8.4 Stokastiset prosessit

Stokastisella prosessilla tarkoitetaan prosessia, jossa systeemin tila kullakin ajanhetkellä ei ole täysin riippuvainen menneisyyden tiloista (kuten esimerkiksi aiemmin käsittellyissä eksponentiaalisen tai logistisen kasvun malleissa), vaan mukana on tiettyä satunnaisuutta. Vaikka systeemin alkutila siis tunnettaisiin, ei voida tarkasti ennustaa, mihin tilaan systeemi tulevaisuudessa siirtyy, vaan eri vaihtoehtoja on monia. Kun tunnetaan todennäköisyydet, joilla tiloista toisiin siirtyminen tapahtuu, voidaan kuitenkin päätellä tilastollisesti, kuinka suuri osa havaintoaineistosta esimerkiksi päätyy mihinkin tilaan tietyn ajan kuluessa.

Jos erilaisia mahdollisia tiloja on äärellinen määrä, niiden suhteellisia todennäköisyyksiä kullakin ajanhetkellä t voidaan merkitä tuntemattomilla $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. Jos prosessi on lisäksi *diskreettiaikainen* eli tilasta toiseen siirrytään vain tietyin kiintein aikavälein, niin ajanhetkiä voidaan merkitä luonnollisilla luvuilla 0,1,2,3 jne. Tällöin esimerkiksi viidennen tilan todennäköisyyttä ajanhetkellä 13 merkittäisiin $x_5(13)$. Kullakin ajanhetkellä kaikkien todennäköisyyksien summan on oltava yksi, eli

$$x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_n(t) = 1.$$

Tilasta toiseen siirtymisen todennäköisyyttä kuvaavat luvut $a_{ji}(t)$, missä i on lähtötilan indeksi, j tulostilan indeksi ja t ajanhetki. Luku $a_{ji}(t)$ on siis todennäköisyys, jolla tilaan j siirrytään tilasta i ajanhetkellä t. Jos siirtymisen todennäköisyys ei riipu ajanhetkestä vaan ainoastaan alkutilasta (eli prosessi on niin sanotusti *stationaarinen*), niin todennäköisyyksiä voidaan merkitä yksinkertaisesti a_{ji}. Jatkossa tarkastellaan vain tällaisia prosesseja.

Kullakin ajanhetkellä t voidaan tulostilaan j siis siirtyä kustakin lähtötilasta i todennäköisyydellä a_{ji}. Kun $x_i(t)$ on tilan i todennäköisyys hetkellä t, niin $a_{ji}x_i(t)$ on tulosäännön mukaan se todennäköisyys, jolla hetkellä t oltiin tilassa i ja sitten siirryttiin tilaan j. Tulostilan kokonaistodennäköisyys seuraavalla ajanhetkellä määräytyy kaikkien mahdollisten lähtötilojen todennäköisyyksistä edellisellä ajanhetkellä seuraavan yhtälön mukaisesti:

$$x_j(t+1) = a_{j1}x_1(t) + a_{j2}x_2(t) + \cdots + a_{jn}x_n(t).$$

Koska jokaisesta lähtötilasta i joko siirrytään johonkin toiseen tai pysytään paikallaan, pätee siirtymätodennäköisyyksille lisäksi aina yhtälö

$$a_{1i} + a_{2i} + a_{3i} + \cdots + a_{ni} = 1.$$

Siirtymistä kuvaavia yhtälöitä saadaan jokaista tulostilaa kohti omansa, ja näistä voidaan muodostaa yhtälöryhmä

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) & = & x_1(t+1) \\ a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) & = & x_2(t+1) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) & = & x_n(t+1) \end{array} \right. .$$

Kuten tiedetään, tällainen yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa matriisiyhtälönä

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ \vdots \\ x_n(t+1) \end{bmatrix}.$$

Kerroinmatriisia

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kutsutaan *siirtymätodennäköisyysmatriisiksi.* Yhtälön (8.4) nojalla tämän matriisin kunkin sarakkeen todennäköisyyksien summan on oltava 1.

Siirtymätodennäköisyysmatriisin merkitys on siinä, että jos sillä kerrotaan sarakematriisia $X(t)$, joka sisältää kaikkien tilojen todennäköisyydet ajanhetkellä t, saadaan tuloksena kaikkien tilojen todennäköisyydet ajanhetkellä $t+1$. Näin voidaan laskea mistä tahansa lähtötilasta $X(0)$ alkaen tilanteen kehittyminen kuinka pitkälle hyvänsä, esim. $AX(0) = X(1)$, $AX(1) = A^2X(0) = X(2)$, jne.

Itse asiassa on usein tulkinnanvaraista, onko jokin monitilaprosessi stokastinen vai ei. Esimerkiksi radioaktiivista hajoamista voidaan ajatella prosessina, jossa tietty määrä ainetta hajoaa aina tietyn ajan kuluessa (deterministinen tulkinta). Toisaalta kullakin atomiytimellä on tietty todennäköisyys hajota (eli siirtyä alkutilasta hajonneeseen tilaan), joten hajoamisprosessia voidaan ajatella myös stokastisena prosessina. Kun tarkastellaan suuria määriä ainetta, molemmat tulkinnat johtavat samoihin laskuihin. Toisinaan on kuitenkin hyvä pitää mielessä, kummalta kannalta asiaa on alunperin lähdetty tarkastelemaan.

Esimerkki 8.1. Tarkastellaan metsän pintakasvillisuuden sukkessiota eli sitä, miten erilaiset lajit vähitellen korvaavat toisensa metsän kehittyessä. Pintakasvillisuuden lajit voidaan jakaa pioneereihin, välilajeihin sekä kliimaks-lajeihin. Lisäksi osa metsäalueesta voi olla tyhjää. Kuvataan nyt tilannetta stokastisena prosessina, jossa eri tilat vastaavat eri lajityyppejä. Näitä tiloja on neljä, kun tyhjä tila lasketaan mukaan: 1 = tyhjä tila, 2 = pioneerilaji, 3 = välilaji, 4 = kliimaks-laji. Tilan i todennäköisyys $x_i(t)$ kuvaa nyt sitä tilastollista osuutta havainnoitavan alueen pinta-alasta, jonka kasvillisuus on ajanhetkellä t kyseisessä tilassa. Käytetään ajanyksikkönä vuotta ja tarkastellaan tilannetta aina joka vuoden alussa, jolloin t saa vain kokonaislukuarvoja 0,1,2,3 jne.

Sukkessio on yleensä etenevää, eli kustakin tilasta voidaan siirtyä vain korkeampaan tilaan. Kuitenkin jokin häiriö voi palauttaa osan metsästä aikaisempaan tilaan. Kuten tilojen todennäköisyydet, myös siirtymätodennäköisyydet a_{ji} on ymmärrettävä tilastollisesti, eli ne kuvaavat sitä suhteellista osuutta metsästä, jonka lajisto kunakin vuonna siirtyy tilasta i tilaan j. Tarkastellaan seuraavassa esimerkkiä, jossa etenevän sukkession siirtymätodennäköisyydet ovat

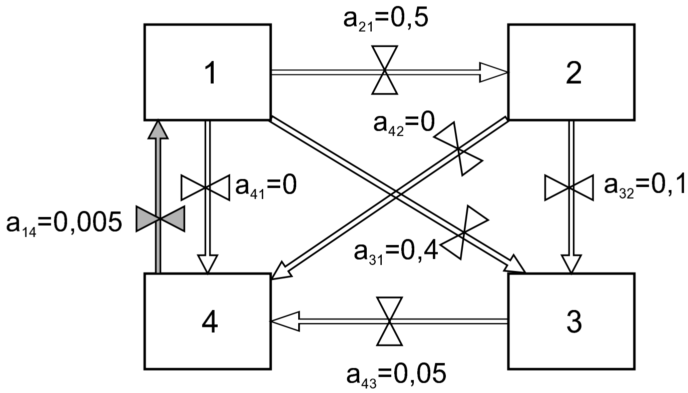
$$\begin{aligned} &a_{21} = 0{,}5, \qquad && a_{31} = 0{,}4, \qquad && a_{32} = 0{,}1, \\ &a_{41} = 0, && a_{42} = 0, && a_{43} = 0{,}05. \end{aligned}$$

Lisäksi asetetaan pieni todennäköisyys, jolla kliimaks-lajeja tuhoutuu jonkin häiriön (esimerkiksi metsäpalon tai hakkuun vuoksi) ja metsää palautuu tyhjään tilaan:

$$a_{14} = 0{,}005.$$

Kaikki muut takautuvat siirtymät oletetaan mahdottomiksi. Häiriösiirtymä voi olla eri luonteinen kuin muut siirtymät, koska nuo muut tapahtuvat enemmän tai vähemmän jatkuvasti, mutta häiriö on yleensä lyhytaikainen ja kertaluonteinen. Voitaisiin jopa sanoa, että häiriösiirtymä on luonteeltaan "enemmän stokastinen". Pitkän aikavälin tarkastelussa tämä ero voidaan kuitenkin unohtaa.

Sukkessiota voidaan kuvata seuraavanlaisella virtauskaaviolla.



Kussakin tilassa i pysymistä kuvaavat siirtymätodennäköisyydet lasketaan vähentämällä kokonaistodennäköisyydestä 1 kaikki todennäköisyydet, joilla tilasta i siirrytään pois, esimerkiksi $a_{22} = 1 - a_{32} - a_{42} = 1 - 0{,}1 - 0 = 0{,}9$. Siirtymätodennäköisyysmatriisiksi saadaan näin

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}005 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}95 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}995 \end{bmatrix}.$$

Tarkastellaan alkutilaa, jossa metsä on jakautunut eri tiloihin seuraavasti: $x_1(0) = 0{,}5$, $x_2(0) = 0{,}4$, $x_3(0) = 0{,}1$ ja $x_4(0) = 0$. Näistä voidaan muodostaa tilamatriisi

$$X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}4 \\ 0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tilanne vuoden kuluttua saadaan kertomalla tämä tilamatriisi siirtymätodennäköisyysmatriisilla:

$$X(1) = AX(0) = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}005 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}95 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}995 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}4 \\ 0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}61 \\ 0{,}335 \\ 0{,}005 \end{bmatrix}.$$

Toisen vuoden kuluttua metsäosuudet olisivat vastaavasti

$$X(2) = AX(1) = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}005 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}95 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}995 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}61 \\ 0{,}335 \\ 0{,}005 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}005025 \\ 0{,}574 \\ 0{,}39925 \\ 0{,}021725 \end{bmatrix}.$$

Kuten nähdään, sukkessio on pääasiassa etenevää, eli korkeampien tilojen osuudet kasvavat. Toisaalta osa kliimaks-vaiheen metsästä putoaa myös takaisin tyhjään tilaan. On kuitenkin muistettava, että näissä laskuissa on koko ajan kyse todennäköisyyksistä, eikä esimerkiksi voida olettaa, että joka vuosi metsäosuudet kehittyisivät täsmälleen samalla tavalla. Tilastollisesti kehitys pitää paikkansa sitä tarkemmin, mitä suurempaa metsäaluetta havainnoidaan ja mitä pidemmällä aikavälillä tilannetta seurataan.

Siirtymätodennäköisyysmatriisin avulla voidaan myös tutkia systeemin *tasapainotiloja*. Nämä ovat sellaisia tiloja, joissa systeemi ei enää kokonaisuudessaan muutu eli jokaisen tilan todennäköisyys pysyy vakiona ajanhetkestä toiseen. Jos merkitään tilojen todennäköisyydet sisältävää matriisia $X(t)$, niin tällainen tila toteuttaa *tasapainoyhtälön* $X(t+1) = X(t)$, joka on siirtymätodennäköisyysmatriisin avulla kirjoitettuna

$$AX(t) = X(t).$$

Kun kerrotaan tämän yhtälön oikea puoli ykkösmatriisilla (mikä ei tietenkään muuta oikean puolen matriisia mitenkään) ja siirretään tuloksena saatava matriisi vasemalle puolelle, päädytään yhtälöön $AX(t) - \mathrm{I}_n X(t) = 0_n$, missä 0_n on pelkkiä nollia sisältävä *nollamatriisi*. Nyt voidaan ottaa vasemmalla puolella matriisi $X(t)$ yhteiseksi tekijäksi, jolloin saadaan lopulta yhtälö

$$(A - \mathrm{I}_n)X(t) = 0_n.$$

Tämä yhtälö vastaa erästä yhtälöryhmää, jonka ratkaisut siis määrittävät tasapainotilan. Eräs ratkaisu on aina se, missä kaikki todennäköisyydet $x_i(t)$ ovat nollia, mutta tämä on hylättävä, sillä kullakin ajanhetkellä tilojen todennäköisyyksien summan on oltava 1. Jos muita ratkaisuja kuin nollaratkaisu ei löydy (eli yhtälöryhmä ei ole huonosti ratkeava), niin systeemillä ei ole tasapainotiloja.

Esimerkki 8.2. Ratkaistaan edellisen esimerkin sukkessiota kuvaavan systeemin tasapainotilat. Muodostetaan ensin ratkaistavan yhtälöryhmän kerroinmatriisi

$$A - \mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}005 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}95 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}995 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}005 \\ 0{,}5 & -0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & -0{,}05 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & -0{,}005 \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan sitten matriisiyhtälöä $(A - \mathrm{I}_n)X(t) = 0_n$ vastaava yhtälöryhmä eliminointimenetelmällä:

$$
\left[\begin{array}{cccc|c} -0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}005 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & -0{,}05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & -0{,}005 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} :(-0{,}9) \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -0{,}005556 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & -0{,}05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & -0{,}005 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{ll} \cdot(-0{,}5) & |\cdot(-0{,}4) \\ \leftarrow & | \\ & |\leftarrow \\ & \end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -0{,}005556 & 0 \\ 0 & -0{,}1 & 0 & 0{,}002778 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & -0{,}05 & 0{,}002222 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & -0{,}005 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ :(-0{,}1) \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -0{,}005556 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}02778 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & -0{,}05 & 0{,}002222 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & -0{,}005 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(-0{,}1) \\ \leftarrow \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -0{,}005556 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}02778 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}05 & 0{,}005 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & -0{,}005 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ :(-0{,}05) \\ \\ \end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -0{,}005556 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}02778 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & -0{,}005 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-0{,}05) \\ \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -0{,}005556 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}02778 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].
$$

Viimeiseltä riviltä katosivat kaikki muuttujat ennen kuin viimeisen sarakkeen kertoimia pystyttiin eliminoimaan. Viimeistä saraketta vastaa siis vapaa muuttuja $x_4(t)$. Muiden muuttujien arvot riippuvat vapaan muuttujan arvosta, ja kerroinmatriisin eliminoidusta muodosta nähdäänkin, että

$$
X(t) = \begin{bmatrix} 0{,}005556 \cdot x_4(t) \\ 0{,}02778 \cdot x_4(t) \\ 0{,}1 \cdot x_4(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = x_4(t) \begin{bmatrix} 0{,}005556 \\ 0{,}02778 \\ 0{,}1 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Vapaan muuttujan arvo täytyy kuitenkin vielä valita niin, että eri tiloissa olevien metsäosuuksien summaksi tulee 1. Tämän vuoksi valitaan

$$
x_4(t) = \frac{1}{0{,}005556 + 0{,}02778 + 0{,}1 + 1} \approx 0{,}88235,
$$

jolloin tasapainotilaksi saadaan lopulta

$$
X(t) = 0{,}88235 \begin{bmatrix} 0{,}005556 \\ 0{,}02778 \\ 0{,}1 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}0049 \\ 0{,}0245 \\ 0{,}0882 \\ 0{,}8824 \end{bmatrix}.
$$

Tasapainotilassa siis pieni osa metsästä on tyhjässä tilassa, koska osa kliimaks-metsästä palautuu jatkuvasti tyhjään tilaan (tietyllä todennäköisyydellä). Samaten osa lajeista on pioneeri- ja välitiloissa, koska syntynyt tyhjässä tilassa oleva metsäosuus kehittyy puolestaan tietyllä nopeudella eteenpäin.