8 Matriisilaskenta

Kurssin loppuosassa tutustutaan matriiseihin ja niiden käyttöön lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemisessa.

8.1 Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen

Määritelmä 8.1. Yhtälöä

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

missä $a_1, \ldots, a_n$ sekä b ovat vakioita ja $x_1, \ldots, x_n$ ovat tuntemattomia, kutsutaan *n:n tuntemattoman lineaariseksi yhtälöksi.* Jos liitetään yhteen m kappaletta lineaarisia yhtälöitä, joissa on samat tuntemattomat, saadaan *lineaarinen yhtälöryhmä*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}.$$

Lukuja $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ nimitetään yhtälöryhmän *kertoimiksi.* Jos tuntemattomia on vähän, niitä merkitään yleensä $x, y, z, \ldots$. Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen merkitsee sitä, että löydetään n kappaletta lukuja, jotka tuntemattomien $x_1, \ldots, x_n$ paikalle sijoitettuina toteuttavat yhtä aikaa kaikki m yhtälöä.

Esimerkki 8.2. Lineaarisia yhtälöryhmiä:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x - y + z & = & -2 \\ -3x + 2y - z & = & 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 & & +4x_3 & = & 1 \\ -3x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & = & 12 \end{cases}.$$

Ensimmäisen yhtälöryhmän ratkaisu on $x = 3/2$, $y = -1/2$. Toisella yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua, kuten myöhemmin nähdään.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemisessa pyritään löytämään luvut, jotka tuntemattomien paikalle sijoitettuina toteuttavat *kaikki* ryhmän yhtälöt. On helppo nähdä, että tämä ei aina onnistu, eli yhtälöryhmällä ei aina ole ratkaisua. Esimerkiksi yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y & = & 1 \\ x + y & = & 0 \end{cases}$$

sisältää kaksi keskenään ristiriitaista yhtälöä, eivätkä mitkään luvut x ja y voi toteuttaa molempia yhtälöitä yhtä aikaa. Toisaalta joskus ratkaisuja löytyy äärettömästi, kuten seuraavan yhtälöryhmän tapauksessa:

$$\begin{cases} x - y & = & 0 \\ 2x - 2y & = & 0 \end{cases}.$$

Tämän yhtälöryhmän molemmat yhtälöt sisältävät saman tiedon luvuista x ja y, nimittäin sen että $x = y$. Mikä tahansa luku sijoitettuna sekä x:n että y:n paikalle toteuttaa molemmat yhtälöt.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseksi on olemassa monta menetelmää. Pienillä yhtälöryhmillä (2-3 yhtälöä) voidaan käyttää sijoitusmenetelmää, jossa yhdestä yhtälöstä ratkaistaan aina yksi tuntematon, joka sitten sijoitetaan muihin yhtälöihin. Yhtälöjen lukumäärän kasvaessa tämä menetelmä käy kuitenkin epäkäytännölliseksi.

Tällä kurssilla käytetään yhtälöryhmien ratkaisemiseen ns. *Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmää.* Siinä muokataan yhtälöryhmää yksinkertaisemmaksi sellaisilla tavoilla, jotka eivät muuta yhtälöryhmän ratkaisuja. Yhtälöt käydään läpi ylhäältä alkaen, ja jokaisen yhtälön kohdalla toistetaan kaksi päävaihetta. Nämä ovat:

1) Jaetaan yhtälö puolittain, jotta yhtälön vasemmanpuolimmaisen tuntemattoman kertoimeksi saadaan 1.

2) Eliminoidaan tämän kertoimen avulla vastaavat tuntemattomat kaikista muista yhtälöistä.

Jälkimmäinen vaihe, eliminointi, tapahtuu seuraavasti. Oletetaan, että ollaan käsittelemässä 1. yhtälöä ja halutaan eliminoida ensimmäinen tuntematon 2. yhtälöstä. Kerrotaan 1. yhtälö puolittain 2. yhtälön ensimmäisen tuntemattoman kertoimen vastaluvulla. Lisätään sitten ensimmäinen yhtälö toiseen, jolloin tuo tuntematon häviää. Tarkastellaan ensin yksinkertaista esimerkkiä.

Esimerkki 8.3. Olkoon ratkaistavana seuraava yhtälöpari:

$$\begin{cases} 2x + 4y & = & 2 \\ 3x + 5y & = & -1 \end{cases}.$$

Aloitetaan käsittely ensimmäisestä yhtälöstä. Jaetaan yhtälö puolittain luvulla 2, jolloin ensimmäiseksi kertoimeksi tulee 1:

$$\begin{cases} x + 2y & = & 1 \\ 3x + 5y & = & -1 \end{cases}.$$

Toisen yhtälön ensimmäisen tuntemattoman kerroin on 3. Jotta tämä saataisiin häviämään, kerrotaan ensimmäinen yhtälö puolittain luvulla -3, ja lisätään näin saatu yhtälö toiseen. Ensimmäinen yhtälö -3:llä kerrottuna on

$$-3x - 6y = -3.$$

Lisätään tämä nyt puolittain toiseen yhtälöön:

$$\begin{array}{rcll} -3x - 6y & = & -3 & \mid (-3)\times(1.\text{ yhtälö}) \\ 3x + 5y & = & -1 & \mid 2.\text{ yhtälö} \\ \hline 0 - y & = & -4 & \end{array}$$

Saatu yhtälö kirjoitetaan toisen yhtälön paikalle, jolloin yhtälöryhmästä tulee

$$\begin{cases} x & +2y & = & 1 \\ & -y & = & -4 \end{cases}.$$

Toisesta yhtälöstä hävisi näin x. Huomaa, että ensimmäinen yhtälö kirjoitettiin edelleen samassa muodossa kuin aiemmin. Sitä vain käytettiin hyväksi x:n kertoimen nollaamisessa toisesta yhtälöstä.

Tästä muodosta voi jo lukea yhtälöryhmän ratkaisun, sillä selvästikin $y = 4$, ja x:n voi ratkaista, kun y tunnetaan. Jatketaan kuitenkin menetelmää vielä täydellisyyden (ja harjoituksen) vuoksi loppuun asti. Toisen yhtälön ensimmäinen nollasta poikkeava kerroin y:n kerroin ja se on -1. Jaetaan toinen yhtälö luvulla -1, jolloin yhtälöryhmästä tulee

$$\begin{cases} x & +2y & = & 1 \\ & y & = & 4 \end{cases}.$$

Käytetään sitten jälkimmäistä yhtälöä y:n hävittämiseen ensimmäisestä. Ensimmäisessä yhtälössä y:n kerroin on 2. Kerrotaan jälkimmäinen yhtälö siis puolittain -2:lla ja lisätään ensimmäiseen:

$$\begin{array}{llcrl} & -2y & = & -8 & \mid (-2)\times(2.\ \text{yhtälö}) \\ x & +2y & = & 1 & \mid 1.\ \text{yhtälö} \\ \hline x & & = & -7 & \end{array}.$$

Tulos sijoitetaan ensimmäisen yhtälön paikalle:

$$\begin{cases} x & & = & -7 \\ & y & = & 4 \end{cases}.$$

Nyt yhtälöryhmä on täysin ratkaistussa muodossa, josta voidaan suoraan lukea tuntemattomien arvot. Tarkistetaan vielä tämä vastaus sijoittamalla saadut arvot alkuperäisiin yhtälöihin:

$$\begin{cases} 2\cdot(-7)+4\cdot 4 & = & -14+16 & = & 2 \\ 3\cdot(-7)+5\cdot 4 & = & -21+20 & = & -1 \end{cases}.$$

Tulos on oikea.

Käytetyssä menetelmässä ei lainkaan koskettu tuntemattomiin x ja y. Niitä ei esimerkiksi siirrelty yhtälön puolelta toiselle, vaan kaikki hoidettiin vain manipuloimalla niiden kertoimia. Tämä antaa aiheen muotoilla yhtälöryhmä niin, että vain tuntemattomien kertoimet ovat näkyvissä, mikä helpottaa varsinkin isojen yhtälöryhmien käsittelyä huomattavasti. Tällaiseen muotoiluun soveltuvat erityisesti niin kutsutut matriisit.

Määritelmä 8.4. Lukukaaviota, jossa on m riviä ja n saraketta, kutsutaan *matriisiksi, jonka tyyppi on* $m \times n$, eli lyhyemmin $m \times n$*-matriisiksi.* Matriiseja merkitään yleensä isoilla kirjaimilla. Esimerkiksi

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

on $m \times n$-matriisi, jonka *alkioina* ovat luvut $a_{11}, \ldots, a_{mn}$. Matriisin alkioihin voidaan viitata merkitsemällä M_{ij}, missä i on rivin numero ja j sarakkeen numero. Esimerkiksi M_{21} on matriisin M toisen rivin ensimmäisen sarakkeen alkio, eli tässä tapauksessa $M_{21} = a_{21}$.

Esimerkki 8.5. Esimerkkejä matriiseista:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 13 & \pi \\ 0 & -5 & \sqrt{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Näiden matriisien tyypit ovat vasemmalta oikealle lukien 2×2, 3×3, 3×1 ja 2×3.

Ratkaistavan yhtälöryhmän kertoimet voidaan sijoittaa matriisiin, jonka jälkeen eliminointi sujuu aivan samalla tavoin kuin aiemminkin; tuntemattomia vain ei tarvitse koko ajan kirjoittaa näkyviin.

Esimerkki 8.6. Ratkaistaan seuraava kolmen yhtälön yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = & 12 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 14 \end{cases}.$$

Sijoitetaan kertoimet ja oikealla puolella olevat vakiot 3×4-matriisiin. Halutessamme voimme selvyyden vuoksi merkitä pystyviivan matriisiin siihen kohtaan, missä yhtälöryhmässä on $=$-merkki. Syntyvä matriisi näyttää tältä:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 12 \\ 3 & 1 & -1 & | & -2 \\ 2 & -3 & 2 & | & 14 \end{bmatrix}.$$

Aloitetaan nyt eliminointi. Ensimmäiseksi tarkastellaan matriisin ensimmäistä riviä (joka siis vastaa yhtälöryhmän ensimmäistä yhtälöä). Jaetaan rivi 2:lla, jolloin saadaan ensimmäiseksi kertoimeksi 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 12 \\ 3 & 1 & -1 & | & -2 \\ 2 & -3 & 2 & | & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} :2 \\ \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 3 & 1 & -1 & | & -2 \\ 2 & -3 & 2 & | & 14 \end{bmatrix}.$$

Käytetään sitten ensimmäisen rivin ensimmäisen sarakkeen kerrointa eliminoimaan kertoimet samasta sarakkeesta kaikilta muilta riveiltä. Toisella rivillä ensimmäisessä sarakkeessa on 3 ja kolmannella 2. Lisätään siis ensimmäinen rivi toiseen -3:lla kerrottuna ja kolmanteen -2:lla kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 3 & 1 & -1 & | & -2 \\ 2 & -3 & 2 & | & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) & |\cdot(-2) \\ \leftarrow & | \\ & |\leftarrow \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & -5 & -10 & | & -20 \\ 0 & -7 & -4 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Nyt on eliminoitu ensimmäinen kerroin toiselta ja kolmannelta riviltä (eli tuntematon x_1 on hävinnyt toisesta ja kolmannesta yhtälöstä). Siirrytään tarkastelemaan toista riviä. Toisen rivin ensimmäinen nollasta poikkeava kerroin on -5. Jaetaan rivi tällä luvulla:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & -5 & -10 & | & -20 \\ 0 & -7 & -4 & | & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ :(-5) \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & -7 & -4 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Toisen sarakkeen kerroin on ensimmäisellä rivillä 2 ja kolmannella -7. Lisätään siis toinen rivi ensimmäiseen -2:lla kerrottuna ja kolmanteen 7:llä kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & -7 & -4 & | & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \\ \cdot(-2) & |\cdot 7 \\ & |\leftarrow \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 10 & | & 30 \end{bmatrix}.$$

Jaetaan vielä viimeinen rivi luvulla 10:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 10 & | & 30 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :10 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix},$$

ja lisätään se ensimmäiseen 1:llä kerrottuna sekä toiseen -2:lla kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \\ & |\leftarrow \\ \cdot 1 & |\cdot(-2) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}.$$

Nyt on eliminointi suoritettu loppuun. Tuloksena saatiin matriisi, jossa pystyviivan vasemmalla puolella (eli yhtälöryhmän tuntemattomien puolella) on lävistäjällä ykkösiä, muualla nollia. Tämä matriisi vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & = & -2 \\ & & x_3 & = & 3 \end{cases}.$$

Näin on yhtälöryhmä täydellisesti ratkaistu.

Toisinaan jotain tuntematonta eliminoitaessa eliminoituu kaksi tuntematonta samalla kertaa. Tällöin voidaan vaihtaa yhtälöiden järjestystä, jotta eliminointia voidaan jatkaa.

Esimerkki 8.7. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & +6x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 3 \end{cases}.$$

Kirjoitetaan yhtälöryhmä jälleen matriisimuodossa. Ensimmäisen rivin ensimmäinen kerroin on jo valmiiksi 1, joten voidaan ruveta eliminoimaan saman sarakkeen muita alkioita:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 2 & 6 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \cdot(-2) & |\cdot(-1) \\ \leftarrow & | \\ & |\leftarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & | & -14 \\ 0 & -4 & 0 & | & -4 \end{bmatrix}.$$

Koska toiselta riviltä hävisi myös toinen tuntematon, vaihdetaan toinen ja kolmas rivi keskenään, jolloin saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & -4 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -14 \end{bmatrix}.$$

Nyt voidaan jatkaa normaalisti. Jaetaan toinen rivi -4:llä:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & -4 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -14 \end{bmatrix} : (-4) \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -14 \end{bmatrix}.$$

Eliminoidaan toisen sarakkeen kerroin ensimmäiseltä riviltä. (Kolmannelta riviltä se onkin jo hävinnyt.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -14 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \cdot(-3) \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -14 \end{bmatrix}$$

Eliminoidaan lopuksi vielä kolmannen sarakkeen kerroin ensimmäisestä yhtälöstä:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -14 \end{array}\right] \begin{array}{c} \leftarrow \\ \\ \cdot 1 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -14 \end{array}\right]$$

Tulos vastaa ratkaistua yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 & & & = -10 \\ & x_2 & & = 1 \\ & & x_3 & = -14 \end{cases}.$$

Kuten edellä mainittiin, lineaarisella yhtälöryhmällä ei aina ole ratkaisua, ja toisinaan taas ratkaisu ei ole yksikäsitteinen. Tällaisia yhtälöryhmiä nimitetään tällä kurssilla *huonosti ratkeaviksi.*

Lause 8.8. *Lineaarisella yhtälöryhmällä on aina joko yksi, ei yhtään tai ääretön määrä ratkaisuja. Jos yhtälöryhmällä ei ole lainkaan ratkaisua tai ratkaisuja on ääretön määrä, sanotaan, että yhtälöryhmä on* huonosti ratkeava.

Esimerkki 8.9. Ratkaistaan eliminoimalla matriisimuodossa esimerkin 8.2 yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x & -y & +z & = -2 \\ -3x & +2y & -z & = 0 \end{cases}.$$

Jaetaan aluksi ensimmäinen rivi 2:lla:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} :2 \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Lisätään sitten ensimmäinen rivi toiseen 3:lla kerrottuna:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \cdot 3 \\ \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -3 \end{array}\right].$$

Jaetaan jälkimmäinen rivi 1/2:lla (mikä on sama kuin kertominen kahdella), jotta saadaan ensimmäiseksi nollasta poikkeavaksi kertoimeksi 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ :1/2 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right].$$

Lopuksi lisätään toinen yhtälö ensimmäiseen 1/2:lla kerrottuna:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{c} \leftarrow \\ \cdot 1/2 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right].$$

Eliminointi on nyt suoritettu loppuun. Tulosmatriisi vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x & & +z & = -4 \\ & y & +z & = -6 \end{cases}.$$

Viimeistä tuntematonta z ei voitu eliminoida, koska se ei tullut mihinkään yhtälöön ensimmäiseksi. Tällaista tuntematonta kutsutaan *vapaaksi muuttujaksi*, sillä sen arvo voi olla mitä vain. Yhtälöryhmällä on siis ääretön määrä ratkaisuja, mutta nämä ratkaisut riippuvat vapaan muuttujan (joita voi olla myös useita) arvosta. Jos esimerkiksi valittaisiin $z = 1$, niin muut tuntemattomat voitaisiin tällä perusteella ratkaista, ja saataisiin $x = -5$ ja $y = -7$.

Edellisessä esimerkissä oli kaksi yhtälöä ja kolme tuntematonta. Jotta vapaita muuttujia ei tulisi, täytyy yhtälöitä olla vähintään yhtä paljon kuin tuntemattomia. Lisäksi mikä tahansa yhtälöryhmä voi olla ratkeamaton. Yhteenvetona saadaan seuraava lause.

Lause 8.10. *Jos lineaarisessa yhtälöryhmässä on n tuntematonta ja m yhtälöä, ja $n > m$ (eli enemmän tuntemattomia kuin yhtälöitä tai matriisimuodossa liian vähän rivejä), yhtälöryhmä on huonosti ratkeava.*

Yhtälöryhmä voi olla huonosti ratkeava, vaikka siinä ei olisikaan enempää tuntemattomia kuin rivejä.

Esimerkki 8.11. Tarkastellaan seuraavaa yhtälöryhmää:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = & -2 \end{cases}.$$

Ensimmäisen rivin ensimmäinen kerroin on valmiiksi 1. Lisätään ensimmäinen rivi toiseen -2:lla kerrottuna ja kolmanteen -1:llä kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & -2 & -2 & | & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & |\cdot(-1) \\ \leftarrow & | \\ & |\leftarrow \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & -1 & | & -4 \\ 0 & -3 & -3 & | & -5 \end{bmatrix}.$$

Jaetaan toinen rivi puolittain -1:llä:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & -1 & | & -4 \\ 0 & -3 & -3 & | & -5 \end{bmatrix} : (-1) \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & -3 & -3 & | & -5 \end{bmatrix}.$$

Lisätään sitten toinen rivi ensimmäiseen -1:llä kerrottuna ja kolmanteen 3:lla kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & -3 & -3 & | & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \\ \cdot(-1) & |\cdot 3 \\ & |\leftarrow \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 7 \end{bmatrix}.$$

Tulokseksi saatu matriisi vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 & & & = & -1 \\ & x_2 & +x_3 & = & 4 \\ & & 0 & = & 7 \end{cases}.$$

Viimeiseltä riviltä eliminoituivat siis kaikki tuntemattomat, mutta oikealle puolelle jäi luku 7. Tämä on ristiriitaista, sillä $0 \neq 7$. Yhtälöryhmällä ei siis ole ratkaisua. Huomaa, että vaikka ensimmäisellä rivillä lukeekin $x_1 = -1$, tämä ei ole edes osittainen ratkaisu, sillä yhtälöryhmää ratkaistaessa on kaikki yhtälöt ratkaistava yhtä aikaa. Jos johonkin kohtaan tulee ristiriita, se tarkoittaa, että koko yhtälöryhmä oli alun pitäen ristiriitainen.

Kerrataan vielä eliminointimenetelmän vaiheet. Jokaista riviä kohti ylhäältä alkaen suoritetaan seuraavat operaatiot:

1. Jos tarvitaan, vaihdetaan rivi jonkin alemman vielä käsittelemättömän rivin kanssa.
2. Jaetaan rivin alkiot jollain luvulla niin, että ensimmäisen nollasta poikkeavan kertoimen arvoksi tulee 1.
3. Eliminoidaan tämän kertoimen avulla vastaava kerroin saman sarakkeen kohdalta kaikilta muista riveiltä.

Kun nämä vaiheet on suoritettu kaikille riveille, tulos voi olla jokin seuraavista:

- Kaikki tuntemattomat jäävät yksin omalle rivilleen, ja yhtälöryhmä ratkeaa yksikäsitteisesti.
- Jokin tuntematon ei ole ensimmäisenä millään rivillä. Tämä on vapaa muuttuja, ja yhtälöryhmän ratkaisu riippuu sen arvosta. Ratkaisuja on ääretön määrä.
- Jostakin yhtälöstä häviävät kaikki tuntemattomat, mutta oikealle puolelle jää nollasta poikkeava luku. Tällöin yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

8.2 Matriisien laskutoimitukset

Paitsi että matriiseja voi käyttää näppärästi apuna yhtälöryhmän merkitsemisessä, niillä on myös kokonaan oma elämänsä. Matriiseja voidaan muun muassa laskea yhteen ja kertoa toisillaan, ja kullakin näistä operaatioista on oma merkityksensä myös sellaisten yhtälöryhmien kannalta, jota kyseiset matriisit kuvaavat. Toisaalta matriisien laskutoimituksilla on tiettyjä rajoituksia: mitä tahansa matriiseja ei esimerkiksi voi laskea yhteen.

Määritelmä 8.12. Matriisien yhteen- ja vähennyslasku. Olkoot A ja B $m \times n$-matriiseja. Yhteenlasketun matriisin $A + B$ alkiot saadaan laskemalla A:n ja B:n alkiot yhteen kohdakkain. Sama pätee vähennyslaskulle $A - B$. Siis

$$(A \pm B)_{ij} = A_{ij} \pm B_{ij}.$$

Huom! Vain matriiseja, joilla on sama tyyppi, voidaan laskea yhteen tai vähentää toisistaan.

Esimerkki 8.13. Kahden 3×2-matriisin yhteenlasku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+(-1) \\ 3+0 & 4+1 \\ 5+3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Määritelmä 8.14. Skalaarikertolasku. Minkä tahansa matriisin A voi kertoa reaaliluvulla c. Tätä toimitusta kutsutaan *skalaarikertolaskuksi* ja merkitään cA (ilman kertomerkkiä). Tässä operaatiossa jokainen matriisin alkio yksinkertaisesti kerrotaan kyseisellä luvulla, eli

$$(cA)_{ij} = c \cdot A_{ij}.$$

Esimerkki 8.15. Erään 3×2-matriisin kertominen luvulla:

$$2\begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 1\\3 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\cdot 2 & 2\cdot(-1)\\2\cdot 0 & 2\cdot 1\\2\cdot 3 & 2\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & -2\\0 & 2\\6 & 4\end{bmatrix}.$$

Matriisin kertominen luvulla on helppo toimitus ja se voidaan aina suorittaa. Kahden matriisin välinen kertolasku on hieman monimutkaisempi ja myös rajoitetumpi operaatio.

Määritelmä 8.16. Matriisikertolasku. Kaksi matriisia voidaan kertoa toisillaan vain, jos *ensimmäisessä on yhtä paljon sarakkeita kuin toisessa on rivejä*. Olkoon siis A $m \times n$-matriisi ja B $n \times p$-matriisi. Tällöin matriisi AB on määritelty. Sen alkio $(AB)_{ij}$ saadaan kertomalla A:n i:nnen rivin alkiot yksitellen B:n j:nnen sarakkeen alkioilla ja laskemalla saadut tulot yhteen. Siis

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj} \left(= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}\right).$$

Tuloksena on $m \times p$-matriisi.

Esimerkki 8.17. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\1 & 3 & 2\end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

Koska A:ssa on kolme saraketta (tyyppi $2 \times \mathbf{3}$) ja B:ssä on vastaavasti kolme riviä (tyyppi $\mathbf{3} \times 2$), matriisit voidaan kertoa keskenään. Tulosmatriisi on tyyppiä 2×2.

Katsotaan aluksi, miten saadaan tulomatriisin ensimmäisen rivin ensimmäisen alkion arvo. Määritelmän mukaan on otettava matriisista A ensimmäinen rivi ja matriisista B ensimmäinen sarake, kerrottava näillä olevat alkiot keskenään, ja laskettava yhteen. Siis

$$\begin{aligned}(AB)_{11} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31}\\ &= 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) + 0\cdot 0 = 4.\end{aligned}$$

Lasketaan tämän jälkeen ensimmäisen rivin toinen alkio kertomalla matriisin A ensimmäisen rivin alkiot matriisin B toisen sarakkeen alkioilla:

$$\begin{aligned}(AB)_{12} &= A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32}\\ &= 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 1 = 5.\end{aligned}$$

Samaan tapaan lasketaan muutkin alkiot:

$$\begin{aligned}AB &= \begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\1 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) + 0\cdot 0 & 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 1\\ 1\cdot 1 + 3\cdot(-2) + 2\cdot 0 & 1\cdot 2 + 3\cdot(-1) + 2\cdot 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 5\\-5 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Tulos on 2×2-matriisi, niin kuin pitääkin.

Matriisia, jossa on yhtä monta riviä kuin saraketta, kutsutaan *neliömatriisiksi.* Neliömatriiseja voidaan kertoa toisillaan kummin päin tahansa, mutta tulos ei silti välttämättä ole sama.

Esimerkki 8.18. Olkoot $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ ja $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Tällöin

$$AB = \begin{bmatrix} 2\cdot 0 + 1\cdot(-4) & 2\cdot 3 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 2\cdot(-4) & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -8 & 5 \end{bmatrix},$$

mutta

$$BA = \begin{bmatrix} 0\cdot 2 + 3\cdot 1 & 0\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ -4\cdot 2 + 1\cdot 1 & -4\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}.$$

Aina ei siis päde $AB = BA$. Kuitenkin seuraavat säännöt pätevät matriisien kertolaskulle silloin, kun se voidaan suorittaa:

1. $A(BC) = (AB)C$,
2. $A(B + C) = AB + AC$,
3. $(A + B)C = AC + BC$.

8.3 Käänteismatriisi

Olkoon A $n \times n$-neliömatriisi, alkioinaan $a_{11}, \ldots, a_{nn}$, ja olkoot X ja B $n \times 1$-matriiseja (vain yksi sarake), alkiot vastaavasti $x_1, \ldots, x_n$ ja $b_1, \ldots, b_n$. Tarkastellaan *matriisiyhtälöä*

$$AX = B.$$

Yhtälön vasemmalla puolella oleva kertolasku antaa tulokseksi

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}.$$

Tämä on $n \times 1$-matriisi, samoin kuin alkuperäisen yhtälön oikealla puolella oleva matriisi B. Yhtälö pätee, jos ja vain jos vasemmanpuoleisen matriisin alkiot ovat samat kuin oikeanpuoleisen, eli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}.$$

Nähdään, että matriisiyhtälö $AX = B$ vastaa erästä lineaarista yhtälöryhmää.

Lause 8.19. *Lineaarista yhtälöryhmää, jossa on n yhtälöä ja n tuntematonta, vastaa matriisiyhtälö $AX = B$, missä A on $n \times n$-matriisi, joka sisältää yhtälöryhmän kertoimet, X on $n \times 1$-matriisi, joka sisältää tuntemattomat, ja B on $n \times 1$-matriisi, joka sisältää yhtälöiden oikealla puolella olevat vakioarvot.*

Vaikka mikä tahansa yhtälöryhmä voidaankin kirjoittaa vastaavana matriisiyhtälönä, tässä yhteydessä tarkastellaan kuitenkin vain sellaisia yhtälöryhmiä, joissa on yhtä monta yhtälöä kuin tuntematonta. Yhtälöryhmä voidaan nimittäin aina muuttaa tällaiseen muotoon niin, että ratkaisut pysyvät edelleen samoina. Yhtälöihin voidaan aina lisätä tuntemattomia, jos niiden kertoimeksi vain asetetaan nolla, ja toisaalta sama yhtälö voidaan toistaa ryhmässä useamman kerran, jolloin yhtälöiden määrä kasvaa, vaikka ratkaisut eivät muutu.

Matriisiyhtälössä on kaikkien yhtälöiden kertoimet ikään kuin korvattu yhdellä “superkertoimella” A. Vastaavasti muuttujat on korvattu “supermuuttujalla” X ja oikean puolen vakiot “supervakiolla” B. Matriisimuodon käyttämisestä olisi todellista hyötyä, jos tämä “superyhtälö” voitaisiin ratkaista kerralla ikään kuin tavallinen yhtälö. Tähän pyrittäessä otetaan ensin mallia tavallisen yhtälön ratkaisemisesta.

Ensimmäisen asteen yhtälö on muotoa $ax = b$. Jos $a \neq 0$, voidaan yhtälö ratkaista jakamalla sen molemmat puolet a:lla, eli kertomalla molemmat puolet a:n käänteisluvulla $1/a = a^{-1}$:

$$\begin{aligned} ax &= b \qquad \| \, a^{-1}\cdot \\ a^{-1}(ax) &= a^{-1}b \\ (a^{-1}a)x &= a^{-1}b \\ 1 \cdot x &= a^{-1}b \\ x &= a^{-1}b. \end{aligned}$$

Näin löydetään yhtälön ratkaisu $x = a^{-1}b = b/a$. Ratkaiseminen perustui tiettyihin lukujen ominaisuuksiin. Ensinnäkin kaikilla luvuilla pätee $a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)x$. Toisaalta käänteisluvulla pätee $a^{-1}a = 1$ ja lopulta ykkösellä kertominen antaa $1 \cdot x = x$. Ensimmäinen ominaisuus pätee matriiseillakin, sillä $A(BC) = (AB)C$, jos kertolasku vain voidaan suorittaa. Jos matriiseilta löydettäisiin muutkin kuvaillut ominaisuudet, voitaisiin matriisiyhtälö ratkaista samalla tavalla kuin lukuyhtälökin. Näistä ominaisuuksista viimeksi mainittu, eli $1 \cdot x = x$, voidaankin itse asiassa muotoilla helposti myös matriisella.

Määritelmä 8.20. Neliömatriisia, joka sisältää vasemmalta ylhäältä oikealle alas kulkevalla lävistäjällään pelkkiä ykkösiä ja muuten pelkkiä nollia, kutsutaan *ykkösmatriisiksi* ja merkitään

$$\mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

missä n on rivien (ja sarakkeiden) lukumäärä. Jokaista rivimäärää n vastaa oma ykkösmatriisi I_n. Ykkösmatriisille pätee

$$\mathrm{I}_n X = X,$$

olipa X mikä tahansa $n \times p$-matriisi. (Siinä täytyy siis olla n riviä, jotta kertolasku olisi mahdollinen.)

Ykkösmatriisilla kertominen vastaa siis ykkösellä kertomista: se ei muuta kerrottavaa matriisia mitenkään. Täytyisi vielä löytää käänteislukua vastaava matriisi. Luvun a käänteisluvulla a^{-1} on se tärkeä ominaisuus, että $a^{-1} \cdot a = 1$. Tarvittaisiin siis sellainen matriisia A vastaava matriisi A^{-1}, että $A^{-1}A = \mathrm{I}_n$. Kaikilla luvuilla ei kuitenkaan ole käänteislukua (nimittäin nollalla), eikä kaikilla matriiseillakaan ole käänteismatriisia.

Määritelmä 8.21. Olkoon A $n \times n$-neliömatriisi. Jos on olemassa jokin matriisi B, jolle pätee $BA = \mathrm{I}_n$, niin sanotaan, että A on *säännöllinen* eli *kääntyvä*, ja B on A:n *käänteismatriisi*. Käänteismatriisi on yksikäsitteinen, ja sitä merkitään $B = A^{-1}$. Lisäksi, jos A on säännöllinen, niin myös A^{-1} on säännöllinen ja sen käänteismatriisi on A (eli $(A^{-1})^{-1} = A$ ja $AA^{-1} = \mathrm{I}_n$).

Esimerkki 8.22. Olkoot $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ ja $B = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Tällöin

$$BA = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + (-5) \cdot 1 & 3 \cdot 5 + (-5) \cdot 3 \\ -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}_2.$$

Siispä B on A:n käänteismatriisi eli $B = A^{-1}$.

Jos neliömatriisille A sovelletaan eliminointimenetelmää, voi tuloksena olla ykkösmatriisi, kuten esimerkissä 8.6. Jos eliminoinnissa käytetyt operaatiot suoritetaan samassa järjestyksessä ykkösmatriisille, tuloksena onkin A:n käänteismatriisi.

Lause 8.23 (Käänteismatriisin olemassaolo ja löytäminen). *Olkoon A $n \times n$-matriisi. Sovelletaan matriisiin A eliminointimenetelmää, jolloin saadaan jokin matriisi B. Jos B on ykkösmatriisi, niin A on säännöllinen, ja A:n käänteismatriisi löydetään suorittamalla eliminoinnissa läpikäydyt operaatiot uudestaan ykkösmatriisille. Jos taas $B \neq \mathrm{I}_n$, niin A ei ole säännöllinen.*

Käytännössä kannattaa suorittaa eliminointi samanaikaisesti sekä matriisille A että ykkösmatriisille kokoamalla nämä vierekkäin samaan matriisiin $[A|I_n]$.

Esimerkki 8.24. Tarkastellaan esimerkin 8.22 matriisia $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$. Sovelletaan eliminointimenetelmää yhdistettyyn matriisiin $[A|\mathrm{I}_2]$:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 5 & | & 1 & 0 \\ 1 & 3 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} :2 \\ \end{matrix} && \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 5/2 & | & 1/2 & 0 \\ 1 & 3 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \leftarrow \end{matrix} \\ \rightsquigarrow & \begin{bmatrix} 1 & 5/2 & | & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & | & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ :1/2 \end{matrix} && \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 5/2 & | & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & | & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \cdot(-5/2) \end{matrix} \\ \rightsquigarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3 & -5 \\ 0 & 1 & | & -1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vasemmalle puolelle muodostui ykkösmatriisi, joten oikealle puolelle muodoustui vastaavasti A:n käänteismatriisi $A^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Tämä vastaa aikaisempaa tulosta.

Esimerkki 8.25. Tarkastellaan vielä matriisia $S = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{smallmatrix}\right]$. Eliminoimalla yhdistettyä matriisia $[S|\mathrm{I}_2]$ saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ -3 & 6 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vasemmanpuoleisen matriisin toiselta riviltä hävisivät kaikki alkiot, joten eliminointia ei voida jatkaa. Matriisia S ei saatu eliminoimalla ykkösmatriisiksi, joten sillä ei ole käänteismatriisia.

Palataan nyt jälleen matriisiyhtälöön $AX = B$. Jos A:lla on käänteismatriisi, voimme ratkaista tämän yhtälön aivan kuten tavallisen ensimmäisen asteen yhtälön kertomalla molemmat puolet *vasemmalta* A:n käänteismatriisilla. (Oikealta kertominen ei tuota samaa tulosta, koska matriisien kertolaskulle ei välttämättä päde $AB = BA$.) Tämä käy seuraavasti:

$$\begin{aligned} AX &= B \qquad \| \, A^{-1}\cdot \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ \mathrm{I}_n X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B. \end{aligned}$$

Koska tämä matriisiyhtälö vastasi tiettyä yhtälöryhmää, voidaan kyseinen yhtälöryhmä siis ratkaista käänteismatriisin avulla. Koska käänteismatriisin olemassaolo riippuu vain kerroinmatriisista A, riippuu myös *ratkaisun onnistuminen* vain matriisista A, ei siis tuntemattomista eikä vakiot sisältävästä matriisista B.

Lause 8.26. *Olkoon ratkaistavana yhtälöryhmä $AX = B$. Jos kerroinmatriisi A on säännöllinen, yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu $X = A^{-1}B$. Jos A ei ole säännöllinen, yhtälöryhmä on huonosti ratkeava.*

Käänteismatriisi soveltuu käytettäväksi erityisesti silloin, kun ratkaistavana on monta yhtälöryhmää, joissa on samat kertoimet. Tällöin näet ratkaisemisessa tarvittava eliminointi tarvitsee suorittaa vain kerran käänteismatriisin löytämiseksi.

Esimerkki 8.27. Ratkaistaan sellaisen paraabelin yhtälö, joka kulkee pisteiden $(-1, 6)$, $(1, 2)$ ja $(2, 3)$ kautta. Paraabelin yleinen yhtälö on $y = ax^2 + bx + c$. Kun ensimmäisen pisteen koordinaatit sijoitetaan tähän yhtälöön, saadaan yhtälö

$$1 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \iff a - b + c = 0.$$

Sijoitetaan yhtälöön sitten vastaavasti muidenkin annettujen pisteiden koordinaatit, jotta saadaan seuraava yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} a - b + c &= 6 \\ a + b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= 3 \end{cases}.$$

Tätä yhtälöryhmää vastaa matriisiyhtälö $AX = B$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan matriisiyhtälö käänteismatriisin avulla. Sen löytämiseksi eliminoidaan yhdistettyä matriisia $[A|I_3]$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) & | \cdot (-4) \\ \leftarrow & | \\ & | \leftarrow \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & | & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} : 2$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & | & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \\ \cdot 1 & | \cdot (-6) \\ & | \leftarrow \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} : (-3)$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/3 & 1 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/3 & 1 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

Matriisi A on näemmä säännöllinen, ja sen käänteismatriisi on

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on täten

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \begin{bmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \cdot 6 - 1/2 \cdot 2 + 1/3 \cdot 3 \\ -1/2 \cdot 6 + 1/2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ 1/3 \cdot 6 + 1 \cdot 2 - 1/3 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 1 + 1 \\ -3 + 1 + 0 \\ 2 + 2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Siispä $a = 1$, $b = -2$ ja $c = 3$, joten paraabelin yhtälö on $y = x^2 - 2x + 3$.

Jos nyt haluttaisiin selvittää sellaisen paraabelin yhtälö, joka kulkeekin pisteiden $(-1, -3)$, $(1, 1)$ ja $(2, 0)$ kautta, olisi ratkaistavana yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a - b + c &= -3 \\ a + b + c &= 1 \\ 4a + 2b + c &= 0 \end{cases}.$$

Tässä on samat kertoimet kuin edellä (koska pisteiden x-koordinaatit olivat samat), joten kerroinmatriisi A on sama kuin edellä, ja ratkaisu saadaan jälleen samaa käänteismatriisia käyttämällä. Tällä kertaa B sisältää y-koordinaattien arvot -3, 1 ja 0:

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \begin{bmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \cdot (-3) - 1/2 \cdot 1 + 1/3 \cdot 0 \\ -1/2 \cdot (-3) + 1/2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 1/3 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 - 1/3 \cdot 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1/2 - 1/2 + 0 \\ 3/2 + 1/2 + 0 \\ -1 + 1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uuden paraabelin yhtälö on siis $y = -x^2 + 2x$.

Jos yhtälöryhmä on huonosti ratkeava, käänteismatriisisista ei ole hyötyä. Sen avulla ei esimerkiksi voida sanoa, onko yhtälöryhmä ristiriitainen vai onko ratkaisuja mahdollisesti äärettömän monta.