vasemmassa sarakkeessa on eräiden funktioiden kuvaajia ja oikealla niiden derivaattafunktioiden kuvaajia. Yhdistä jokainen funktio derivaattafunktioonsa.



3. Etsi seuraavien funktioiden integraalifunktiot:

$$f(x) = 3x^2 - 2, \qquad g(t) = t^5 - 3t^3 + 2t, \qquad h(x) = \sqrt{x} + 1.$$

Laske sitten seuraavat määrätyt integraalit:

$$\int_{-1}^{2} 3x^2 - 2 \,\mathrm{d}x, \qquad \int_{0}^{1} t^5 - 3t^3 + 2t \,\mathrm{d}t, \qquad \int_{1}^{4} \sqrt{x} + 1 \,\mathrm{d}x.$$

4. Jos funktio kuvaa jonkin suureen muutosnopeutta, sen integraalifunktio kuvaa kyseisen suureen kertymää. Esimerkiksi vuotonopeus kerryttää vuotaneen aineen määrää. Päättele seuraavista funktioista, minkä suureen muutosnopeudesta voisi olla kyse, eli minkä suureen kertymää vastaava integraalifunktio voisi kuvata.

   a) auton nopeus ajanhetken funktiona

   b) tuulen nopeus ajanhetken funktiona

   c) vesipumpun teho ajanhetken funktiona

5. Määritä seuraavat integraalifunktiot:

$$\int 4x^3(x^4 - 7)^5 \,\mathrm{d}x \qquad \text{ja} \qquad \int \frac{x}{(x^2+1)^{2012}} \,\mathrm{d}x.$$

6. Määritä funktion $f(x) = x^2 - 4x$ nollakohdat ja laske integraalin avulla kyseisen funktion kuvaajan ja x-akselin rajoittaman suljetun alueen ala. (Kannattaa piirtää ensin kuvaaja.)

7. Päättele logaritmin määritelmän nojalla (ilman laskinta), mitä ovat

$$\log_5 125, \qquad \log_3 \sqrt{3}, \qquad \log_2 \frac{1}{4}, \qquad \log_{10} 10^6, \qquad \log_2 8^x.$$

8. Ratkaise yhtälöt

$$e^{2x} = 1200 \qquad \text{ja} \qquad \ln(5x - 1) = 2.$$

9. Derivoi seuraavat funktiot:

$$f(x) = e^{-3x}, \qquad h(x) = x^3 e^x, \qquad k(x) = \frac{2x}{e^x}.$$

10. Tarkista, että funktio $F(x) = x \ln x - x$ on funktion $f(x) = \ln x$ integraalifunktio.

11. Tehtaassa tapahtunut kemikaalivuoto saadaan nopeasti aisoihin, ja vuotonopeus alkaa tyrehtyä eksponentiaalisesti, noudattaen funktiota $f(t) = e^{-\frac{1}{3}t}$. Tässä t on vuodon alusta kulunut aika tunteina ja vuotonopeuden yksikkö on litroja tunnissa.

    Piirrä vuotonopeuden f kuvaaja ja arvioi sen perusteella, kuinka paljon kemikaalia vuoti tuntien 0 ja 2 välillä sekä tuntien 2 ja 10 välillä vuodon alusta lukien.

12. Laske edellisen tehtävän vuotomäärät täsmällisesti määrittämällä ensin vuotonopeuden f integraalifunktio.