4 Derivaatta

4.1 Derivaatan määritelmä

Monien funktioiden kuvaajilla on sellainen selkeä ominaisuus, että ne näyttävät etenevän välillä ylös-, välillä alaspäin, välillä jyrkemmin, välillä loivemmin. Tämä on merkki siitä, että funktion arvot välillä kasvavat ja välillä vähenevät. Paikassa, jossa kasvaminen vaihtuu vähenemiseksi, on yleensä jonkinlainen huippukohta. On ilmeistä, että tällaiset ominaisuudet voivat olla kiinnostavia. Jos funktio esimerkiksi kuvaa lämpötilaa ajan funktiona, voimme olla kiinnostuneita lämpenemisen tai jäähtymisen nopeudesta jollain tietyllä hetkellä. Toisinaan puolestaan saattaa olla tärkeää, millä hetkellä lämpötila saavuttaa huippuarvonsa.

Funktion *hetkellistä muutosnopeutta* (eli kuvaajan jyrkkyyttä) tietyssä kohdassa kuvaa funktion *derivaatta*. Tällaisen muutosnopeuden määrittelemisessä törmätään kuitenkin heti ongelmaan. Kahdesta funktion arvosta on helppo sanoa, kumpi on suurempi, mutta jos tarkastellaan vain yhtä funktion arvoa (eli yhtä pistettä kuvaajalla) on kasvusta tai vähenemisestä mahdotonta puhua. Tarvitaan lisätietoa tuon pisteen läheisyydessä saatavista arvoista, mikä puolestaan johtaa raja-arvon käyttöön.

Fysiikassa nopeus (oikeammin keskinopeus) määritellään kuljetun matkan suhteena siihen käytettyyn aikaan (siis nopeus on matka jaettuna ajalla). Samaan tapaan määritellään myös funktion muutosnopeus. Jos x ja x_1 ovat kaksi eri funktion määrittelyjoukon lukua, määritellään niin sanottu *erotusosamäärä* seuraavalla kaavalla:

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Erotusosamäärä on siis funktion arvojen muutoksen suhde muuttujan arvojen muutokseen välillä $[x, x_1]$ (tai välillä $[x_1, x]$, jos $x_1 < x$), ja se kuvaa funktion keskimääräistä muutosnopeutta kyseisellä välillä. Tavoitteena on nyt kuvata funktion muutosnopeutta lähellä pistettä x (x_1 on eräänlainen apupiste), ja tätä varten merkitään välin pituutta $h = x_1 - x$, jolloin $x_1 = x + h$ ja erotusosamäärän lauseke saadaan käyttökelpoisempaan muotoon:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Tämä on siis funktion keskimääräinen muutosnopeus välillä $[x, x+h]$ tai $[x+h, x]$, riippuen siitä, onko h positiivinen vai negatiivinen.

Mitä lähemmäs nollaa erotusosamäärän lausekkeen (positiivinen tai negatiivinen) h tulee, sitä tarkemmin erotusosamäärä kuvaa funktion muutosnopeutta pisteen x lähellä. Muutosnopeus pisteessä x voidaan siksi määritellä ottamalla erotusosamäärästä raja-arvo h:n lähestyessä nollaa. Tätä raja-arvoa ei kuitenkaan välttämättä ole olemassa. Jos funktio on esimerkiksi epäjatkuva jossain pisteessä, sen arvo muuttuu tuossa pisteessä äkisti — ikään kuin äärettömän nopeasti — ja funktion muutosnopeutta ei voida määritellä.

Määritelmä 4.1. Funktio f on *derivoituva pisteessä* x, jos erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on olemassa. Tätä raja-arvoa merkitään $f'(x)$, $Df(x)$ tai $\frac{df}{dx}(x)$, ja kutsutaan funktion f *derivaataksi* pisteessä x. Funktio on *derivoituva*, jos se on derivoituva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä.

Derivaatta kuvaa siis funktion hetkellistä muutosnopeutta. Jos funktio kuvaa kuljettua matkaa ajan funktiona, erotusosamäärä jollain välillä kuvaa keskinopeutta tuolla välillä. Derivaatta jossain pisteessä sen sijaan kuvaa hetkellistä nopeutta tuossa pisteessä. Jos taas funktio kuvaa nopeutta, derivaatta kuvaa kiihtyvyyttä; jos funktio kuvaa lämpötilaa ajan funktiona, derivaatta kuvaa lämpenemis- tai jäähtymisnopeutta.

Funktion f derivaatan arvot eri pisteissä muodostavat derivaattafunktion f'. Derivaattafunktion määrittelyjoukko ovat ne pisteet, joissa derivaatta voidaan määritellä eli alkuperäinen funktio f on derivoituva. Derivaattafunktion määrittämistä kutsutaan funktion *derivoimiseksi*. Derivaattafunktio f' voidaan derivoida uudestaan, jolloin saadaan korkeampia derivaattoja f'', f''' jne. Jos derivaattafunktio f' on annettu, alkuperäisen funktion f selvittämistä kutsutaan *integroinniksi*. Tästä lisää myöhemmin.

Esimerkki 4.2. Tarkastellaan polynomifunktiota $f(x) = x^2$ pisteen $x = 2$ ympärillä. Lasketaan aluksi funktion keskimääräinen muutosnopeus välillä $[2, 3]$:

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{9 - 4}{1} = 5.$$

Toisaalta muutosnopeus välillä $[1, 2]$ on

$$\frac{f(1) - f(2)}{1 - 2} = \frac{1 - 4}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

(Huomaa, että tulosten kannalta ei ole väliä, kummin päin erotukset osoittajassa ja nimittäjässä kirjoitetaan, kunhan ne ovat molemmissa samoin päin.) Tuloksista nähdään, että funktio kasvaa hieman nopeammin välillä $[2, 3]$ kuin välillä $[1, 2]$.

Lasketaan sitten toisen lausekkeen avulla erotusosamäärä, kun tarkasteluvälin pituus on h:

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{(2 + h)^2 - 2^2}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h}.$$

Koska h kuvaa kahden eri luvun erotusta, se ei voi olla nolla. Voidaan siis supistaa saatu lauseke h:lla:

$$\frac{4h + h^2}{h} = \frac{\frac{4h}{h} + \frac{h^2}{h}}{\frac{h}{h}} = \frac{4h + h}{1} = 4 + h.$$

Erotusosamäärä riippuu siis h:sta. Jos sijoitetaan $h = 1$, saadaan muutosnopeus välillä $[2, 2 + h] = [2, 3]$, joka laskettiin jo edellä. Jos taas sijoitetaan $h = -1$, saadaan muutosnopeus välillä $[2 + h, 2] = [1, 2]$. Funktion derivaatta on erotusosamäärän raja-arvo, kun h lähestyy nollaa, eli

$$\lim_{h \to 0} (4 + h) = 4.$$

Funktiolla on siis pisteessä 2 derivaatta $f'(2) = 4$.

Esimerkki 4.3. Tarkastellaan funktiota $f(x) = |x|$ (itseisarvo) pisteessä $x = 0$. Kirjoitetaan erotusosamäärä pisteessä 0, kun merkitään tarkasteluvälin pituutta h:lla. Kun $h > 0$, niin $|h| = h$, jolloin erotusosamäärä on

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{|h| - |0|}{h} = \frac{h - 0}{h} = 1.$$

Toisaalta, kun $h < 0$, niin $|h| = -h$, jolloin erotusosamäärä on

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h| - |0|}{h} = \frac{-h - 0}{h} = -1.$$

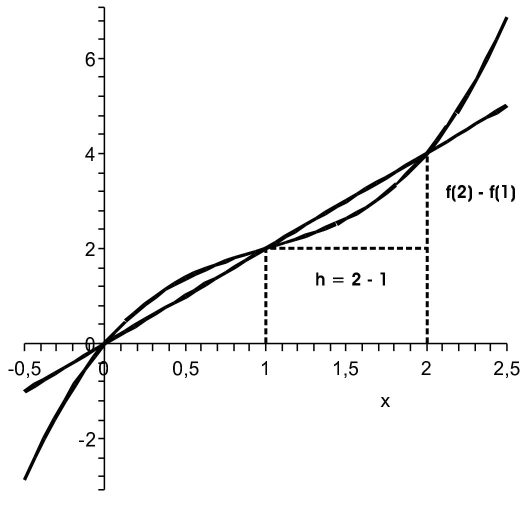
Erotusosamäärän arvo on 1, kun h on positiivinen, ja -1, kun h on negatiivinen. Tämä pätee, oli h miten lähellä nollaa tahansa (paitsi tietysti silloin kun $h = 0$). Erotusosamäärällä ei siis voi olla raja-arvoa h:n lähestyessä nollaa, joten itseisarvo ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$.

Jos funktiolla on epäjatkuvuuskohta (eli määrittelyjoukon piste, jossa funktio ei ole jatkuva), siinä kohdassa funktion muutosnopeutta ei voida määrittää.

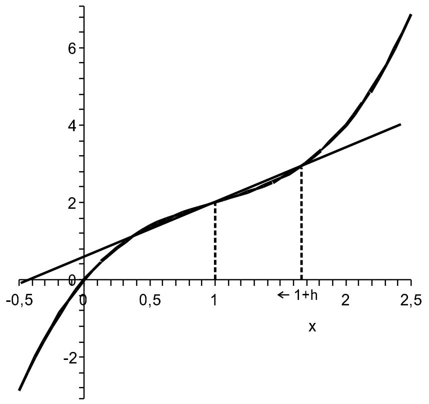
Lause 4.4. *Jos funktio on derivoituva pisteessä x, se on myös jatkuva pisteessä x.*

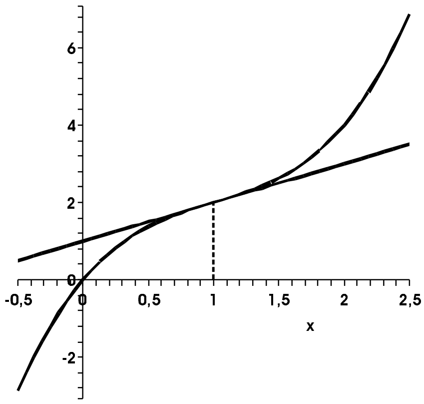
Epäjatkuva funktio ei siis voi olla derivoituva.

4.2 Derivaatta kuvaajassa



Tarkastellaan oheista kuvaa, johon on piirretty erään derivoituvan funktion f kuvaaja. Kuvassa on lisäksi suora, joka leikkaa kuvaajaa pisteissä, joiden x-koordinaatit ovat 1 ja 2. Tällaisen suoran kulmakerroin on $(f(2) - f(1))/(2 - 1)$, joka on itse asiassa erotusosamäärän arvo välillä $[1, 2]$. Tämä kulmakerroin kertoo siis funktion keskimääräisen muutosnopeuden tuolla välillä. Erotusosamäärän nimittäjä h vastaa toisen leikkauspisteen x-koordinaatin etäisyyttä ensimmäisen leikkauspisteen x-koordinaatista. Pitämällä ensimmäinen leikkauspiste paikallaan ja pienentämällä arvoa h saadaan toinen leikkauspiste lähestymään ensimmäistä. Tällöin suora kääntyy kuvaajan suuntaiseksi.



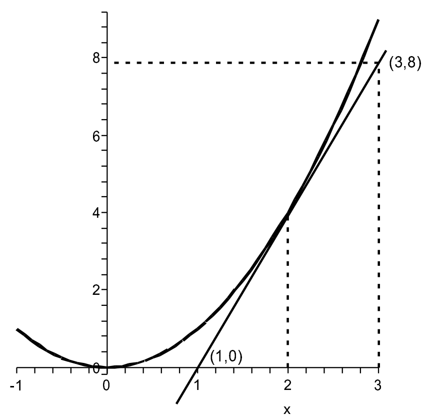


Erotusosamäärän raja-arvo eli derivaatta pisteessä x on siis tuohon pisteeseen kuvaajalle piirretyn *sivuajan eli tangentin* kulmakerroin. (Älä sekoita trigonometrian tangenttifunktioon.)

Esimerkki 4.5. Arvioidaan aikaisemman esimerkin funktion $f(x) = x^2$ derivaattaa pisteessä $x = 2$ kuvaajan avulla. Koska derivaatta on kyseiseen pisteeseen piirretyn sivuajan kulmakerroin, hahmotellaan ensin kuvaajalle sivuaja. Asetetaan siis viivain kuvaajalle sen pisteen kohdalle, jonka x-koordinaatti on 2 siten, että se on suunnilleen kuvaajan suuntainen, ja piirretään suora. Tämän jälkeen valitaan sivuajalta kaksi pistettä, jotta sen kulmakerroin voidaan määrittää. Kuvan mukaan pisteet ovat $(1, 0)$ ja $(3, 8)$, joten kulmakertoimeksi saadaan

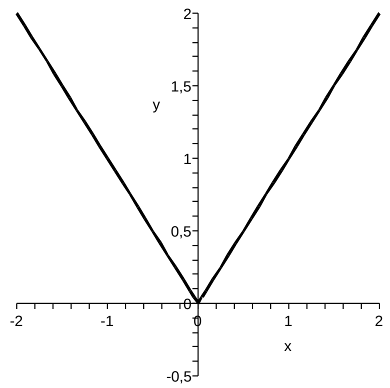
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 0}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4.$$

Aikaisemmin laskettiinkin, että funktion derivaatta tuossa pisteessä on 4.



Graafinen tarkastelu osoittautuu tärkeäksi silloin, kun funktion riippuvuussäännölle ei voida muodostaa mitään lauseketta, tai kun tätä lauseketta ei syystä tai toisesta osata derivoida. Jos funktion arvoja tunnetaan niin paljon, että niiden avulla voidaan piirtää kuvaaja, voidaan sen avulla määrittää likimääräinen derivaatta.

Jos funktion kuvaajaan muodostuu jossain kohtaa terävä kärki, siihen ei voi piirtää yksikäsitteistä sivuajaa. Tällöin funktio ei ole derivoituva. Itseisarvofunktiota tarkasteltaessa huomattiin, että se ei ole derivoituva nollassa, ja kuvaajassa näkyykin terävä kärki origon kohdalla. Funktio ei myöskään ole derivoituva pisteessä, jossa kuvaaja katkeaa, koska se ei ole sellaisessa kohdassa jatkuva.



4.3 Laskusääntöjä

Funktion riippuvuussäännön lausekkeesta voidaan yleensä suoraan päätellä funktion derivaatan riippuvuussääntö, ilman että tarvitsee palata derivaatan määritelmään. Jos jo tunnetaan funktioiden f ja g derivaatat, seuraavien sääntöjen avulla voi päätellä myös näiden summan, erotuksen, tulon ja osamäärän derivaatat. Huomaa erityisesti, miten kahden funktion tulo ja osamäärä derivoidaan.

1. $D(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$
2. $D(cf(x)) = cf'(x)$, jos c on vakio
3. $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $D\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Näitä sääntöjä sovellettaessa täytyy kuitenkin ensin varmistaa, että kyseiset funktiot on määritelty ja että ne ovat derivoituvia halutussa kohdassa. Sääntö 4 esimerkiksi vaatii, että $g(x) \neq 0$.

Ennen kuin esitellään muita sääntöjä, palautetaan mieleen negatiivisten potenssien ja murtolukupotenssien määritelmät. Olkoon k kokonaisluku, ja $x \neq 0$. Tällöin

$$x^k = \begin{cases} \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{k}, \text{ jos } k > 0, \\ 1, \text{ jos } k = 0, \\ \dfrac{1}{x^{|k|}}, \text{ jos } k < 0. \end{cases}$$

Lisäksi $0^k = 0$ aina, kun $k \neq 0$. Sen sijaan 0^0 ei ole määritelty. Tämän mukaan esimerkiksi $2^{-3} = 1/2^3 = 1/8$.

Olkoot sitten p, q kokonaislukuja, $q > 0$. Tällöin

$$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p.$$

Esimerkiksi $x^{1/2} = \sqrt{x}$. Muista, ettei parillinen juuri ole määritelty negatiivisille luvuille ja että parillinen juuri määritellään aina positiiviseksi. (Esimerkiksi $\sqrt{-4}$ ei ole määritelty, ja $\sqrt{4} = 2$, vaikka sekä $2^2 = 4$ että $(-2)^2 = 4$).

Nyt voidaan määritellään potensseja koskevat derivointisäännöt.

5. $D\ c = 0$, jos c on vakio
6. $D\ x^k = kx^{k-1}$, jos $k \neq 0$.

Potenssit derivoidaan siis niin, että otetaan eksponentti kertoimeksi ja vähennetään sen jälkeen eksponentista 1. Huomaa ero vakiokertoimen ja vakiofunktion eli sääntöjen 2 ja 5 välillä. Vakiofunktio häviää derivoitaessa, mutta vakiokerroin säilyy sellaisenaan. Siis esimerkiksi $D\ 3 = 0$, mutta $D\ 3x^2 = 3 \cdot Dx^2$.

Esimerkki 4.6. Derivoidaan polynomifunktio:

$$D(x^2 + 2x - 3) = Dx^2 + 2Dx - D\ 3 = 2x^1 + 2x^0 - 0 = 2x + 2.$$

Derivoidaan seuraavaksi erään rationaalifunktion lauseke. Muuttujana on tällä kertaa vaihtelun vuoksi t, mutta kirjaimen valinnalla ei ole tietenkään tässäkään yhteydessä mitään merkitystä laskujen kannalta. Tässä on käytettävä osamäärän derivointisääntöä 4:

$$\begin{aligned} D\frac{t^2 - 3t}{t + 1} &= \frac{D(t^2 - 3t) \cdot (t + 1) - (t^2 - 3t) \cdot D(t + 1)}{(t + 1)^2} \\ &= \frac{(2t - 3)(t + 1) - (t^2 - 3t)(1 + 0)}{(t + 1)^2} \\ &= \frac{(2t^2 + 2t - 3t - 3) - (t^2 - 3t)}{(t + 1)^2} = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t + 1)^2}. \end{aligned}$$

Derivoidaan vielä eräs juurifunktio. Juuret kannattaa aina derivoitaessa kirjoittaa potenssien avulla. Tässä tapauksessa käytetään myös negatiivista potenssia, jotta päästään eroon jakolaskusta:

$$\begin{aligned} D\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}} &= D\ \frac{1}{x^{1/3}} = D\left(x^{-1/3}\right) = -\frac{1}{3}x^{-1/3-1} \\ &= -\frac{1}{3}x^{-4/3} = -\frac{1}{3x^{4/3}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}. \end{aligned}$$

Viimeinen sääntö koskee yhdistettyjä funktioita.

7. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Yhdistetyn funktion derivaatta pisteessä x saadaan siis laskemalla ulkofunktion derivaatta pisteessä $g(x)$ ja kertomalla se sisäfunktion derivaatalla pisteessä x. Kuulostaa monimutkaiselta, mutta idea on se, että ensin derivoidaan ulkofunktio välittämättä siitä, mitä funktion sisällä on. Sen jälkeen derivoidaan sisäfunktio ja nämä tulokset kerrotaan keskenään.

Esimerkki 4.7. Derivoidaan funktio $h(x) = (2x + 1)^6$. Tämä on kuudennen asteen polynomi, mutta potenssien derivointisäännnön käyttämiseksi täytyisi lausekkeesta ensin kertoa sulut auki eli laskea $(2x+1)(2x+1)(2x+1)(2x+1)(2x+1)(2x+1)$. Tulkitsemalla funktio h sopivalla tavalla yhdistetyksi funktioksi $f \circ g$, vältytään tältä (suurehkolta) vaivalta.

Valitaan ulkofunktioksi $f(x) = x^6$ ja sisäfunktioksi $g(x) = 2x + 1$. Tällöin $h = f \circ g$. Toisaalta $f'(x) = 6x^5$ ja $g'(x) = 2$, joten yhdistetyn funktion derivaatta on

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = f'(2x + 1)g'(x) = 6(2x + 1)^5 \cdot 2 = 12(2x + 1)^5.$$

Tämä voidaan tehdä myös ilman, että sisä- ja ulkofunktiota merkitään erikseen omilla kirjaimillaan. Pidetään vain mielessä, että “ulko-osa on jotain potenssiin 6” ja “sisäosa on 2 kertaa x plus 1”. Ensin derivoidaan vain ulko-osa sisäosasta välittämättä. Se jotain, mikä on sisäosassa, pysyy siis koskemattomana (vertaa kaavaan). Näin saadaan

$$(\text{“jotain”})^6 \quad \rightsquigarrow \quad 6(\text{“jotain”})^5.$$

Tähän sijoitetaan paikalleen sisäosa ja kerrotaan sisäosan derivaatalla, jolloin saadaan:

$$6(\text{“jotain”})^5 \cdot 2 = 12(2x + 1)^5.$$

Lyhyesti siis

$$D(2x + 1)^6 = 6(2x + 1)^5 \cdot 2 = 12(2x + 1)^5.$$

4.4 Ääriarvotehtävät

Derivaatan avulla voidaan tutkia funktion kasvua ja vähenemistä sekä funktion saamia *ääriarvoja*. Määritellään ensin näihin liittyviä käsitteitä.

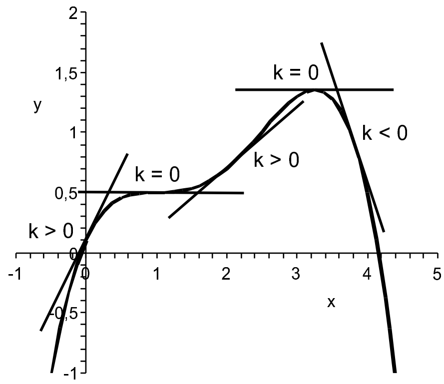
Määritelmä 4.8. Funktio f on *kasvava välillä* $[a, b]$, jos kaikilla pisteillä $x < y$ välillä $[a, b]$ pätee $f(x) \leq f(y)$. Jos lisäksi pätee $f(x) < f(y)$, sanotaan, että funktio on *aidosti kasvava* kyseisellä välillä.

Vastaavasti määritellään *vähenevä* ja *aidosti vähenevä* funktio.

Määritelmä 4.9. Funktiolla f on pisteessä x_0 *paikallinen* eli *lokaali maksimi*, jos pätee $f(x_0) \geq f(x)$ kaikilla pisteillä x jossain pisteen x_0 ympäristössä. Tämä arvo on *funktion suurin arvo*, jos pätee $f(x_0) \geq f(x)$ kaikilla määrittelyjoukon pisteillä x.

Vastaavasti määritellään *paikallinen minimi* ja *funktion pienin arvo*. Minimejä ja maksimeja kutsutaan funktion *ääriarvoiksi*. Huomaa, että vakiofunktiolla on jokaisessa pisteessä sekä suurin että pienin arvo.

Kasvavuuden, vähenevyyden ja ääriarvojen käsitteitä voi käyttää minkä hyvänsä funktion yhteydessä. Kuitenkin silloin, kun funktio on derivoituva, sen kuvaajalle piirretyn sivuajan kulmakerroin kertoo funktion muutosnopeuden. Siellä, missä funktio kasvaa, kulmakerroin on positiivinen ja siellä, missä funktio vähenee, negatiivinen. Kohta, jossa kasvu vaihtuu vähenemiseksi tai päinvastoin, funktiolla on joko minimi tai maksimi. Tällaisessa kohdassa sivuajan kulmakerroin on nolla.



Puetaan seuraavaksi nämä havainnot lauseiksi. Ensimmäinen seuraa suoraan derivaatan määritelmästä (ei todisteta tässä).

Lause 4.10. *Jos derivoituvalla funktiolla on paikallinen ääriarvo pisteessä x_0, niin $f'(x_0) = 0$.*

Huom. Tämä lause sanoo, että maksimi- ja minimikohdissa derivaatta on nolla. Tämä ei kuitenkaan päde toisin päin, eli *kaikki derivaatan nollakohdat eivät välttämättä ole ääriarvoja.*

Seuraavat lauseet seuraavat niin kutsutusta väliarvolauseesta.

Lause 4.11. *Jos $f'(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$, niin funktio f on kasvava kyseisellä välilllä. Jos lisäksi $f'(x) = 0$ vain välin yksittäisissä pisteissä, niin f on aidosti kasvava tuolla välillä.*

Vastaava pätee myös negatiiviselle derivaatalle.

Lause 4.12. *Jos $f'(x) \leq 0$ välillä $[a, b]$, niin funktio f on vähenevä kyseisellä välilllä. Jos lisäksi $f'(x) = 0$ vain välin yksittäisissä pisteissä, niin f on aidosti vähenevä tuolla välillä.*

Edellisissä lauseissa sanonta "yksittäisissä pisteissä" tarkoittaa, että ei ole olemassa kokonaista väliä $[a, b]$, jolla derivaatta olisi nolla, vaan ainoastaan erillisiä pisteitä.

Esimerkki 4.13. Tarkastellaan 4. asteen polynomifunktiota $f(x) = 3x^4 + 4x^3$. Tutkitaan, missä se on kasvava ja missä vähenevä, sekä minkälaisia ääriarvoja sillä on. Tätä varten lasketaan ensin funktion derivaatta:

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 + 4 \cdot 3x^4 = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x + 1).$$

Derivaatan nollakohdat saadaan helposti tulon nollasäännön avulla:

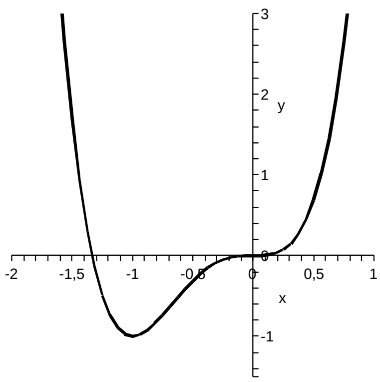
$$f'(x) = 0 \iff 12x^2(x+1) = 0 \iff 12x^2 = 0 \text{ tai } x+1 = 0 \iff x = 0 \text{ tai } x = -1.$$

Nollakohdat ovat siis $x = -1$ ja $x = 0$. Lauseen 4.10 perusteella nämä ovat ainoat pisteet, joissa funktiolla voi olla paikallinen minimi tai maksimi. Lisää tietoa näistä pisteistä saadaan esimerkiksi *merkkikaavion* avulla. Siihen kerätään tiedot derivaatan etumerkistä eri väleillä, ja näistä päätellään funktion muutoksen suunta.

Koska derivaatta f' on itse polynomifunktio ja siksi jatkuva kaikilla reaaliluvuilla, sen etumerkki voi vaihtua ainoastaan nollakohdassa (ns. Bolzanon lause). Tiedetään siis, että väleillä $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ ja $]0, \infty[$ derivaatan merkki ei muutu. Toisaalta esimerkiksi $f'(-2) = -48$, $f'(-1/2) = 3/2$ ja $f'(1) = 24$. Näistä arvoista nähdään, mikä derivaatan etumerkki on milläkin välillä. Kerätään tulokset kaavioon.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x$
$f'(x)$	$-$ (-48)	$+$ $(3/2)$	$+$ (24)
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Lauseiden 4.11 ja 4.12 perusteella f on vähenevä välillä $]-\infty, -1]$ ja kasvava välillä $[-1, \infty[$. Väheneminen ja kasvaminen on lisäksi aitoa, sillä derivaatta on nolla vain yksittäisissä pisteissä. Nyt voidaan myös päätellä, mitkä derivaatan nollakohdista ovat ääriarvokohtia. Pisteen $x = 0$ ympärillä f on aidosti kasvava, joten se ei voi olla ääriarvokohta. Toisaalta pisteen $x = -1$ vasemmalla puolella f on vähenevä ja oikealla puolella kasvava, joten kyseessä on lokaali minimikohta.



Esimerkki 4.14. Tarkastellaan edellisen esimerkin tavoin erästä rationaalifunktiota $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x^4+1)/x^2$. Funktion derivaatta on

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{D(x^4+1) \cdot x^2 - (x^4+1) \cdot D\, x^2}{(x^2)^2} = \frac{4x^3 \cdot x^2 - (x^4+1) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{4x^5 - 2x^5 - 2x}{x^4} = \frac{2x^5 - 2x}{x^4} = \frac{x(2x^4 - 2)}{x^4} = \frac{2x^4 - 2}{x^3}. \end{aligned}$$

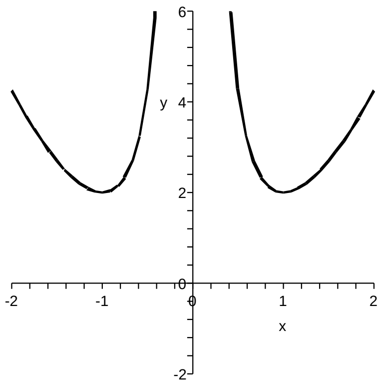
Derivaatta on tietysti määritelty vain funktion määrittelyjoukossa, eli kun $x \neq 0$. Murtolausekkeen nollakohdat ovat samat kuin sen osoittajan nollakohdat, joten

$$g'(x) = 0 \iff 2x^4 - 2 = 0 \iff x^4 = 1 \iff x = \pm 1.$$

Derivaatan nollakohdat ovat siis 1 ja -1. Entä derivaatan etumerkki? Kuten edellä, derivaatta on jatkuva siellä missä se on määritelty ja voi tällä alueella vaihtaa etumerkkiään vain nollakohdissaan. Derivaatta ei kuitenkaan ole määritelty nollassa, joten sen etumerkki voi olla erilainen nollan eri puolilla. Tarkastelu on siis jaettava väleihin $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, $]0,1[$ ja $]1,\infty[$. Tutkimalla derivaatan arvoja näillä väleillä saadaan seuraavan näköinen merkkikaavio:

	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$1<x$
$g'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Merkkikaavion mukaan kohdissa $x=-1$ ja $x=1$ on lokaalit minimit. (Kohdassa $x=0$ sitä vastoin ei ole lokaalia maksimia, sillä g ei ole siinä määritelty.)



Näillä tiedoilla voidaan jo hyvin tarkasti määrittää derivoituvan funktion kulku. Seuraava lisätieto auttaa ääriarvojen löytämisessä.

Lause 4.15. *Suljetulla välillä määritelty jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa tuolla välillä. Jos funktio on lisäksi derivoituva, suurin ja pienin arvo löytyvät joko välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista.*

Esimerkki 4.16. Tarkastellaan nyt aikaisemman esimerkin funktiota $f(x)=3x^4+4x^3$ suljetulla välillä $[-2,1]$. Lasketaan funktion arvot derivaatan nollakohdissa sekä välin päätepisteissä.

$$f(-1)=-1, \quad f(0)=0, \quad f(-2)=16, \quad f(1)=7.$$

Edellisen lauseen perusteella funktion suurin ja pienin arvo välillä $[-2,1]$ löytyvät näiden arvojen joukosta. Suurin arvo on selvästi $f(-2)=16$ ja pienin $f(-1)=-1$.

Monet arkielämän optimointiongelmat voidaan edellä opittujen seikkojen avulla käsitellä derivaatan avulla.

Esimerkki 4.17. Maanviljelijällä on 20 metriä verkkoaitaa. Hän haluaa rakentaa kanoille suorakulmaisen aitauksen. Aitatarpeita säästääkseen hän päättää rakentaa aitauksen ladon viereen niin, että ladon seinä korvaa toisen aitauksen pitkistä sivuista. Miten pitkät on aitauksen sivujen oltava, jotta aitauksen pinta-ala olisi mahdollisimman iso?

Ratkaisun löytämiseksi muodostetaan funktio, joka kuvaa maksimoitavaa suuretta jonkin muuttujan funktiona. Maksimoitava suure on aitauksen pinta-ala, joka lasketaan pitkän ja lyhyen sivun pituuksien tulona. Merkitään lyhyen sivun pituutta x. Pitkälle sivuille jää tällöin $20 - 2x$ metriä verkkoaitaa. Näin saadaan aitauksen pinta-ala lyhyen sivun pituuden funktiona:

$$A(x) = x \cdot (20 - 2x) = -2x^2 + 20x.$$

Lyhyt sivu on vähintään 0 ja enintään 10 metriä pitkä. Funktio A on siis määritelty suljetulla välillä $[0, 10]$. Se on derivoituva, joten suurin arvo löytyy määrittelyvälin päätepisteestä tai derivaatan nollakohdasta. Derivaatta on

$$A'(x) = -4x + 20.$$

Derivaatta on nolla vain, jos $x = 5$. Suurin arvo löytyy siis seuraavien arvojen joukosta:

$$A(5) = -2 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5 = 50, \quad A(0) = 0, \quad A(10) = 0.$$

Suurin pinta-ala saadaan siis, kun lyhyen sivun pituus on 5 metriä, jolloin pitkän sivun pituudeksi tulee 10 metriä.

Esimerkki 4.18. Suorakulmio sijaitsee koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä siten, että sen yksi kulma on origossa ja vastakkainen kulma suoralla $y = -2x + 3$ (ks. kuva). Laske tällaisen suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala.

Merkitään suorakulmion alareunan pituutta x. Koska suorakulmion kulma on suoralla $y = -2x + 3$, sen y-koordinaatin, joka on samalla suorakulmion korkeus, täytyy olla $-2x + 3$. Tällöin ala on

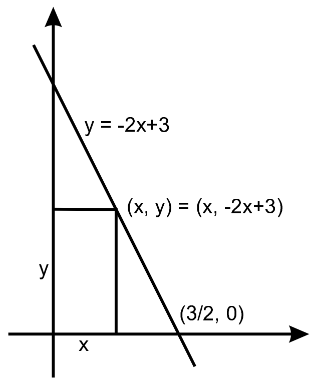
$$A(x) = x(-2x + 3) = -2x^2 + 3x.$$

Tehtävänannon mukaan täytyy olla $0 \leq x \leq 3/2$. Sallitut arvot muodostavat suljetun välin, ja funktio on derivoituva, joten suurin arvo löytyy derivaatan nollakohdasta tai määrittelyvälin päätepisteestä. Päätepisteissä ala on selvästi 0. Derivaatta on

$$A'(x) = -4x + 3,$$

ja tämän ainoa nollakohta on $x = 3/4$. Alan suurin arvo on siis

$$A(3/4) = -2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}.$$



4.5 Korkeammat derivaatat

Funktion f derivaatta f' on myös eräs funktio, joten myös se itse voi olla derivoituva. Tämä pätee myös derivaatan derivaatalle ja niin edelleen. Jos f voidaan derivoida n kertaa, tulosta kutsutaan *n:nneksi derivaataksi* ja merkitään jollain seuraavista tavoista:

$$f^{(n)}, \quad D^{(n)}f, \quad \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Jos n on pieni, kuten 2 tai 3, voidaan myös merkitä f'' tai f'''.

Toinen derivaatta kertoo funktion derivaatan kasvusta. Jos esimerkiksi s kuvaa kuljettua matkaa, kuvaa s' nopeutta ja s'' vastaavasti kiihtyvyyttä.

Seuraava toisen derivaatan ominaisuus voi olla hyödyksi.

Lause 4.19. *Oletetaan, että f on kahdesti derivoituva ja f':lla on nollakohta pisteessä x_0. Tällöin pätee:*

a) jos $f''(x_0) < 0$, niin x_0 on f:n paikallinen maksimikohta,

b) jos $f''(x_0) > 0$, niin x_0 on f:n paikallinen minimikohta.

Sen sijaan, jos $f''(x_0) = 0$, niin kohdassa x_0 voi olla paikallinen ääriarvo tai olla olematta.

Esimerkki 4.20. Olkoon jälleen $f(x) = 3x^4 + 4x^3$. Ensimmäinen derivaatta on

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2,$$

ja toinen derivaatta

$$f''(x) = 12 \cdot 3x^2 + 12 \cdot 2x = 36x^2 + 24x.$$

Derivaatan nollakohdat olivat $x = -1$ ja $x = 0$. Toisen derivaatan arvot näissä pisteissä ovat

$$f''(-1) = 36 \cdot 1 + 24(-1) = 12, \quad f(0) = 0.$$

Kohdassa $x = -1$ on siis lokaali minimi, mutta kohdasta $x = 0$ ei osata tällä perusteella sanoa mitään. Aiempi tutkimus osoitti, että tässä kohdassa ei ollut ääriarvoa.

4.6 Derivaatan käyttö yhtälöissä

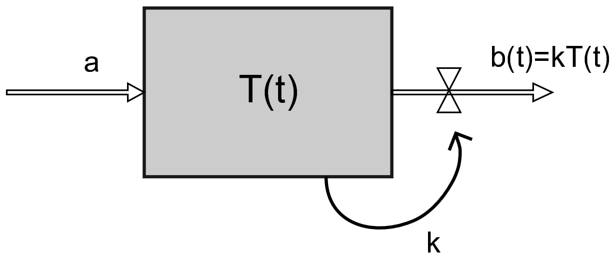
Koska derivaatta kertoo funktion kasvu- tai vähenemisnopeuden, voidaan sen avulla kuvata tilanteita, jotka riippuvat jonkin suureen muutoksen tahdista.

Esimerkki 4.21. Oletetaan, että bakteerikasvuston suuruutta tietyllä ajanhetkellä kuvaa funktio S. Tällöin funktion derivaatan arvo $S'(t)$ kuvaa kasvuston lisääntymisnopeutta ajanhetkellä t. Suotuisissa olosuhteissa, joissa ei ole ympäristön asettamia rajoituksia, bakteerien lisääntymisnopeus on suoraan verrannollinen bakteerikasvuston kokoon. Tämä tarkoittaa sitä, että lisääntymisnopeuden S' ja kasvuston koon S suhde on koko ajan vakio. Merkitään tätä vakiosuhdetta kirjaimella k. Nyt voidaan muodostaa yhtälö, joka kuvaa bakteerien lisääntymistä suotuisissa olosuhteissa:

$$\frac{S'(t)}{S(t)} = k \qquad \text{tai} \qquad S'(t) = k \cdot S(t).$$

Tämä yhtälö pätee kaikilla ajanhetkillä t, niin kauan kuin ympäristö ei aseta kasvulle rajoituksia.

Esimerkki 4.22. Kuvitellaan, että johonkin säiliöön virtaa ainetta A nopeudella a ja sieltä virtaa ulos samaa ainetta nopeudella b. Nopeus a on vakio, mutta b on kullakin ajanhetkellä t suoraan verrannollinen säiliössä olevan aineen määrään, joten käsitellään sitä funktiona ajan suhteen. Merkitään verrannollisuuskerrointa k. Säiliössä olevan aineen määrä riippuu ajasta, ja sitä merkitään funktiolla T. Tilanteeseen liittyy seuraavan kuvan mukainen *virtauskaavio*.



Säiliössä olevan aineen määrän kasvunopeus muodostuu sinne tulevan aineen virtausnopeudesta ja sieltä lähtevän aineen virtausnopeudesta: $T'(t) = a - b(t)$. Koska $b(t)$ on suoraan verrannollinen säiliössä olevan aineen määrään, eli $b(t) = k \cdot T(t)$, saadaan muodostettua yhtälö

$$T'(t) = a - kT(t).$$

Kuvatunlainen säiliö voisi olla esimerkiksi metsänpohja, johon putoaa kariketta tasaisella nopeudella, ja jossa karikkeen poistumisnopeus on verrannollinen karikkeen määrään.

Edellisissä esimerkeissä esiintyivät tuntemattomat suureet S ja T. Kunkin esimerkin yhtälö määrää itse asiassa siinä esiintyvän suureen käyttäytymisen, mutta emme vielä osaa ratkaista, millä tavalla tämä käyttäytyminen määräytyy. Yksinkertaisemmassa tapauksessa osaamme jo nyt päätellä, miten tämänkaltainen yhtälö vaikuttaa siinä esiintyvään tuntemattomaan suureeseen.

Esimerkki 4.23. Kun kappale päästetään putoamaan, se putoaa jonkin aikaa vakiokiihtyvyydellä g ($\approx 9{,}8$ m/s^2). Jos merkitään kappaleen nopeuden riippuvuutta ajasta funktiolla v, niin derivaatta v' kuvaa kappaleen kiihtyvyyttä. Näin saadaan suoraan yhtälö

$$v'(t) = g,$$

joka pätee kaikilla hetkillä t niin kauan kuin putoaminen on tasaisesti kiihtyvää (jossain vaiheessa ilmanvastus alkaa vaikuttaa tilanteeseen).

Yllä oleva yhtälö sanoo siis, että funktion v derivaatta on jokaisessa pisteessä vakio g. Tästä voidaan päätellä ikäänkuin takaperoisesti, että funktion v on oltava polynomifunktio, jonka riippuvuussääntö on

$$v(t) = gt + C,$$

missä C on jokin vakio. Tällaisen funktion derivaatta t:n suhteen on nimittäin g. Vakio C kuvaa itse asiassa kappaleen alkunopeutta, sillä ajanhetkellä 0 pätee $v(t) = g \cdot 0 + C = C$. Koska kappale "päästettiin putoamaan", voidaan sanoa, että $C = 0$, jolloin kappaleen nopeutta kuvaava funktio on itse asiassa $v(t) = gt$.