5 Jatkuvan funktion integraali

5.1 Integraalin määritelmä

Kuten edellisessä luvussa todettiin, funktion derivaatta kertoo funktion muutosnopeuden. Jos siis tunnetaan jonkin suureen riippuvuutta kuvaava funktio, saadaan derivaatan avulla selville jotain kyseisen suureen muutoksesta. Joskus tilanne on kuitenkin sellainen, että tunnemme suureen vaihtelua kuvaavan funktio, ja haluaisimme selvittää jotain suureesta itsestään. Voimme esimerkiksi auton nopeusmittaria tarkkailemalla saada tietää nopeutta kullakin ajanhetkellä kuvaavan funktion. Tämän funktion avulla pitäisi sitten selvittää, miten paljon auto on edennyt jollain tietyllä aikavälillä.

Edellä kuvatun kaltaisissa tilanteissa on kyse funktion integroinnista. Integroiminen on derivoinnille vastakkainen toimenpide. Derivaatta antaa funktion muutosnopeuden tietyssä pisteessä, integraali puolestaan selvittää muutosnopeudesta funktion todelliset arvot. Tällä kurssilla integroidaan vain jatkuvia funktioita, mutta integraalin määritelmää voidaan yleistää niin, että se soveltuu myös epäjatkuville funktioille. (Toisin kuin derivaatan tapauksessa.)

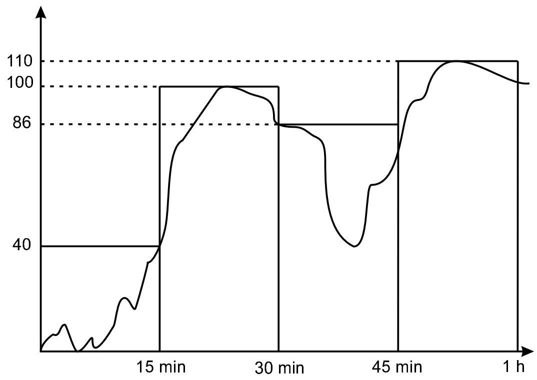
Tarkastellaan ensimmäisenä esimerkkinä linja-autoa matkalla Kotkasta Helsinkiin. Oletetaan, että tunnemme linja-auton nopeuden v ajan funktiona. Yritetään arvioida nopeuden funktion perusteella kuljettua matkaa ensimmäisen tunnin aikana eli aikavälillä $[0, 1]$.

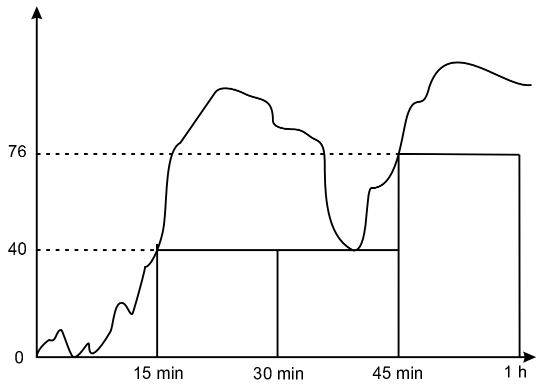
Jos nopeus pysyisi koko ajan tasaisena, eli v olisi vakiofunktio, saisimme kuljetun matkan yksinkertaisesti kertomalla käytetyn ajan tuolla vakionopeudella. Tällöin kuljettu matka olisi $s = v \cdot 1$ h. Nopeus voi kuitenkin vaihdella ajanhetkestä toiseen, joten tämä lähestymistapa ei tuota haluttua tulosta. Sen avulla voidaan kuitenkin arvioida kuljettua matkaa, jos tunnetaan linja-auton maksimi- ja miniminopeudet.

Olkoon esimerkiksi bussin suurin nopeus välillä $[0, 1]$ ollut 110 km/h, ja pienin nopeus 0 km/h (bussi seisoi aluksi asemalla). Jos bussi olisi ajanut koko ajan maksiminopeudellaan, se olisi kulkenut tunnin aikana 110 km/h $\cdot$ 1 h = 110 km. Jos se taas olisi ollut koko ajan paikallaan, se olisi kulkenut 0 km. Tiedämme siis, että todellinen kuljettu matka on jossain nollan ja 110 kilometrin välillä.

Tarkempi arvio saadaan, kun tarkastellaan aikaväliä osissa. Oletetaan esimerkiksi, että ensimmäisen puolen tunnin aikana bussin maksiminopeus oli vain 100 km/h ja miniminopeus 0 km/h. Toisen puolen tunnin aikana maksimi- ja miniminopeudet olivat vastaavasti 110 km/h ja 40 km/h. Nyt voimme arvioida, että ensimmäisellä osalla edettiin enintään $100 \cdot 1/2 = 50$ km ja vähintään $0 \cdot 1/2 = 0$ km, sekä toisella osalla enintään $110 \cdot 1/2 = 55$ km ja vähintään $40 \cdot 1/2 = 20$ km. Kun nämä lasketaan yhteen, voidaan todeta, että tunnin aikana edettiin yhteensä enintään $50 + 55 = 105$ km ja vähintään $0 + 20 = 20$ km, mikä on jo alkuperäistä parempi arvio. Vielä tarkempi arvio saadaan, jos pilkotaan aikaväli esimerkiksi 4 osaan ja tehdään vastaavanlainen arvio. Tällöin voitaisiin saada esimerkiksi seuraavan taulukon mukainen tulos:

aikaväli	nopeus max	nopeus min	matka max	matka min
0-15 min	40 km/h	0 km/h	10 km	0 km
15-30 min	100 km/h	40 km/h	25 km	10 km
30-45 min	86 km/h	40 km/h	21,5 km	10 km
45-60 min	110 km/h	76 km/h	27,5 km	19 km
yhteensä	—	—	84 km	39 km





Tarkastelusta huomataan, että mitä pienempiin osiin pilkomme aikavälin, sitä tarkemman arvion saamme auton kulkemalle matkalle. Tarkimman arvion saamiseksi voisimme tarkastella raja-arvoa osavälien pituuden lähestyessä nollaa.

Esimerkin tarkastelu voidaan suorittaa minkä tahansa jatkuvan funktion kohdalla, ei ainoastaan sellaisen, joka kuvaa nopeutta. Saatuja ylä- ja ala-arvioita kutsutaan funktion *ylä- ja alasummiksi* ja näiden raja-arvoa funktion *integraaliksi*. Integraali kuvaa funktion *kertymää* tietyllä välillä. Jos funktio kuvaa jonkin suureen muutosnopeutta, integraali kertoo suureen arvon kokonaismuutoksen.

Määritelmä 5.1. Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio. Jaetaan väli tasaisesti korkeintaan h:n pituisiin suljettuihin osaväleihin. (Jos jako ei mene tasan, annetaan oikeanpuoleisimman osavälin olla lyhyempi kuin muut.) Valitaan jokaisella osavälillä funktion suurin arvo, kerrotaan se välin pituudella ja lasketaan näin saadut arvot yhteen. Kutsutaan saatua summaa funktion *yläsummaksi välillä* $[a, b]$ ja merkitään tätä S_h. Funktiolla on varmasti jokaisella osavälillä suurin arvo lauseen **??** nojalla.

Valitaan samoin jokaisella osavälillä pienin arvo, kerrotaan se välin pituudella ja lasketaan tulokset yhteen. Kutsutaan tätä summaa funktion *alasummaksi välillä* $[a, b]$ ja merkitään sitä s_h.

Funktion f *integraali välillä* $[a, b]$ on yläsumman ja alasumman raja-arvo osavälin pituuden h lähestyessä nollaa:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h \to 0} S_h = \lim_{h \to 0} s_h.$$

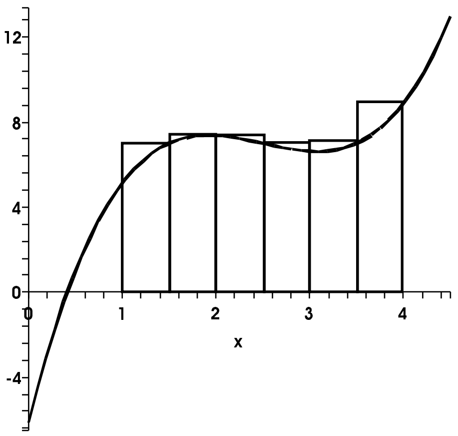
Tämä raja-arvo on aina olemassa, kun f on jatkuva välillä $[a, b]$.

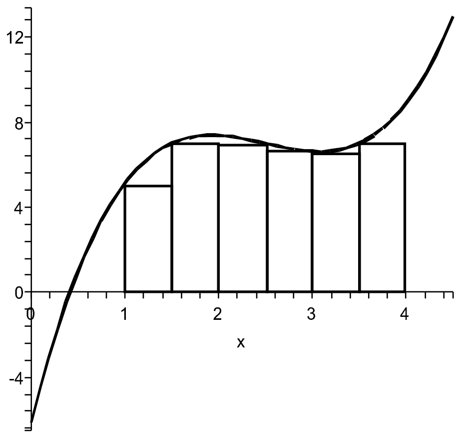
Integraalimerkinnässä integroimisväli merkitään integraalimerkin ylä- ja alapäähän. Termi dx lopettaa integroitavan lausekkeen. Se kertoo, minkä muuttujan suhteen integroitava lauseke on kirjoitettu (voisi olla esim. $\int_a^b 2t^2\,dt$).

Integraalin määritelmässä ei itse asiassa tarvitsisi tarkastella sekä ylä- että alasummia. Integraali voidaan kuitenkin määritellä muillekin kuin jatkuville funktioille, ja jos funktio ei ole jatkuva, voi käydä niin, etteivät ylä- ja alasummat lähesty toisiaan h:n pienetessä. Tällöin sanotaan, että funktio ei ole *integroituva*. Kuitenkin kaikki suljetulla välillä jatkuvat funktiot ovat integroituvia tuolla välillä.

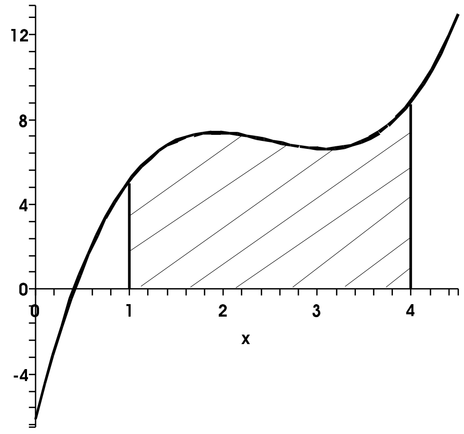
5.2 Integraali kuvaajassa

Ajatellaan integroimisväli jaetuksi tasaisesti osaväleihin. Funktion yläsumma on sellaisten suorakulmioiden pinta-alojen summa, joiden korkeus on jokaisella osavälillä funktion suurin arvo. Alasumma taas koostuu sellaisten suorakulmioiden pinta-aloista, joiden korkeus on joka osavälillä funktion pienin arvo.





Kun osavälin pituutta lyhennetään, lähestyvät funktion suurin ja pienin arvo tuolla välillä toisiaan. (Tämä johtuu funktion jatkuvuudesta: kun muuttuja on sidottu pienelle välille, ei funktion arvokaan voi muuttua paljon.) Siispä myös ylä- ja alasuorakulmioiden huiput kullakin välillä lähestyvät toisiaan ja samalla funktion kuvaajaa, joka on niiden välissä. Kun osavälien pituus lähestyy nollaa, suorakulmioiden huiput kohtaavat ja puristavat funktion arvon väliinsä. Tällöin niiden yhteenlasketun pinta-alan raja-arvo, funktion integraali, vastaa *kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa.*



Huom. Kuten erotusosamäärän lausekkeessa esiintyvä h voi olla negatiivinen, vaikka se kuvaa erään välin "pituutta", voi myös integraali olla negatiivinen, vaikka se tavallaan kuvaakin pinta-alaa. Jos nimittäin funktio on jollain välillä negatiivinen, eli kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, sen suurimmat ja pienimmät arvot tuolla välillä ovat negatiivisia, mistä johtuen myös integraali on negatiivinen.

5.3 Integraalin laskeminen

Integraalin laskeminen suoraan määritelmän avulla on yleensä erittäin vaikeaa (huomattavasti vaikeampaa kuin derivaatan laskeminen erotusosamäärän avulla), joten käytännössä tarvitaan eri tilanteisiin sopivia laskusääntöjä. Koska integrointi on derivoinnille käänteinen toimenpide, myös integroimissäännöt saadaan suoraan derivoimissäännöistä. Apuna käytetään niin kutsuttua *integraalifunktiota.*

Määritelmä 5.2. Jos funktio f on jonkin funktion F derivaatta eli $f = F'$, niin tätä funktiota F kutsutaan f:n *integraalifunktioksi.* (Joskus sanotaan myös, että F on f:n *antiderivaatta*).

Integraalifunktio on derivaattafunktion vastakohta. Funktion integraalifunktion derivaatta on funktio itse, samoin kuin sen derivaatan integraalifunktio. Jos funktio on jatkuva, sillä on aina olemassa integraalifunktio, jopa useita. Jos esimerkiksi $f(x) = 2x$, niin integraalifunktioksi kelpaa yhtä hyvin $F_1(x) = x^2$ kuin $F_2(x) = x^2 + 1$, sillä $Dx^2 = D(x^2 + 1) = 2x$. Funktion eri integraalifunktiot eivät kuitenkaan eroa toisistaan kovin paljon, kuten seuraava lause kertoo.

Lause 5.3. *(Integraalilaskennan peruslause) Olkoon $F_1' = F_2' = f$, eli sekä F_1 että F_2 ovat funktion f integraalifunktioita. Tällöin on olemassa jokin x:stä riippumaton vakio, jolle pätee $F_1(x) = F_2(x) + C$ kaikilla x.*

Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat siis vakion lisäämistä vaille samoja. Integraalifunktiota merkitään usein seuraavasti:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Tässä F on jokin funktion f integraalifunktio. Merkintä on sama kuin integraalilla ilman integroimisväliä, ja joskus integraalifunktiota kutsutaankin *määräämättömäksi integraaliksi*. Vakio C on niin sanottu *integroimisvakio*. Se on merkittävä näkyviin, koska tietyn funktion integraalifunktioon voi aina lisätä minkä tahansa vakion ja se pysyy silti saman funktion integraalifunktiona.

Esimerkki 5.4. Funktion $f(x) = 4x$ eräs integraalifunktio on $F(x) = 2x^2$, koska $D\ 2x^2 = 2 \cdot 2x = 4x$. Voidaan merkitä

$$\int 4x\, dx = 2x^2 + C.$$

Integroimisvakio C voi olla mikä luku tahansa, joten saman funktion integraalifunktioita ovat $2x^2$, $2x^2 + 1$, $2x^2 - 3$, $2x^2 + \pi$, jne.

Integraalifunktion käyttö integroinnissa perustuu seuraavaan lauseeseen.

Lause 5.5. *(Analyysin peruslause) Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio, ja F jokin sen integraalifunktio (eli $F' = f$.) Tällöin*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Usein merkitään

$$\int_a^b f(x)\, dx = \overset{b}{\underset{a}{\Big/}} F(x) = F(b) - F(a).$$

Merkintä $\overset{b}{\underset{a}{\Big/}}$ *lausutaan "sijoitus a:sta b:hen".*

Huom. Vaikka kaikilla funktioilla on useita eri integraalifunktioita, ei ole väliä sillä, mitä niistä käyttää integroinnissa. Tämä johtuu siitä, että sijoituksessa mahdolliset ylimääräiset vakiot supistuvat kuitenkin pois.

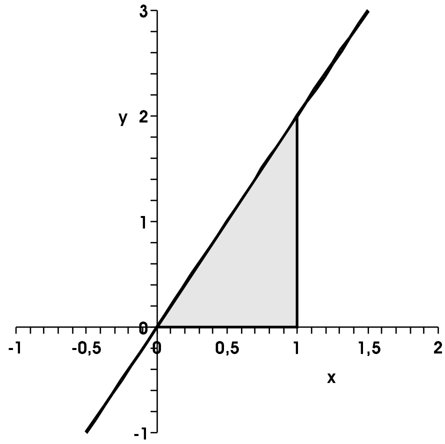
Esimerkki 5.6. Olkoon $f(x) = 2x$. Eräs integraalifunktio on $F(x) = x^2$. Edeltävän lauseen mukaan

$$\int_0^1 2x\, dx = \overset{1}{\underset{0}{\Big/}} x^2 = 1^2 - 0^2 = 1.$$

Toisaalta myös $x^2 + 3$ on f:n integraalifunktio, joten

$$\int_0^1 2x\, dx = \overset{1}{\underset{0}{\Big/}} (x^2 + 3) = (1^2 + 3) - (0^2 + 3) = 1 + 3 - 0 - 3 = 1.$$

Tämän integraalin arvo on kuvan varjostetun kolmion pinta-ala.



5.4 Laskusääntöjä

$$1. \quad \int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$2. \quad \int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$3. \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Kaksi ensimmäistä sääntöä ovat tuttuja jo derivoinnin yhteydestä. Kolmas sääntö sanoo, että integroimisväli voidaan pilkkoa osiin. Tämä on hyödyllistä esimerkiksi silloin, kun funktio on paloittain määritelty ja eri alueissa tarvitaan eri integraalifunktioita.

Esimerkki 5.7. Integroidaan itseisarvofunktiota $f(x) = |x|$ välillä $[-1, 1]$. Lasketaan integraali osissa. Välillä $[-1, 0]$ on $f(x) = -x$, joten integraalifunktioksi voidaan valita $F_1(x) = -\frac{1}{2}x^2$. Toisaalta välillä $[0, 1]$ pätee $f(x) = x$, joten integraalifunktioksi käy $F_2(x) = \frac{1}{2}x^2$. Täten

$$\int_{-1}^1 |x|\,dx = \int_{-1}^0 -x\,dx + \int_0^1 x\,dx = \mathop{\Big/}_{-1}^{0} -\frac{x^2}{2} + \mathop{\Big/}_{0}^{1} \frac{x^2}{2}$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\cdot 0^2 - \left(-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2\right)\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2\right) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 = 1.$$

Funktioiden derivoimissäännöistä saadaan "kääntämällä" suoraan vastaavat integroimissäännöt. Esimerkiksi potenssin integroimissääntö on

$$4. \quad \int_a^b x^k\,dx = \mathop{\Big/}_{a}^{b} \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad \text{kun } k \neq -1.$$

Huom. Potenssitermi integroidaan siis lisäämällä eksponenttiin yksi ja jakamalla lauseke näin syntyneellä uudella eksponentilla. Koska potenssin derivoimissääntö ei toimi, jos eksponentti on nolla, vastaavasti *integroimissääntö ei toimi, kun eksponentti on* -1.

Integroiminen on vaikeampaa kuin derivoiminen, koska tulon, osamäärän tai yhdistetyn funktion integroimiseen ei ole olemassa laskusääntöjä. Yhdistetyn funktion derivoimissäännöstä saadaan kuitenkin seuraava hyödyllinen integroimissääntö:

$$5. \quad \int_a^b f'(g(x))g'(x)\,dx = \mathop{\Big/}_a^b f(g(x)).$$

Esimerkki 5.8. Integroidaan funktiota $h(x) = x(x^2+1)^3$ välillä $[0,1]$. Yritetään saada riippuvuussäännön lauseke laskusäännön 5 vaatimaan muotoon $f'(g(x))g'(x)$. Lauseke täytyisi siis tulkita siten, että siinä on yhdistetty funktio, jonka ulkofunktio on jonkin funktion f derivaatta ja tämä yhdistetty funktio on vielä kerrottu sisäfunktion g derivaatalla.

Lausekkeessa esiintyykin valmiina yhdistetyn funktion lauseke $(x^2+1)^3$. Valitaan siis sisäfunktioksi $g(x) = x^2+1$. Tämä lauseke on vielä kerrottu x:llä, joka on itse asiassa melkein kuin sisäfunktion derivaatta $g'(x) = 2x$. Tulkitaan nyt ulkofunktio erään funktion f derivaataksi eli etsitään jokin f, jolle pätee $f'(x) = x^3$. Voidaan valita esimerkiksi $f(x) = \frac{1}{4}x^4$. Säännön 5 mukaan

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^3\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(g(x))g'(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\mathop{\Big/}_0^1 f(g(x)) = \frac{1}{2}\mathop{\Big/}_0^1 f(x^2+1) = \frac{1}{2}\mathop{\Big/}_0^1 \frac{1}{4}(x^2+1)^4 \\
&= \frac{1}{8}\left[(1^2+1)^4 - (0^2+1)^4\right] = \frac{1}{8}(16-1) = \frac{15}{8}.
\end{aligned}$$

Huomaa, miten integraaliin lisättiin aluksi sisäfunktion derivaatan vaatima kerroin 2. Samalla koko integraali piti kertoa puolikkaalla. Tällä tavoin voidaan korvata mikä tahansa vakiokertoimen puuttuminen sisäfunktion derivaatasta. Sen sijaan esimerkiksi lauseketta $x(x^3+1)^3$ ei voisi saada säännön vaatimaan muotoon, koska sisäfunktion derivaatta on $3x^2$, ja ulkopuolella on kertoimena vain x. Toista potenssia sille ei mitenkään voida lisätä.

5.5 Sovelluksia

Integraalilla voidaan laskea jonkin suureen kertymää esimerkiksi ajan suhteen.

Esimerkki 5.9. Metsän kasvit käyttävät auringonpaisteesta saamaansa energiaa. Energian mittausta varten metsään on asetettu mittalaitteita, jotka mittaavat auringonpaisteen tehoa eli energiavuota. Mitä kirkkaampi paiste, sitä suurempi mittalaitteen lukema. Erään tällaisen mittalaitteen lukema noudatti aikavälillä $[12,13]$ melko tarkasti funktiota $P(t) = -3{,}6t^2 + 94t - 500$ (kJ/h). Tällä aikavälillä laitteen vastaanottama energia on energiavuon kertymä, joten se saadaan integroimalla:

$$
\begin{aligned}
E &= \int_{12}^{13} -3{,}6t^2 + 94t - 500\,dt = \Big/_{12}^{13} \left(-1{,}2t^3 + 47t^2 - 500t\right) \\
&= \left(-1{,}2 \cdot 13^3 + 47 \cdot 13^2 - 500 \cdot 13\right) - \left(-1{,}2 \cdot 12^3 + 47 \cdot 12^2 - 500 \cdot 12\right) \approx 110 \text{ (kJ)}.
\end{aligned}
$$

Tämän tuloksen tarkkuus riippuu tietenkin siitä, miten tarkkaan funktio $P(t)$ todella approksimoi auringonpaisteen tehoa.

Integrointia voidaan käyttää myös apuna, kun ratkaistaan yhtälöitä, joissa esiintyy tuntemattoman suureen derivaatta. Näihin niin kutsuttuihin differentiaaliyhtälöihin tutustutaan tarkemmin myöhemmin.

Esimerkki 5.10. Eräässä kasvustossa bakteerien lisääntymisnopeus kasvoi suorassa suhteessa aikaan. Kasvuston massan avulla ilmoitettuna lisääntymisnopeus ajanhetkellä t oli $5 \cdot t$ mg/h. Jos $m(t)$ kuvaa bakteerien määrää ajanhetkellä t, niin lisääntymisnopeutta kuvaa määrän derivaatta $m'(t)$. Kuvatussa tilanteessa siis

$$m'(t) = 5t.$$

Alussa kasvuston koko oli $m(0) = 3$ mg.

Koska lisääntymisnopeus on määrän derivaatta, niin määrä on puolestaan lisääntymisnopeuden integraalifunktio. Integroimalla saadaan

$$m(t) = \int m'(t)\,dt = \int 5t\,dt = \frac{5t^2}{2} + C.$$

Koska alussa bakteereja oli 3 mg, tiedetään lisäksi, että

$$m(0) = 3 \iff \frac{5 \cdot 0^2}{2} + C = 3,$$

eli $C = 3$. Bakteerien määrää kuvaa siis funktio $m(t) = 5t^2/2 + 3$ (mg).

Integraalia voidaan myös käyttää geometrisenä työkaluna, koska se kertoo kuvaajan ja x-akselin välisen pinta-alan.

Esimerkki 5.11. Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3$. Mikä on tämän funktion kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[-1, 1]$?

Ensin on muistettava, että integraali ei itse asiassa välttämättä kuvaa todellista pinta-alaa, koska se on negatiivinen siellä, missä integroitva funktio on negatiivinen. (Pinta-ala sen sijaan on aina positiivinen.) Ensin on siis tutkittava hieman funktiota f, jolloin saadaan selville, että f on negatiivinen välillä $[-1, 0[$. Pinta-alan laskemiseksi on siis jaettava väli kahteen osaan: $[0, 1]$ ja $[-1, 0]$. Integraalit näiden välien yli ovat

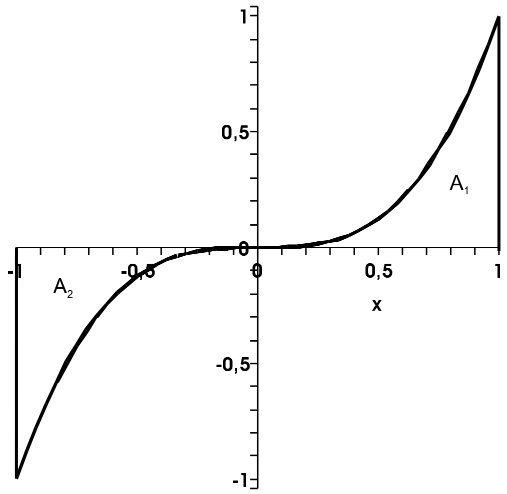
$$I_1 = \int_0^1 x^3\,dx = \Big/_0^1 \frac{x^4}{4} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4},$$

ja

$$I_2 = \int_{-1}^0 x^3\,dx = \Big/_{-1}^0 \frac{x^4}{4} = \left(0 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Jälkimmäinen integraali on negatiivinen, kuten pitikin olla. Pinta-ala saadaan nyt laskemalla yhteen nämä integraalit, kunhan jälkimmäisen etumerkki vaihdetaan:

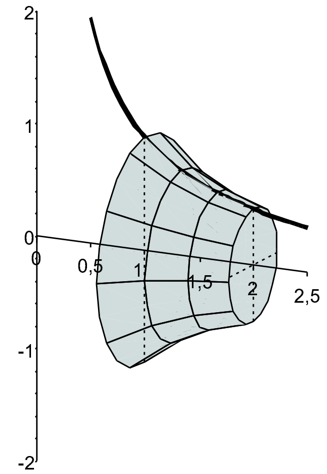
$$A = I_1 + (-I_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$



Esimerkki 5.12. Tutkitaan pyörähdyskappaletta, joka syntyy, kun jonkin funktion f kuvaaja pyörähtää syvyyssuunnassa x-akselin ympäri ja näin saadun pinnan sisään jäävä tila vielä "katkaistaan päistä" kahdella x-akseliin nähden kohtisuorassa olevalla tasolla kohdissa a ja b. Ollaan siis tavallaan "sorvattu" a:n ja b:n välillä olevasta palikasta pyörähdyskappale funktion f kuvaajan muotoisella terällä.

Tietyssä kohdassa x mainitun pyörähdyskappaleen poikkileikkaus on ympyrä, jonka säde on $f(x)$. Ympyrän alan kaava on πr^2, joten pyörähdyskappaleen poikkipinta-ala tuossa kohdassa on $\pi f(x)^2$. Kappaleen tilavuus saadaan poikkipinta-alan kertymänä välillä $[a, b]$ eli integroimalla $\pi f(x)^2$ a:sta b:hen. Otetaan esimerkiksi selville funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ kuvaajan välille [1,2] muodostaman pyörähdyskappaleen tilavuus:

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \pi f(x)^2 \, dx = \int_1^2 \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2} \, dx \\ &= \pi \int_1^2 x^{-2} \, dx = \pi \Big/_{1}^{2} -x^{-1} = \pi \Big/_{1}^{2} \left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= \pi \left(-\frac{1}{2} - (-1)\right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



5.6 Epäjatkuvan funktion integraalista

Integraali voidaan helposti yleistää koskemaan myös epäjatkuvia funktioita. Määritelmää täytyy oikeastaan muuttaa vain kahdessa kohdassa. Ensinnäkin epäjatkuva funktio ei välttämättä saavuta pienintä tai suurinta arvoa suljetulla välillä. Tämä voidaan kuitenkin helposti korvata käyttämällä suurimman arvon sijasta niin kutsuttua pienintä ylärajaa ja pienimmän arvon sijasta suurinta alarajaa. Nämä ovat olemassa, mikäli funktio on rajoitettu (eli ei saa mielivaltaisen suuria tai pieniä arvoja). Toinen ongelma on se, etteivät funktion yläsumma ja alasumma välttämättä lähesty samaa lukua osaväliä lyhennettäessä. Tällöin funktio ei ole integroituva. Lisäksi täytyy sallia muutkin kuin tasaiset osavälijaot, koska joidenkin epäjatkuvien funktioiden ylä- ja alasummat lähestyvät toisiaan vain, jos jako ei ole tasainen.

Myös integraalifunktion käsite aiheuttaa ongelmia. Lähes kaikki derivaatat ovat jatkuvia, joten useimmilla epäjatkuvilla funktioilla ei ole integraalifunktiota. Integraalit on silloin laskettava muulla tavalla. Toisaalta voi myös käydä niin, että integraalifunktio on kyllä olemassa, mutta funktio ei olekaan integroituva. Epäjatkuvien funktioiden kanssa täytyy siis olla joka suhteessa tarkkana, mutta usein integrointi kuitenkin onnistuu helposti, kuten seuraavan esimerkin tapauksessa.

Esimerkki 5.13. Ennen kuin auringonpaistetta mittaavat laitteet vietiin metsään, niitä testattiin laboratoriossa. Laite asetettiin kirkkaan lampun alle kymmeneksi sekunniksi, ja viiden sekunnin kohdalla valo katkaistiin. Mittalaite kuitenkin rekisteröi vielä huoneen ikkunoista tulevan valon.

Olkoon mittalaitteen $P : [0, 10] \to \mathbb{R}$ mittalaitteen lukema ajan funktiona. Tällöin

$$P(t) = \begin{cases} 100, \text{ kun } 0 \le t \le 5 \\ 20, \text{ kun } 5 < t \le 10 \end{cases} \quad \text{(J/s)}.$$

Funktio P on epäjatkuva eikä se ole minkään funktion derivaatta. Sillä ei siis ole integraalifunktiota. Se on kuitenkin integroituva, ja sen integraalille pätevät kaikki samat laskusäännöt kuin jatkuvassakin tapauksessa. Voimme siis integroida sen erikseen väleillä $[0, 5]$ ja $[5, 10]$ (laskusääntö 3). Kummallakin osalla funktio on jatkuva ja sillä on integraalifunktio, joten

$$\begin{aligned}\int_0^{10} P(t)\,dt &= \int_0^5 P(t)\,dt + \int_5^{10} P(t)\,dt = \int_0^5 100\,dt + \int_5^{10} 20\,dt \\ &= \Big/_{0}^{5}\, 100t + \Big/_{5}^{10}\, 20t = (500-0) + (200-100) = 600 \text{ (kJ)}.\end{aligned}$$

(Jos ollaan tarkkoja, suljetulla välillä $[5, 10]$ funktio ei ole jatkuva, koska päätepisteessä arvo on $f(5) = 100$. Integraalin suuruus ei kuitenkaan riipu arvoista päätepisteissä.)