7 Differentiaaliyhtälöt

7.1 Differentiaaliyhtälöt ja alkuarvotehtävät

Useissa tilanteissa jonkin suureen muutos riippuu jollain tavoin suureen tilasta. Aiemmin on jo esitetty esimerkkejä, joissa muun muassa bakteerikannan lisääntymisnopeus oli riippuvainen bakteerien määrästä. Tällä tavoin bakteerien määrä tulevaisuudessa myös riippuu niiden määrästä menneisyydessä: mitä vähemmän bakteereja nyt, sitä pienempi lisääntymisnopeus ja sitä vähemmän bakteereja tulevaisuudessa. Riippuvuus voi tietysti olla paljon monimutkaisempaakin.

Jos suureen arvoa kuvaa jokin derivoituva funktio, tämän derivaatta kertoo suureen muutosnopeudesta. (Muutos voi olla paitsi ajallista, myös paikallista tai johonkin muuhun muuttujaan sidottua.) Tällöin edellä kuvatun kaltaisia riippuvuuksia voidaan ilmaista matemaattisesti yhtälöillä, jotka sitovat funktion derivaatan arvot jollain tavoin funktion arvoihin. Tällaisia yhtälöitä *differentiaaliyhtälöiksi*. Edellä mainitun bakteeriesimerkin riippuvuutta kuvaa differentiaaliyhtälö

$$S'(t) = k \cdot S(t),$$

missä funktio S kuvaa bakteerien määrää ajan suhteen ja k on verrannollisuuskerroin, joka kuvaa bakteerien lisääntymiskykyä. Yhtälö siis ilmaisee, että bakteerien määrän muutosnopeus $S'(t)$ hetkellä t on suoraan verrannollinen bakteerien määrään $S(t)$ kyseisellä hetkellä. Tällaisesta yhtälöstä olisi tarkoitus päätellä, minkälainen on funktio S. Yhtälön ratkaiseminen tarkoittaa siis kyseisen funktion riippuvuussäännön määrittämistä.

Differentiaaliyhtälöissä esiintyy aina (vähintään yksi) tuntematon funktio, joka pyritään ratkaisemaan. Koska ratkaistavana ei siis ole luku vaan funktio, ei ratkaisussa pärjätä pelkästään tavallisten yhtälöiden käsittelyssä opituilla menetelmillä. Lisäksi differentiaaliyhtälön ratkaisu ei ole yleensä yksikäsitteinen, vaan moni funktio voi toteuttaa saman yhtälön. Tällöin tarvitaan jotain lisätietoa, jotta funktio voitaisiin ratkaista yksikäsitteisesti. Tällainen lisätieto voisi olla esimerkiksi bakteerien määrä jollain sovitulla alkuhetkellä. Tämä lisätieto auttaa ratkaisemaan bakteerien määrää ajan funktiona kuvaavan funktion yksikäsitteisesti, mikäli verrannollisuuskerroin k tunnetaan (riippuu bakteerien fysiologiasta).

Differentiaaliyhtälöiden yhteydessä käytetään matematiikassa yleensä tiettyjä melko vakiintuneita merkintöjä. Tuntematonta funktiota merkitään usein y ja sen derivaattaa y'. Lisäksi yhtälössä voi esiintyä derivaatan derivaattoja y'', y''' jne. Funktion muuttujana voi olla x, mutta hyvin usein myös t, varsinkin jos funktio kuvaa jotain ajasta riippuvaa suuretta. Jos muuttujana on t, funktiota itseään voidaan toisinaan jopa merkitä x:llä, esimerkiksi $x(t) = t^2$. Koska differentiaaliyhtälön ajatellaan yleensä pätevän kaikilla muuttujan arvoilla (esimerkiksi bakteerien määrän riippuvuutta kuvaava yhtälö pätee teoriassa kaikilla ajanhetkillä), niin yhtälöissä jätetään lisäksi yleensä merkitsemättä funktion muuttuja; ei siis merkitä funktion arvoa (oikeaoppisesti) $y(x)$ vaan yksinkertaisesti y.

Määritelmä 7.1. Yhtälöä, jossa esiintyy vähintään yksi tuntemattoman funktion y derivaatta tai korkeampi derivaatta, kutsutaan *differentiaaliyhtälöksi* (DY). Differentiaaliyhtälön ratkaisu on mikä tahansa funktio, joka y:n paikalle sijoitettuna toteuttaa yhtälön. Yhtälön *kertaluku eli aste* on korkeimman siinä esiintyvän derivaatan kertaluku.

Esimerkki 7.2. Differentiaaliyhtälöitä:

$$\begin{aligned} y' &= 0 && \text{(1. aste)}, \\ y'' + 2xy &= \sqrt{x} && \text{(2. aste)}, \\ y''y &= \frac{x}{\sqrt{y'''}} && \text{(3. aste)}. \end{aligned}$$

Esimerkki 7.3. Tarkastellaan yhtälöä

$$y'' - 2y' + y = x.$$

Tämä on toisen asteen differentiaaliyhtälö. Yhtälön eräs ratkaisu on $y(x) = e^x + x + 2$, sillä sen derivaatat ovat

$$y'(x) = e^x + 1 \quad \text{ja} \quad y''(x) = e^x.$$

Kun nämä sijoitetaan yhtälön vasemmalle puolelle, saadaan

$$y'' - 2y' + y = e^x - 2(e^x + 1) + (e^x + x + 2) = x.$$

Tämä on sama kuin yhtälön oikea puoli, eli funktio y toteuttaa yhtälön.

Esimerkki 7.4. Jos suureen muutosnopeus on suoraan verrannollinen suureen nykytilaan, kuvaa tilannetta differentiaaliyhtälö

$$y' = ky,$$

missä k on verrannollisuuskerroin. Tällaisen yhtälön ratkaisut ovat muotoa

$$y(t) = Ce^{kt},$$

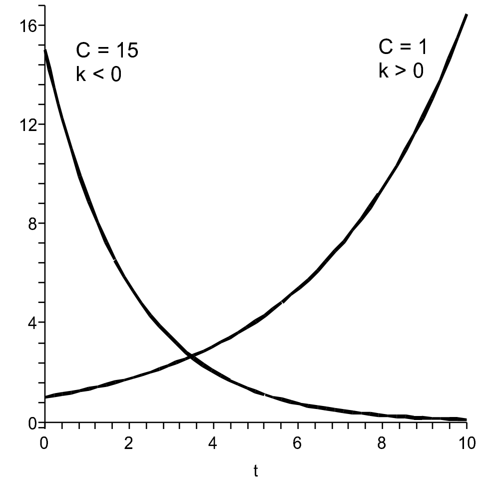
missä C on jokin tuntematon vakio. Nimittäin, tällaisen funktion derivaatta on

$$y'(t) = Ce^{kt} \cdot k = k \cdot Ce^{kt} = ky(t),$$

joten nähdään, että y todella toteuttaa kyseisen yhtälön. Tällaista yhtälöä sanotaan *eksponentiaalisen kasvun* (tai vähenemisen) yhtälöksi, sillä ratkaisufunktio y on eksponenttifunktio. Mikäli verrannollisuuskerroin k on positiivinen, ratkaisu on eksponentiaalisesti kasvava, mikäli k on negatiivinen, ratkaisu on eksponentiaalisesti vähenevä ja lähestyy nollaa. Luvun alun bakteeriesimerkki on tyypillinen esimerkki eksponentiaalisesta kasvusta. Luku C on tuntematon vakio, joka kuvaa systeemin alkutilaa. Sen arvoa ei voi päätellä suoraan ilman lisätietoja.

Esimerkki 7.5. Ilman ympäristön asettamia rajoitteita populaation koon kehittyminen noudattaa eksponentiaalisen kasvun mallia. Ympäristön vaikutus voidaan ottaa huomioon lisäämällä yhtälöön ympäristön kantokykyä kuvaava vakio E. Olkoon $N(t)$ populaation koko ajanhetkellä t. Suhde $N(t)/E$ kuvaa ympäristön kuormitusta. Kun se on 0, niin $N(t) = 0$ eikä ympäristö ole lainkaan kuormittunut. Kun se on 1, niin $N(t) = E$ ja ympäristö asettaa esteen lisääntymiselle. Näin saadaan yhtälö populaation lisääntymiselle yhtälö

$$N' = kN\left(1 - \frac{N}{E}\right).$$



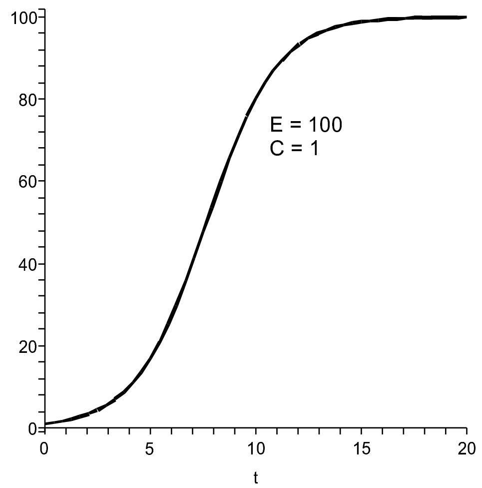
Kuva 1: Eksponentiaalisen kasvun kuvaajia

Tässä yhtälössä k on jälleen eliöiden lisääntymiskykyä kuvaava vakio, joka on nyt positiivinen. Eksponentiaalisesta mallista poiketen mukana on nyt termi $1 - N(t)/E$, joka pakottaa lisääntymisnopeuden nollaan, kun populaation koko $N(t)$ saavuttaa ympäristön kantokyvyn E.

Edellä kuvattua yhtälöä sanotaan *logistisen kasvun* yhtälöksi. Sen ratkaisut ovat muotoa

$$N(t) = \frac{E \cdot Ce^{kt}}{E + C(e^{kt} - 1)},$$

missä C on jälleen populaation alkutilaa kuvaava tuntematon vakio.



Kuva 2: Eräs logistisen kasvun kuvaaja

Edellisissä esimerkeissä nähtiin, että differentiaaliyhtälö ei määrää systeemiä välttämättä täydellisesti, vaan ratkaisuun saattaa jäädä tuntemattomia vakioita. Usein systeemistä kuitenkin tiedetään sen toteuttaman differentiaaliyhtälön lisäksi sen alkutila tai tila jollakin muulla hetkellä. Nämä *alkuarvot* auttavat systeemin tilaa kuvaavan funktion tarkassa määrittämisessä.

Määritelmä 7.6. Ongelmaa, jossa yritetään ratkaista tuntematon funktio, kutsutaan *alkuarvotehtäväksi* (AAT), jos tiedetään

1) jokin y:n toteuttama differentiaaliyhtälö, sekä

2) y:n sekä sen derivaattojen arvot jossain (samassa) pisteessä $(n-1)$:nteen derivaattaan asti, missä n on yhtälön kertaluku.

Esimerkki 7.7. Tarkastellaan tavallista eksponentiaalisen kasvun mallia, jota kuvaa yhtälö

$$y'(t) = ky(t),$$

missä k on verrannollisuuskerroin. Tällaisen yhtälön ratkaisut ovat muotoa

$$y(t) = Ce^{kt},$$

missä C on jokin tuntematon vakio. Jos tunnetaan systeemin alkutila eli funktion y arvo ajanhetkellä $y(0)$, voidaan vakion C arvo selvittää. Esimerkiksi, jos y kuvaa bakteerikasvuston massaa ja alussa bakteereja oli 3 mg, voidaan merkitä $y(0) = 3$. Funktion y lausekkeen mukaan

$$y(0) = C \cdot e^{k \cdot 0} = C \cdot 1 = C,$$

joten voidaan päätellä, että $C = 3$.

Esimerkki 7.8. Aina alkuarvoehtokaan ei riitä yhtälön yksikäsitteiseen ratkaisemiseen. Tarkastellaan vaikkapa alkuarvotehtävää

$$y' = \sqrt{y}, \qquad y(0) = 0.$$

Heti nähdään, että vakiofunktio $y_1(x) = 0$ toteuttaa yhtälön ja alkuarvoehdon, joten se on eräs ratkaisu. Toisaalta myös $y_2(x) = x^2/4$ on ratkaisu. Tämän derivaatta on nimittäin $y_2'(x) = 2x/4 = x/2$, ja

$$\sqrt{y_2} = \sqrt{\frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{4}} = \frac{x}{2},$$

joten $y_2' = \sqrt{y_2}$. Lisäksi y_2 toteuttaa myös alkuarvoehdon.

Koska differentiaaliyhtälöissä esiintyy derivaattoja, täytyy niitä ratkaistaessa yleensä etsiä funktioiden integraalifunktioita. Tämän vuoksi differentiaaliyhtälön ratkaisemista kutsutaan joskus yhtälön integroimiseksi. Integraalifunktioita etsittäessä on muistettava, että tietyn funktion integraalifunktio ei ole koskaan yksikäsitteinen. Eri integraalifunktiot voivat poiketa toisistaan integroimisvakiolla, joka on otettava huomioon.

Esimerkki 7.9. Jotkut differentiaaliyhtälöt ovat yksinkertaisia ratkaista. Tarkastellaan esimerkiksi alkuarvotehtävää

$$y'' = 2x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

Tämä yhtälö sanoo yksinkertaisesti, että tuntematon funktio y on sellainen, jonka toisen derivaatan lauseke on $2x$. (Huomaa, että itse funktio y ei välttämättä esiinny yhtälössä.)

Yhtälö voidaan ratkaista peruuttamalla derivointi kahdesti, eli etsimällä funktion y'' integraalifunktiot y', ja sitten tämän funktion integraalifunktiot y. Aluksi saadaan

$$y'(x) = \int y''(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + C.$$

Tässä ei saa unohtaa integroimisvakiota C. Toisen alkuarvoehdon mukaan nimittäin pitää päteä $y'(0) = -1$, ja toisaalta

$$y'(0) = 0^2 + C = C,$$

joten itse asiassa $C = -1$ ja $y'(x) = x^2 - 1$. Nyt voidaan jatkaa:

$$y(x) = \int y'(x)\,dx = \int x^2 - 1\,dx = \frac{x^3}{3} - x + D.$$

Edelleen, koska ensimmäisen alkuarvoehdon mukaan pätee $y(0) = 0$, mutta toisaalta

$$y'(0) = \frac{0^3}{3} - 0 + D = 0 - 0 + D = D,$$

niin itse asiassa $D = 0$ ja $y(x) = x^3/3 - x$.

Jos alkuarvoehtoja ei olisi, ei vakiota C olisi voitu selvittää. Tällöin ratkaisuksi saataisiin

$$y(x) = \int y'(x)\,dx = \int x^2 + C\,dx = \frac{x^3}{3} + Cx + D,$$

ja ratkaisuun jää kaksi tuntematonta (integroimis)vakiota.

7.2 Separoituvan yhtälön ratkaiseminen

Separoituvia differentiaaliyhtälöitä esiintyy käytännön tilanteissa melko usein, ja niiden ratkaisumenetelmä on yksinkertainen. Separoituvassa differentiaaliyhtälössä muuttujan arvo ja funktion arvo saadaan yhtäsuuruusmerkin eri puolille.

Määritelmä 7.10. Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä kutsutaan *separoituvaksi*, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$g(y)y' = h(x),$$

missä $g(y)$ on lauseke, jossa ei esiinny ollenkaan muuttujaa x (paitsi funktion y muuttujana) ja $h(x)$ on lauseke, jossa ei esiinny lainkaan tuntematonta funktiota y.

Esimerkki 7.11.

a) Yhtälö

$$2yy' = x^2$$

on separoituva. Tässä $g(y) = 2y$ ja $h(x) = x^2$.

b) Myös yhtälö

$$y' = (x+2)y^2$$

on separoituva, jos $y \neq 0$, sillä se voidaan tällöin jakaa puolittain y^2:lla, jolloin saadaan

$$\frac{y'}{y^2} = x + 2.$$

Tässä $g(y) = 1/y^2$ ja $h(x) = x + 2$.

c) Yhtälö

$$y' + 2y = x$$

ei ole separoituva, sillä se ei ole muotoa $g(y)y' = h(x)$, eikä sitä voi myöskään muuttaa tähän muotoon.

Separoituvan differentiaaliyhtälön ratkaiseminen perustuu yhdistetyn funktion derivaattaa koskevaan integrointisääntöön. Tarkoituksena on päästä eroon y:n derivaatasta, jolloin yhtälö muuttuu differentiaaliyhtälöstä tavalliseksi algebralliseksi yhtälöksi.

Kun muistetaan y:n olevan itse asiassa x:n funktio, niin huomataan, että yhtälön vasemmalla puolella oleva $g(y) = g(y(x))$ on yhdistetyn funktion lauseke. Merkitään G:llä jotain funktion g integraalifunktiota. Tällöin $G' = g$, joten separoituva yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$G'(y(x))y'(x) = h(x).$$

Nyt nähdään, että vasemmalla puolella olevassa lausekkeessa on yhdistetty funktio kerrottu sisäfunktion derivaatalla. Tähän voidaan suoraan soveltaa sopivaa integroimissääntöä (numero 5), jolloin vasemman puolen integraalifunktioksi saadaan

$$\int G'(y(x))y'(x)\,dx = G(y(x)) + C.$$

Vasemman puolen integraalifunktion on oltava sama kuin oikean puolen, jonkin vakion lisäystä lukuunottamatta. Jos merkitään oikean puolen funktion h jotain integraalifunktiota H, niin saadaan ratkaisuksi

$$G(y(x)) = H(x) + C.$$

Tämä on nyt tavallinen yhtälö, koska siinä ei enää esiinny y:n derivaattoja. Tästä pyritään vielä ratkaisemaan y, mutta se ei ole aina mahdollista.

Esimerkki 7.12. Ratkaistaan yhtälö

$$2yy' = x^2.$$

Tässä $g(y) = 2y$ ja $h(x) = x^2$. Funktio g on siis ikään kuin *muuttujan y funktio*, ja sen eräs integraalifunktio on $G(y) = y^2$. Funktion h integraalifunktioksi voidaan valita esimerkiksi $H(x) = x^3/3$. Edellä esitetyn ratkaisumenetelmän mukaan $G(y) = H(x) + C$, missä C on jokin vakio, joten

$$y^2 = x^3/3 + C.$$

Tästä voidaan vielä ratkaista y ottamalla molemmilta puolilta neliöjuuri. Täytyy kuitenkin muistaa ottaa huomioon myös negatiivinen vaihtoehto:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x^3 + C}.$$

Usein yhtälön muuttaminen separoituvaan muotoon vaatii lisäoletuksia, joiden avulla voi löytyä lisäratkaisuja. Tällaisia ratkaisuja, jotka löytyvät ennen kuin yhtälö on separoituvassa muodossa, kutsutaan *erillisratkaisuiksi.*

Esimerkki 7.13. Ratkaistaan yhtälö

$$y' = y^2.$$

Yhtälö ei ole separoituvassa muodossa, mutta se voidaan helposti muuttaa sellaiseen jakamalla termillä y^2. Tämä on kuitenkin kiellettyä, jos $y = 0$. Toisaalta funktio $y(x) = 0$ toteuttaa kyseisen yhtälön. Se on siis erillisratkaisu.

Muiden ratkaisujen löytämiseksi voidaan olettaa, että $y \neq 0$. Jaetaan yhtälö puolittain y^2:lla:

$$y^{-2}y' = 1.$$

Nyt $g(y) = y^{-2}$, ja tämän eräs integraalifunktio on $G(y) = -y^{-1}$. Toisaalta funktion $h(x) = 1$ eräs integraalifunktio on $H(x) = x$. Saadaan siis

$$-y^{-1} = x + C,$$

josta ratkeaa helposti

$$y(x) = -\frac{1}{x + C}.$$

Tämä separoimalla saatu ratkaisu ei saa koskaan arvoa 0, niin kuin oletettiinkin. Yhtälön ratkaisuja ovat siis erillisratkaisun lisäksi kaikki separoimalla saadut ratkaisut, jotka riippuvat vakiosta C:

$$y(x) = 0 \quad \text{tai} \quad y(x) = -\frac{1}{x + C}.$$

Jos tehtävässä olisi vielä alkuarvoehto, sen avulla voitaisiin valita oikea ratkaisu. Jos esimerkiksi $y(1) = 0$, niin tiedetään, että erillisratkaisu $y(x) = 0$ on oikea, koska separoimalla saatu ratkaisu ei voi koskaan saada arvoa 0.

Separoituvan yhtälön ratkaisumenetelmän muistamista voi helpottaa, jos ajattelee vain "integroivansa molemmat puolet". Samalla voi yhdistetyn funktion integroimissäännön muistaa muodossa $y'\,dx \rightsquigarrow dy$.

Esimerkki 7.14. Ratkaistaan eksponentiaalisen kasvun mallin mukainen alkuarvotehtävä

$$y'(t) = -3y(t), \qquad y(0) = 4.$$

Yhtälö ei ole separoidussa muodossa, mutta se voidaan helposti muuttaa sellaiseen jakamalla puolittain termillä y. Tämä on kuitenkin kiellettyä, jos $y = 0$. Erillisratkaisu $y(t) = 0$ ei kuitenkaan toteuta alkuarvoehtoa, joten voidaan olettaa, että $y \neq 0$. Jaetaan nyt yhtälö puolittain y:llä ja integroidaan:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y} \cdot y' &= -3 \\
\int \frac{1}{y} \cdot y'\,dt &= \int -3\,dt \\
\int \frac{1}{y}\,dy &= \int -3\,dt \\
\ln|y| &= -3t + C.
\end{aligned}$$

Integroimisvakio tarvitsee merkitä vain toiselle puolelle. Koska alkuarvoehdon mukaan $y(0) = 4 > 0$, niin voidaan jättää itseisarvomerkit pois.

Koska logaritmi y:stä kertoo, mihin potenssiin kantaluku pitäisi korottaa, jotta saataisiin $-3t + C$, nähdään että

$$y = e^{-3t+C} = e^C \cdot e^{-3t}.$$

On tapana merkitä $e^C = y_0$, jolloin ratkaisufunktio on $y(t) = y_0 e^{-3t}$, missä $y_0 = e^C$ on jokin positiivinen vakio.

Koska alkuarvoehdon mukaan $y(0) = 4$, ja toisaalta

$$y(0) = y_0 \cdot e^{k \cdot 0} = y_0 \cdot 1 = y_0,$$

niin nähdään, että vakio $y_0 = 4$. Ratkaisufunktio on siis

$$y(t) = 4e^{-3t}.$$

Esimerkki 7.15. Myös logistisen mallin yhtälö on separoituva. Muokataan yhtälön lauseketta ensin hieman:

$$N' = kN\left(1 - \frac{N}{E}\right) = k\left(N - \frac{N^2}{E}\right).$$

Voidaan olettaa, että $N > 0$ (eli populaatio ei ole tyhjä) ja $N < E$ (eli populaatio ei ole saavuttanut ympäristön kantokykyä), jolloin yhtälö voidaan jakaa puolittain oikean puolen termillä $N - N^2/E$:

$$\frac{1}{N - N^2/E} N' = k.$$

Yhtälö on nyt separoidussa muodossa: $H(t) = k$ ja $G(N) = 1/(N - N^2/E)$, joista jälkimmäinen voidaan myös kirjoittaa muodossa

$$G(N) = \frac{1}{N} - \frac{1}{N-E}.$$

Integroidaan yhtälö puolittain ja muistetaan, että $N > 0$ ja $N - E < 0$:

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N-E}\right) N'\,dt &= \int k\,dt \\
\int \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N-E}\right) dN &= \int k\,dt \\
\ln N - \ln(E - N) &= kt + C.
\end{aligned}$$

Logaritmien laskusääntöjen mukaan $\ln N - \ln(E-N) = \ln \frac{N}{E-N}$, joten eksponenttifunktion avulla saadaan

$$\frac{N}{E-N} = e^C \cdot e^{kt}.$$

Merkitään nyt $e^C = N_0/(E - N_0)$ ja ratkaistaan vielä yhtälöstä N:

$$\begin{aligned}
\frac{N}{E-N} &= \frac{N_0 e^{kt}}{E - N_0} \qquad \| \ \text{(kerrotaan ristiin)} \\
EN - N_0 N &= EN_0 e^{kt} - NN_0 e^{kt} \\
EN - NN_0 + NN_0 e^{kt} &= EN_0 e^{kt} \\
\big(E + N_0(e^{kt} - 1)\big)N &= EN_0 e^{kt} \\
N &= \frac{EN_0 e^{kt}}{E + N_0(e^{kt} - 1)}.
\end{aligned}$$

Jos nyt $t = 0$, niin

$$N(0) = \frac{EN_0 e^{k\cdot 0}}{E + N_0(e^{k\cdot 0} - 1)} = \frac{EN_0 \cdot 1}{E + \underbrace{N_0(1-1)}_{=0}} = \frac{EN_0}{E} = N_0.$$

Vakio N_0 kuvaa siis populaation kokoa ajanhetkellä 0.

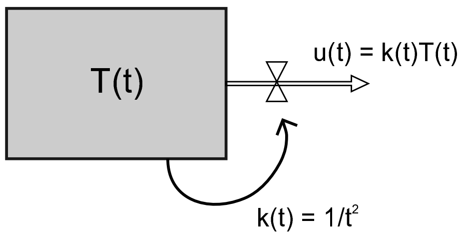
7.3 Virtausmallit

Virtausmallit tuottavat helposti differentiaaliyhtälöitä, sillä aineen virtaaminen johonkin säiliöön tai sieltä pois aiheuttaa aineen määrän muutoksen säiliössä. Jos virtausnopeudet ovat jonkin takaisinkytkennän kautta sidoksissa aineen määrään säiliössä, tilannetta voidaan kuvata differentiaaliyhtälöllä.

Esimerkki 7.16. Olkoon $T(t)$ aineen määrä säiliössä ajanhetkellä t. Ainetta on hetkellä $t = 1$ säiliössä 10 litraa, eikä sitä tule lisää. Ulosvirtaavan aineen nopeus $u(t)$ puolestaan riippuu aineen määrästä säiliössä niin, että $u(t) = kT(t)$. Verrannollisuuskerroin k ei kuitenkaan tällä kertaa ole vakio, vaan vähenee ajan myötä noudattaen funktiota $k(t) = 1/t^2$. Säiliössä olevan aineen määrän muutos ajanhetkellä t on $T'(t)$, ja koska se riippuu nyt vain ulosvirtauksen nopeudesta, saadaan yhtälö $T'(t) = -u(t) = -k(t)T(t)$ eli

$$T'(t) = -\frac{1}{t^2} \cdot T(t).$$

Tilannetta kuvaa oheinen virtauskaavio.



Tämä yhtälö voidaan separoida jakamalla puolittain T:llä. Koska alkuehdon mukaan aineen määrä ei ole nolla, niin jako voidaan suorittaa, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} \cdot T' &= -\frac{1}{t^2} \\
\int \frac{1}{T} \cdot T' \, dt &= \int -\frac{1}{t^2} \, dt \\
\int \frac{1}{T} \, dT &= \int -t^{-2} \, dt \\
\ln |T| &= -\frac{t^{-1}}{-1} + C \\
\ln |T| &= \frac{1}{t} + C.
\end{aligned}$$

Koska aineen määrä säiliössä on aina positiivinen, voidaan itseisarvomerkit jättää pois. Eksponenttifunktion avulla saadaan

$$T = e^{\frac{1}{t}+C} = e^C \cdot e^{\frac{1}{t}} = Ae^{\frac{1}{t}},$$

missä on merkitty $e^C = A$. Alkuehdon mukaan $T(1) = 10$, ja toisaalta

$$T(1) = Ae^{\frac{1}{1}} = Ae,$$

joten $A \cdot e = 10$, josta $A = 10/e = 10e^{-1}$. Alkuarvotehtävän ratkaisuksi saadaan siis funktio

$$T = 10e^{-1}e^{\frac{1}{t}} = 10e^{\frac{1}{t}-1}.$$

Kun t:tä kasvatetaan, niin $1/t \to 0$, joten $\lim_{t\to\infty} T(t) = 10e^{-1} \approx 3{,}68$.