

Tehtävissä 1–6 tarkastellaan funktiota

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}.$$

Kannattaa piirtää funktion kuvaaja.

1. Määritä ne lähtöarvot, joilla funktio f ei ole määritelty. Laske funktion arvoja noiden lähtöarvojen lähellä ja arvioi tulosten perusteella, miten funktio käyttäytyy.
2. Jos toisen asteen polynomilla $x+px+q$ on nollakohdat a ja b , se voidaan jakaa tuloksi $(x-a)(x-b)$. Selvitä funktion f lausekkeen osoittajan ja nimittäjän nollakohdat ja jaa osoittaja ja nimittäjä tuloiksi.
3. Osoita, että funktion f lauseke voidaan jakaa tuloksi seuraavasti:

$$f(x) = \frac{x-1}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x+2}.$$

Tutki esimerkin 3.2 tapaan, miten lauseke käyttäytyy lähtöarvon 1 läheisyydessä. Onko funktiolla raja-arvoa kohdassa 1?

4. Tutki, miten funktion f lauseke käyttäytyy lähtöarvon -2 läheisyydessä. Onko funktiolla raja-arvoa kohdassa -2 ?
5. Laske funktion f arvoja hyvin suurilla ja pienillä lähtöarvoilla ja arvioi tulosten perusteella, miten funktio käyttäytyy.
6. Supista funktion f lauseke sillä nimittäjän termillä, jolla on korkein aste. Päätele sitten esimerkin 3.3 tapaan, miten funktio käyttäytyy hyvin suurilla tai pienillä lähtöarvoilla.
7. Piirrä funktion $f(x) = x^3 - x$ kuvaaja. Piirrä kuvaajalle sivuajasuorat kohtiin $x = 2$, $x = -1$ ja $x = 0$, ja määritä kuvasta sivuajien kulmakertoimet.
8. Derivoi seuraavat funktiot:

$$f(x) = x^3 - x, \quad g(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x, \quad h(x) = 5\sqrt[4]{x}.$$

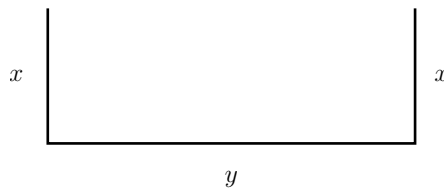
Funktion h lausekkeessa täytyy muuttaa juurimerkintä potenssimerkinnäksi. Laske derivaattojen arvot lähtöarvoilla 2, -1 ja 0.

9. Piirrä seuraavien funktioiden kuvaajat ja päättele kuvaajien perusteella, millä lähtöarvoilla funktiot eivät ole derivoituvia.

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1}, \quad g(x) = |x|, \quad k(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{kun } -1 \leq x \leq 1 \\ x, & \text{kun } x < -1 \text{ tai } x > 1. \end{cases}$$

(Merkintä $|x|$ tarkoittaa itseisarvoa, esimerkiksi $|3| = 3$ and $|-5| = 5$.)

10. Tarkastellaan tehtävän 8 funktiota g . Piirrä funktion kuvaaja ja määritä derivaatan avulla, milloin funktio on kasvava ja milloin vähenevä.
11. Halutaan rakentaa oheisen kuvan mukainen suorakulmion muotoinen aitaus, jonka yksi sivu on avoin. Aitamateriaalia on käytettävissä 60 metrin pituiseen aitaan. Jos aitauksen lyhyen sivun pituus on x , mikä on pitkän sivun pituus?



12. Jatkoa edelliseen tehtävään. Muodosta funktio, joka kuvaa aitauksen pinta-alan riippuvuutta lyhyen sivun pituudesta, kun aitamateriaalia on rajoitettu samalla tavalla kuin edellisessä tehtävässä. (Saamasi funktion tulee riippua vain lyhyen sivun pituudesta ja aitamateriaalin kokonaismäärästä.)