Y100 (Matematiikka 1)
Metsävarojen käytön laitos
Luentokuulustelu 17.12.2007
Ratkaisuehdotus, 6 sivua

Tehtävässä 3 oli ratkaistava *joko* (a)- *tai* (b)-kohta.

1. Derivoi funktio

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 100$$

ja tutki derivaatan avulla funktion f kulkua. Missä f on kasvava, missä vähenevä, missä sillä on ääriarvoja?

Ratkaisu. Polynomifunktio f on kaikkialla jatkuva ja derivoituva. Funktion derivaatta kuvaa sen kulkua. Derivoidaan funktio:

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 2x + 1 = 3x^2 - 4x + 1.$$

Koska derivaatta on kaikkialla jatkuva, se voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan. Derivaatan nollakohdat saadaan ratkaisemalla toisen asteen yhtälö:

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \iff x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{6}.$$

Derivaatan nollakohdat ovat siis $x = 1$ ja $x = 1/3$. Lasketaan muutamia derivaatan arvoja näiden kohtien eri puolilla ja piirretään niiden mukaan merkkikaavio.

$$\begin{aligned} f'(0) &= 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1 > 0, \\ f'(1/2) &= 3 \cdot (-1/2)^2 - 4 \cdot 1/2 + 1 = -1/4 < 0, \\ f'(2) &= 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 5 > 0. \end{aligned}$$

Funktio on vähenevä siellä, missä derivaatta on negatiivinen, ja kasvava siellä, missä derivaatta on positiivinen.

	$x < 1/3$	$1/3 < x < 1$	$1 < x$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Kaaviosta voidaan päätellä, että funktio on kasvava, kun $x \leq 1/3$ tai $x \geq 1$, ja vähenevä välillä $[1/3, 1]$. Funktiolla on siis paikallinen maksimi kohdassa $x = 1/3$ ja paikallinen minimi kohdassa $x = 1$.

2. Laske seuraavat integraalit:

$$\int_{-1}^{2} 3x^2 - x + 1\,dx, \qquad \int_{1}^{e} \frac{1}{x}\,dx, \qquad \int_{-1}^{1} |x^3|\,dx.$$

Ratkaisu. Ensimmäisessä integraalissa on tavallinen polynomi:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} 3x^2 - x + 1\,dx &= \mathop{\Big/}_{-1}^{2} \left(3\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right) = \mathop{\Big/}_{-1}^{2} \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + x\right) \\
&= \left(2^3 - \frac{2^2}{2} + 2\right) - \left((-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + (-1)\right) \\
&= (8 - 2 + 2) - \left(-1 - \frac{1}{2} - 1\right) = 8 + \frac{5}{2} \\
&= \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Toisessa integraalissa integraalifunktio on logaritmi:

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \mathop{\Big/}_{1}^{e} \ln|x| = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Kolmannessa integraalissa on integroitavana itseisarvofunktio, jonka integraalifunktiota ei tunneta. Integraali voidaan kuitenkin laskea osissa. Kun $x < 0$, niin $|x^3| = -x^3$, muuten $|x^3| = x^3$. Näin saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} |x^3|\,dx &= \int_{-1}^{0} -x^3\,dx + \int_0^1 x^3\,dx = \mathop{\Big/}_{-1}^{0} -\frac{1}{4}x^4 + \mathop{\Big/}_{0}^{1} \frac{1}{4}x^4 \\
&= \left(0 + \frac{1}{4}\cdot(-1)^4\right) + \left(\frac{1}{4}\cdot 1^4 - 0\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3. a) Tarkastellaan erään bakteeripopulaation aikakehitystä käyttämällä eksponentiaalisen kasvun mallia, aikayksikkönä vuorokausi. Alussa populaation massa oli noin 1 mg. Bakteerien lisääntymiskykyä kuvaavan verrannollisuuskertoimen arvoksi on havaittu 1,5.

Kirjoita funktio, joka kuvaa populaation kokoa kullakin ajanhetkellä, ja laske tämän funktion avulla ennuste viikon kuluttua havaittavalle bakteerimäärälle.

Ratkaisu. Eksponentiaalisen kasvun mallissa aikakehitystä kuvaava funktio on

$$B(t) = C\cdot e^{kt},$$

missä $B(t)$ on populaation koko ajanhetkellä t, C on populaation koko alussa, ja k on verrannollisuuskerroin. Tehtävänannon mukaan $C = 1$ ja $k = 1{,}5$. Näin ollen bakteeripopulaation koko viikon (eli 7 vuorokauden) kuluttua on

$$B(7) = 1\cdot e^{1{,}5\cdot 7} = e^{10{,}5} \approx 36000.$$

Ennuste viikon kuluttua havaittavalle määrälle on siis 36 g.

3. b) Laske funktion $g(x) = \sin x$ kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä ala välillä $[\pi, 8]$. (Muista tutkia ensin, missä funktio g on negatiivinen.)

Ratkaisu. Integraali antaa funktion kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän pinta-alan positiivisena tai negatiivisena, riippuen siitä, kulkeeko kuvaaja x-akselin ylä- vai alapuolella. Jos halutaan tietää aito pinta-ala, on integraali laskettava erikseen niillä väleillä, joilla funktio on negatiivinen, ja vaihdettava näillä väleillä tuloksen etumerkki.

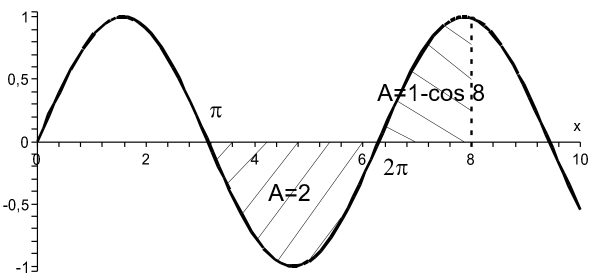
Sinifunktio on jatkuva, joten se voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan. Sinifunktiolle pätee $\sin 0 = 0$. Lisäksi nollakohdat toistuvat π:n välein. Välille $[\pi, 8]$ osuu siis kaksi nollakohtaa: π ja 2π ($\approx 6{,}28$). Lasketaan integraali erikseen väleillä $[\pi, 2\pi]$ ja $[2\pi, 8]$. Sinin integraalifunktion lauseke on $-\cos x$, joten

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = \underset{\pi}{\overset{2\pi}{\Big/}} -\cos x = -\cos 2\pi - (-\cos \pi) = -1 - 1 = -2,$$

ja

$$\begin{aligned}\int_{2\pi}^{8} \sin x \, dx &= \underset{2\pi}{\overset{8}{\Big/}} -\cos x = -\cos 8 - (-\cos 2\pi) = -\cos 8 - (-2) \\ &= 1 - \cos 8 \approx 1{,}15.\end{aligned}$$

Jotta saadaan todellinen pinta-ala, täytyy negatiivinen integraali muuttaa positiiviseksi ja laskea sitten integraalit yhteen. Alaksi tulee näin ollen $2 + (1 - \cos 8) = 3 - \cos 8 \approx 3{,}15$.



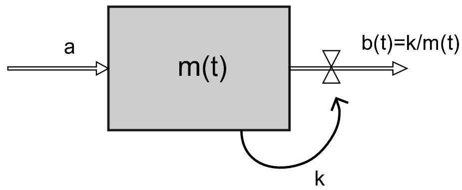
4. Erääseen säiliöön virtaa ainetta A nopeudella a ja sieltä virtaa ulos samaa ainetta nopeudella b. Sisääntulevan virtauksen nopeus a on vakio, mutta ulosvirtauksen nopeus noudattaa funktiota $b(t) = \frac{k}{m(t)}$, missä $m(t)$ on aineen määrä säiliössä ja k on verrannollisuuskerroin. Kirjoita virtaustilannetta kuvaava differentiaaliyhtälö.

Sisääntuleva virtaus katkaistaan ajanhetkellä 0, jolloin säiliössä on ainetta 2 litraa. Ratkaise näin syntyvää tilannetta kuvaava alkuarvotehtävä. (Jos et osannut kirjoittaa differentiaaliyhtälöä, voit käyttää yhtälöä $m(t)m'(t) = -k$.) Mikä on verrannollisuuskertoimen k arvo, kun tiedetään, että säiliö tyhjeni 4 tunnissa?

Ratkaisu. Jos merkitään säiliössä olevan aineen määrää $m(t)$ kullakin ajanhetkellä t, niin derivaatta $m'(t)$ on aineen määrän muutosnopeus. Tämä muutosnopeus saadaan toisaalta vähentämällä tulevan virtauksen nopeudesta poistuvan virtauksen nopeus, eli $m'(t) = a - b(t)$. Kun tiedetään lisäksi, että $b(t) = \frac{k}{m(t)}$, niin voidaan muodostaa tilannetta kuvaava differentiaaliyhtälö:

$$m'(t) = a - \frac{k}{m(t)}.$$

Tähän liittyy oheinen virtauskaavio.



Kun sisääntuleva virtaus katkaistaan, niin $a = 0$. Tällöin säiliössä oli 2 litraa ainetta, joten tilannetta kuvaa alkuarvotehtävä

$$m(t)' = -\frac{k}{m(t)}, \qquad m(0) = 2.$$

Tämä yhtälö voidaan kertoa puolittain luvulla $m(t)$, jolloin se saadaan separoituun muotoon $m(t)m'(t) = -k$. Tämän jälkeen yhtälö voidaan ratkaista integroimalla se puolittain:

$$\begin{aligned} m \cdot m' &= -k \\ \int m\, m'\, dt &= \int -k\, dt \\ \int m\, dm &= \int -k\, dt \\ \frac{m^2}{2} &= -kt + C. \end{aligned}$$

Vakio C on integroimisvakio. Saadusta yhtälöstä voidaan vielä ratkaista m:

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{2} &= -kt + C \\ m^2 &= -2kt + 2C \\ m &= \pm\sqrt{-2kt + 2C}. \end{aligned}$$

Negatiivinen ratkaisu voidaan hylätä, sillä aineen määrä m ei voi olla negatiivinen.

Saadusta ratkaisusta nähdään, että alussa $m(0) = \sqrt{-2k \cdot 0 + 2C} = \sqrt{2C}$. Toisaalta alkuarvoehdon mukaan $m(0) = 2$, joten

$$\sqrt{2C} = 2 \iff 2C = 4 \iff C = 2.$$

Näin ollen $m(t) = \sqrt{-2kt + 4}$. Kun tiedetään lisäksi, että säiliö tyhjenee neljässä tunnissa, voidaan ratkaista verrannollisuuskerroin k. Tällöin nimittäin $m(4) = 0$, ja toisaalta

$$m(4) = \sqrt{-2k \cdot 4 + 4} = \sqrt{-8k + 4}.$$

Siispä

$$\sqrt{-8k + 4} = 0 \iff -8k + 4 = 0 \iff 8k = 4 \iff k = \frac{1}{2}.$$

Alkuarvotehtävän ratkaisu on siis $m(t) = \sqrt{-2kt + 4}$, ja verrannollisuuskertoimen arvo on $k = 1/2$.

5. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Etsi matriisin A käänteismatriisi ja ratkaise sitten yhtälöryhmä 1. Onko yhtälöryhmällä 2 ääretön määrä ratkaisuja?

$$1: \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & -2 \\ 2x & +3y & & = & 1 \\ 3x & +4y & +2z & = & 2 \end{array} \right. \qquad 2: \left\{ \begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & -16 \\ 2x_1 & +3x_2 & & = & 11 \\ 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

Ratkaisu. Etsitään matriisin A käänteismatriisi eliminoimalla se ykkösmatriisiksi ja suorittamalla samat operaatiot samalla ykkösmatriisille:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l|l} \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l|l} \leftarrow & \\ \cdot(-1) & \cdot(-1) \\ & \leftarrow \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l|l} \leftarrow & \\ & \leftarrow \\ \cdot(-3) & \cdot 2 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Käänteismatriisi on siis
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Yhtälöryhmissä 1 ja 2 on molemmissa samat kertoimet, ja nämä muodostavat matriisin A. Jos merkitään
$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$
niin ensimmäistä yhtälöryhmää vastaa matriisiyhtälö $AX = B$. Koska A on kääntyvä, niin yhtälöryhmän ratkaisu on
$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\cdot(-2)+2\cdot 1-3\cdot 2 \\ -4\cdot(-2)-1\cdot 1+2\cdot 2 \\ -1\cdot(-2)-1\cdot 1+1\cdot 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 12+2-6 \\ 8-1+4 \\ 2-1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
Siis $x = -16$, $y = 1$ ja $z = 2$.

Jos sitten merkitään
$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -16 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix},$$
niin yhtälöryhmää 2 vastaa matriisiyhtälö $AX_2 = B_2$. Koska matriisi A on edelleen kääntyvä, yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu: $X_2 = A^{-1}B_2$. Sillä ei siis ole ääretöntä määrää ratkaisuja.