Y100 (Matematiikka 1)
Metsävarojen käytön laitos
Yhteiskuulustelu 16.1.2008
Mallivastaus, 6 sivua

Tehtävässä 3 oli ratkaistava *joko* (a)- *tai* (b)-kohta.

1. Derivoi lausekkeet:

$$\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 4, \qquad \frac{x+1}{x-1}, \qquad \sqrt{4x^3}.$$

Ratkaisu. Ensimmäinen derivoitava on polynomi:

$$D\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 4\right) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 1 = x^2 - 4x + 1.$$

Toisessa kohdassa käytetään rationaalifunktion derivoimissääntöä:

$$\begin{aligned} D\left(\frac{x+1}{x-1}\right) &= \frac{D(x+1) \cdot (x-1) - (x+1) \cdot D(x-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x - 1 - x - 1}{(x-1)^2} \\ &= -\frac{2}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Sieventämällä saadaan kolmas derivoitava helpompaan muotoon:

$$\sqrt{4x^3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x^3} = 2x^{3/2}.$$

Derivoidaan tämä potenssin derivoimissäänön mukaisesti:

$$D(2x^{3/2}) = 2 \cdot \frac{3}{2}x^{3/2-1} = 3x^{1/2} = 3\sqrt{x}.$$

2. Ratkaise seuraava alkuarvotehtävä:

$$y''(t) = \sin t, \qquad y'(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

Ratkaisu. Differentiaaliyhtälö voidaan tässä tapauksessa integroida suoraan. Kun $y''(t) = \sin t$, niin

$$y'(t) = \int y''(t)\,dt = \int \sin t\,dt = -\cos t + C,$$

missä C on integroimisvakio. Siispä

$$y'(0) = -\cos 0 + C = -1 + C.$$

Toisaalta ensimmäisestä alkuarvoehdosta nähdään, että $y'(0) = 0$. Täten $-1 + C = 0$ ja edelleen $C = 1$.

Nyt siis $y'(t) = -\cos t + 1$, joten

$$y(t) = \int y'(t)\, dt = \int -\cos t + 1\, dt = -\sin t + t + D.$$

Siispä

$$y(0) = -\sin 0 + 0 + D = 0 + D = D,$$

Toisaalta toisesta alkuarvoehdosta nähdään, että $y(0) = 0$, joten $D = 0$. Täten alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$y(t) = -\sin t + t.$$

3. a) Osoita, että funktio $F(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ on funktion $f(x) = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ integraalifunktio, ja laske integraali

$$\int_0^2 -xe^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx.$$

Ratkaisu. Määritelmän mukaan funktio F on funktion f integraalifunktio, jos $F' = f$. Derivoidaan siis funktio F ja toivotaan, että saadaan tulokseksi f. Tässä käytetään yhdistetyn funktion derivoimissääntöä:

$$F'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot D\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2x = -xe^{-\frac{1}{2}x^2} = f(x).$$

Koska nähtävästi F on f:n integraalifunktio, niin kysytty integraali voidaan laskea helposti:

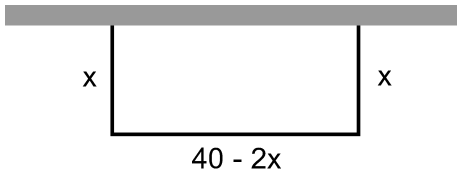
$$\begin{aligned}\int_0^2 -xe^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx &= \int_0^2 f(x)\, dx = \Big/_0^2 F(x) = \Big/_0^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} = e^{-\frac{1}{2}\cdot 4} - e^{-\frac{1}{2}\cdot 0} \\ &= e^{-2} - 1 \approx -0{,}632.\end{aligned}$$

3. b) Verkkoaidasta, jota on käytettävissä 40 metriä, on rakennettava suorakulmainen aitaus rakennuksen seinää vasten. Rakennuksen seinä korvaa yhden pitkistä sivuista, niin että verkkoa tarvitsee käyttää vain kolmeen sivuun. Miten pitkien on aitauksen sivujen oltava, jotta aitauksen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri?

Ratkaisu. Kuvaillaan aitauksen pinta-alaa sen lyhyen sivun funktiona ja yritetään maksimoida tämä funktio. Merkitään lyhyttä sivua x. Koska aitaan tulee kaksi lyhyttä sivua ja yksi pitkä, ja näiden yhteispituuteen on käytettävissä 40 m aitaa, niin pitkän sivun pituudeksi jää $40 - 2x$. Aitauksen pinta-ala puolestaan on lyhyen ja pitkän sivun tulo:

$$A(x) = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2.$$

Voidaan ajatella, että lyhyt sivu on lyhimmillään 0 m. Pisimmillään se voi olla 20 m, sillä tällöin kaikki aita hupenee kahteen pitkään sivuun ($2 \cdot 20 = 40$). Siispä x on välillä $[0, 20]$, eli toisin sanoen funktio A on määritelty välillä $[0, 20]$.



Jotta saadaan selville funktion A kulku, derivoidaan se:

$$A'(x) = D(40x - 2x^2) = 40 - 4x.$$

Derivaatalla on vain yksi nollakohta:

$$40 - 4x = 0 \iff 4x = 40 \iff x = 10.$$

Koska A on suljetulla välillä määritelty derivoituva funktio, se saa suurimman arvonsa joko derivaatan nollakohdassa tai määrittelyvälin päätepisteessä. Lasketaan nämä arvot:

$$\begin{aligned} A(0) &= 0 \cdot (40 - 2 \cdot 0) = 0, \\ A(20) &= 20 \cdot (40 - 2 \cdot 20) = 20 \cdot 0 = 0, \\ A(10) &= 10 \cdot (40 - 2 \cdot 10) = 10 \cdot 20 = 200. \end{aligned}$$

Suurin arvo saavutetaan, kun lyhyen sivun pituus on $x = 10$ (m). Tällöin pitkän sivun pituus on $40 - 2x = 40 - 20 = 20$ (m). Tarkastelun olisi voinut myös tehdä merkkikaavion tai muun vastaavan avulla.

4. Määritellään jokaista positiivista kokonaislukua k vastaava funktio f_k, jonka lauseke on $f_k(x) = -x^{2k} + 1$. Laske funktion f_k kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala välillä $[-1, 1]$ niissä tapauksissa, joissa $k = 1$ tai $k = 2$.

Ratkaisu. Kun $k = 1$, funktion f_k lauseke on $f_1(x) = -x^2 + 1$. Tämä on alaspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat -1 ja 1, sillä

$$f_1(x) = 0 \iff -x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1.$$

Funktio on siis koko tarkasteluvälillä epänegatiivinen. Sen kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alan saa täten suoraan integroimalla

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f_1(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} -x^2+1\,dx = \mathop{\Big/}_{-1}^{1}\left(-\frac{x^3}{3}+x\right)\\ &= \left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(-\frac{-1}{3}-1\right) = \frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Kun $k=2$, funktion lauseke on $f_2(x)=-x^4+1$. Tämän ainoat nollakohdat ovat jälleen -1 ja 1, sillä

$$f_2(x)=0 \iff -x^4+1=0 \iff x^4=1 \iff x=\pm 1.$$

Funktio on jatkuva, joten se ei voi vaihtaa merkkiään nollakohtien välillä. Koska se saa nollakohtiensa välissä positiivisen arvon, esim. $f_2(0)=1$, niin se on epänegativiinen koko välillä $[-1,1]$. Kysytyn pinta-alan saa jälleen integroimalla

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f_2(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} -x^4+1\,dx = \mathop{\Big/}_{-1}^{1}\left(-\frac{x^5}{5}+x\right)\\ &= \left(-\frac{1}{5}+1\right)-\left(-\frac{-1}{5}-1\right) = \frac{4}{5}-\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{8}{5}.\end{aligned}$$

Yleisessä tapauksessa funktion lauseke on $f_k(x)=-x^{2k}+1$. Koska $2k$ on parillinen potenssi, niin $x^{2k}=1$ täsmälleen silloin kun $x=-1$ tai $x=1$. Täten funktion $f_k(x)$ nollakohdat ovat jälleen -1 ja 1, ja funktio on epänegatiivinen koko välillä $[-1,1]$. Pinta-alan saa integroimalla

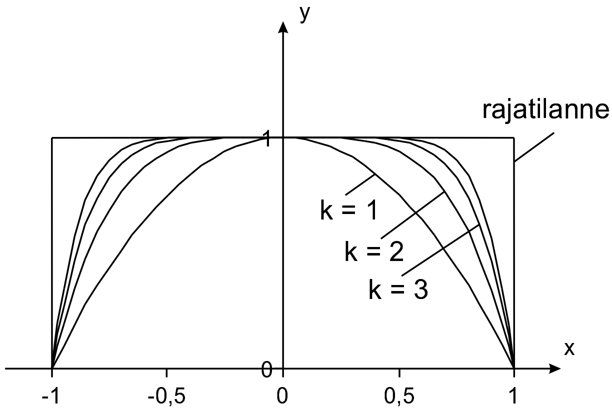
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f_k(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} -x^{2k}+1\,dx = \mathop{\Big/}_{-1}^{1}\left(-\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+x\right)\\ &= \left(-\frac{1^{2k+1}}{2k+1}+1\right)-\left(-\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}-1\right).\end{aligned}$$

Aina pätee $1^{2k+1}=1$. Toisaalta, koska potenssi $2k+1$ on pariton, niin $(-1)^{2k+1}=-1$. Näin saadaan

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{1^{2k+1}}{2k+1}+1\right)-\left(-\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}-1\right)\\ &= \left(-\frac{1}{2k+1}+1\right)-\left(-\frac{-1}{2k+1}-1\right) = -\frac{1}{2k+1}+1-\frac{1}{2k+1}+1\\ &= 2-\frac{2}{2k+1}.\end{aligned}$$

Jos nyt k kasvaa rajatta, niin lauseke $\frac{2}{2k+1}$ pienenee kohti nollaa. Täten

$$\lim_{k\to\infty}\left(2-\frac{2}{2k+1}\right)=2-0=2.$$



5. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Etsi matriisin A käänteismatriisi ja ratkaise sitten yhtälöryhmä 1. Onko yhtälöryhmällä 2 ääretön määrä ratkaisuja?

$$1: \begin{cases} x & +y & +z & = & -2 \\ 2x & +3y & & = & 1 \\ 3x & +4y & +2z & = & 2 \end{cases} \qquad 2: \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & -16 \\ 2x_1 & +3x_2 & & = & 11 \\ 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Ratkaisu. Etsitään matriisin A käänteismatriisi eliminoimalla se ykkösmatriisiksi ja suorittamalla samat operaatiot samalla ykkösmatriisille:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & | \cdot (-3) \\ \leftarrow & | \\ & | \leftarrow \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \\ \cdot(-1) & | \cdot (-1) \\ & | \leftarrow \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \\ & | \leftarrow \\ \cdot(-3) & | \cdot 2 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 6 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Käänteismatriisi on siis

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Yhtälöryhmissä 1 ja 2 on molemmissa samat kertoimet, ja nämä muodostavat matriisin A. Jos merkitään

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

niin ensimmäistä yhtälöryhmää vastaa matriisiyhtälö $AX = B$. Koska A on kääntyvä, niin yhtälöryhmän ratkaisu on

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \\ -4 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ -1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 + 2 - 6 \\ 8 - 1 + 4 \\ 2 - 1 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Siis $x = -16$, $y = 1$ ja $z = 2$.

Jos sitten merkitään

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -16 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix},$$

niin yhtälöryhmää 2 vastaa matriisiyhtälö $AX_2 = B_2$. Koska matriisi A on edelleen kääntyvä, yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu: $X_2 = A^{-1}B_2$. Sillä ei siis ole ääretöntä määrää ratkaisuja.