Y100 (Matematiikka 1)
Metsävarojen käytön laitos
Yhteiskuulustelu 9.4.2008
Mallivastaus, 6 sivua

Tehtävässä 3 oli ratkaistava *joko* (a)- *tai* (b)-kohta.

1. Derivoi lausekkeet:

$$2x^5 - \frac{1}{3}x^4 + x + e, \qquad \frac{x-1}{x+1}, \qquad e^x \cdot \sin x.$$

Ratkaisu. Ensimmäinen derivoitava on polynomi. Koska e on vakio, joka ei riipu muuttujasta x, sen derivaatta on nolla. Näin saadaan

$$D\left(2x^5 - \frac{1}{3}x^4 + x + e\right) = 2 \cdot 5x^4 - \frac{1}{3} \cdot 4x^3 + 1 + 0 = 10x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 1.$$

Toisessa kohdassa käytetään rationaalifunktion derivoimissääntöä:

$$\begin{aligned} D\left(\frac{x-1}{x+1}\right) &= \frac{D(x-1)\cdot(x+1) - (x-1)\cdot D(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1\cdot(x+1) - (x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Kolmanteen lausekkeeseen tarvitaan tulon derivoimissääntöä:

$$\begin{aligned} D\left(e^x \cdot \sin x\right) &= D\, e^x \cdot \sin x + e^x \cdot D\, \sin x = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x \\ &= e^x(\sin x + \cos x). \end{aligned}$$

2. Määritellään $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$ kaikilla reaaliluvuilla x. Laske funktion f kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala funktion f nollakohtien välillä.

Ratkaisu. Pinta-ala saadaan integroimalla. Määritetään ensin funktion f nollakohdat:

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \iff 2(x^2 - x - 2) = 0 \iff x^2 - x - 2 = 0.$$

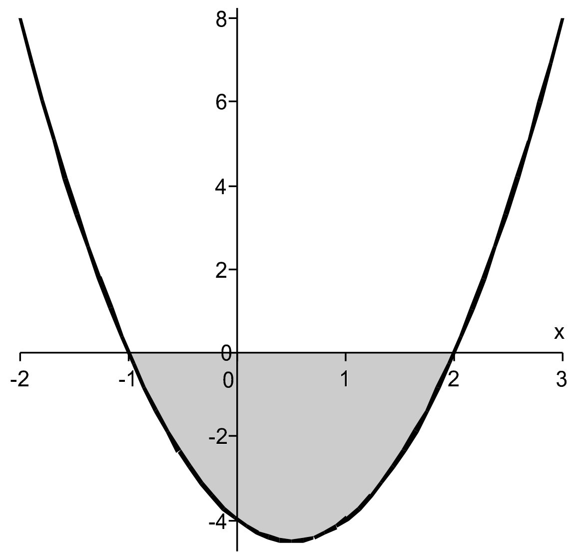
Toisen asteen polynomin nollakohdat saadaan ratkaisukaavasta:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}.$$

Nollakohdiksi saatiin $x_1 = 2$ ja $x_2 = -1$.

Koska funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, funktio on nollakohtiensa välissä negatiivinen. Täten pinta-ala on tuolla välillä lasketun integraalin vastaluku. Alaksi saadaan siis

$$
\begin{aligned}
&-\int_{-1}^{2} 2x^2 - 2x - 4\,dx = -\mathop{\Big/}_{-1}^{2} \left(\frac{2x^3}{3} - x^2 - 4x\right) \\
&= -\left[\left(\frac{2\cdot 8}{3} - 2^2 - 4\cdot 2\right) - \left(\frac{2\cdot(-1)}{3} - 1 - 4\cdot(-1)\right)\right] \\
&= -\left[\frac{16}{3} - 12 + \frac{2}{3} - 3\right] = 9.
\end{aligned}
$$



3. a) Radioaktiivinen hajoaminen noudattaa eksponentiaalisen kasvun (paremmin sanottuna vähenemisen) mallia. Erästä radioaktiivista ainetta oli alussa 100 kg mutta 10 vuoden kuluttua enää vain 50 kg.

Kirjoita funktio, joka kuvaa kyseessä olevan aineen määrää kullakin ajanhetkellä, ja laske tämän funktion avulla, kuinka monen vuoden kuluttua ainetta on jäljellä vähemmän kuin 1 g.

Ratkaisu. Eksponentiaalisen kasvun mallin mukaan aineen määrä noudattaa funktiota

$$m(t) = m_0 e^{kt},$$

missä t on aika vuosina, m_0 on aineen määrä alkuhetkellä ja k on verrannollisuuskerroin (tässä negatiivinen, koska on kyse vähenemisestä). Alussa ainetta oli 100 kg, joten $m_0 = 100$. Toisaalta 10 vuoden kuluttua ainetta oli jäljellä 50 kg, eli $m(10) = 50$. Tästä saadaan yhtälö, jonka avulla voidaan ratkaista k:

$$\begin{aligned} 100e^{k\cdot 10} &= 50 \qquad \| : 100 \\ e^{10k} &= \frac{1}{2} \qquad \| \ln \\ 10k &= \ln\frac{1}{2} \qquad \| : 10 \\ k &= \frac{\ln\frac{1}{2}}{k} \approx -0{,}0693. \end{aligned}$$

Lopulta täytyy selvittää, kuinka monen vuoden päästä $m(t) = 0{,}001$ kg. Tämä ratkeaa seuraavasti:

$$\begin{aligned} 100e^{-0{,}0693t} &= 0{,}001 \qquad \| : 100 \\ e^{-0{,}0693t} &= 10^{-5} \qquad \| \ln \\ -0{,}0693t &= \ln 10^{-5} \qquad \| : (-0{,}0693) \\ t &= -\frac{\ln 10^{-5}}{0{,}0693} \approx 166{,}1. \end{aligned}$$

Aikaa kuluu siis vähintään 167 vuotta, ennen kuin aineen määrä on alle 0,001 kg.

3. b) Ratkaise seuraava alkuarvotehtävä:

$$y''(t) = 1 - \cos t, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Ratkaisu. Tehtävän differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista integroimalla se puolittain kaksi kertaa. Ensin

$$y'(t) = \int y''(t)\,dt = \int 1 - \cos t\,dt = t - \sin t + C.$$

Tässä C on jokin integroimisvakio. Koska alkuehdon mukaan $y'(0) = 1$, ja toisaalta juuri saadun tuloksen mukaan

$$y'(0) = 0 - \sin 0 + C = 0 + C,$$

niin täytyy olla $C = 1$. Siispä $y'(t) = t - \sin t + 1$.

Jotta saadaan tietää y, integroidaan toistamiseen:

$$y(t) = \int y'(t)\,dt = \int t - \sin t + 1\,dt = \frac{t^2}{2} + \cos t + t + D.$$

Tässä D on jälleen jokin integroimisvakio. Toisen alkuehdon mukaan $y(0) = 1$, ja juuri saadun tuloksen perusteella

$$y(0) = \frac{0^2}{2} + \cos 0 + 0 + D = 0 + 1 + 0 + D = D + 1.$$

Täten täytyy olla $D = 0$. Lopulliseksi vastaukseksi saadaan siis

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + \cos t + t.$$

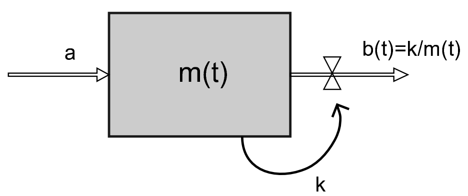
4. Säiliöön virtaa erästä ainetta nopeudella a ja sieltä virtaa ulos samaa ainetta nopeudella b. Sisääntulevan virtauksen nopeus a on vakio, mutta ulosvirtauksen nopeus noudattaa funktiota $b(t) = \frac{k}{m(t)}$, missä $m(t)$ on aineen määrä säiliössä ajanhetkellä t ja k on verrannollisuuskerroin. Kirjoita virtaustilannetta kuvaava differentiaaliyhtälö.

   Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa sisääntuleva virtaus katkaistaan ajanhetkellä 0, jolloin säiliössä on ainetta 2 litraa. Ratkaise tätä tilannetta kuvaava alkuarvotehtävä. (Jos et osannut kirjoittaa differentiaaliyhtälöä edellisessä tilanteessa, voit nyt käyttää yhtälöä $m(t)m'(t) = -k$.) Mikä on verrannollisuuskertoimen k arvo, kun tiedetään, että säiliö tyhjeni 4 tunnissa?

Ratkaisu. Jos merkitään säiliössä olevan aineen määrää $m(t)$ kullakin ajanhetkellä t, niin derivaatta $m'(t)$ on aineen määrän muutosnopeus. Tämä muutosnopeus saadaan toisaalta vähentämällä tulevan virtauksen nopeudesta poistuvan virtauksen nopeus, eli $m'(t) = a - b(t)$. Kun tiedetään lisäksi, että $b(t) = \frac{k}{m(t)}$, niin voidaan muodostaa tilannetta kuvaava differentiaaliyhtälö:

$$m'(t) = a - \frac{k}{m(t)}.$$

Tähän liittyy oheinen virtauskaavio.



Kun sisääntuleva virtaus katkaistaan, niin $a = 0$. Tällöin säiliössä oli 2 litraa ainetta, joten tilannetta kuvaa alkuarvotehtävä

$$m(t)' = -\frac{k}{m(t)}, \qquad m(0) = 2.$$

Tämä yhtälö voidaan kertoa puolittain luvulla $m(t)$, jolloin se saadaan separoituun muotoon $m(t)m'(t) = -k$. Tämän jälkeen yhtälö voidaan ratkaista integroimalla se puolittain:

$$\begin{aligned} m \cdot m' &= -k \\ \int m\,m'\,dt &= \int -k\,dt \\ \int m\,dm &= \int -k\,dt \\ \frac{m^2}{2} &= -kt + C. \end{aligned}$$

Vakio C on integroimisvakio. Saadusta yhtälöstä voidaan vielä ratkaista m:

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{2} &= -kt + C \\ m^2 &= -2kt + 2C \\ m &= \pm\sqrt{-2kt + 2C}. \end{aligned}$$

Negatiivinen ratkaisu voidaan hylätä, sillä aineen määrä m ei voi olla negatiivinen.

Saadusta ratkaisusta nähdään, että alussa $m(0) = \sqrt{-2k \cdot 0 + 2C} = \sqrt{2C}$. Toisaalta alkuarvoehdon mukaan $m(0) = 2$, joten

$$\sqrt{2C} = 2 \iff 2C = 4 \iff C = 2.$$

Näin ollen $m(t) = \sqrt{-2kt + 4}$. Kun tiedetään lisäksi, että säiliö tyhjenee neljässä tunnissa, voidaan ratkaista verrannollisuuskerroin k. Tällöin nimittäin $m(4) = 0$, ja toisaalta

$$m(4) = \sqrt{-2k \cdot 4 + 4} = \sqrt{-8k + 4}.$$

Siispä

$$\sqrt{-8k + 4} = 0 \iff -8k + 4 = 0 \iff 8k = 4 \iff k = \frac{1}{2}.$$

Alkuarvotehtävän ratkaisu on siis $m(t) = \sqrt{-2kt + 4}$, ja verrannollisuuskertoimen arvo on $k = 1/2$.

5. Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} -10 & 17 & 2 \\ 5 & -8 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Etsi matriisin A käänteismatriisi eliminointimenetelmällä. Vastaukseksi pitäisi tulla matriisi B. Ratkaise sitten yhtälöryhmä 1. Onko yhtälöryhmällä 2 ääretön määrä ratkaisuja?

$$1: \left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x & +4y & -z & = & -2 \\ x & +2y & & = & 1 \\ 2x & +3y & -5z & = & 2 \end{array} \right. \qquad 2: \left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +4x_2 & -x_3 & = & 41 \\ x_1 & +2x_2 & & = & -20 \\ 2x_1 & +3x_2 & -5x_3 & = & 4 \end{array} \right.$$

Ratkaisu. Etsitään matriisin A käänteismatriisi eliminoimalla se ykkösmatriisiksi ja suorittamalla samat operaatiot samalla ykkösmatriisille:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{ (vaihd.)} \\ \leftarrow \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{ll} \cdot(-2) & \mid \cdot(-2) \\ \leftarrow & \mid \\ & \leftarrow \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{ (vaihd.)} \\ \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow \\ \cdot(-5) \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot(-2) \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & 27 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Ykkömatriisi muuttui matriisiksi B, joten B todellakin on matriisin A käänteismatriisi.

Yhtälöryhmissä 1 ja 2 on molemmissa samat kertoimet, ja nämä puolestaan muodostavat matriisin A. Jos merkitään

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

niin ensimmäistä yhtälöryhmää vastaa matriisiyhtälö $AX = C$. Koska A on kääntyvä, niin yhtälöryhmän ratkaisu on

$$X = A^{-1}C = BC = \begin{bmatrix} -10 & 17 & 2 \\ 5 & -8 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 \cdot (-2) + 17 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 5 \cdot (-2) - 8 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ -1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 + 17 + 4 \\ -10 - 8 - 2 \\ 2 + 2 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 \\ -20 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Siis $x = 41$, $y = -20$ ja $z = 4$.

Jos sitten merkitään

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 41 \\ -20 \\ 4 \end{bmatrix},$$

niin yhtälöryhmää 2 vastaa matriisiyhtälö $AX_2 = C_2$. Koska matriisi A on edelleen kääntyvä, yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu: $X_2 = A^{-1}C_2 = BC_2$. Sillä ei siis ole ääretöntä määrää ratkaisuja.