1 Johdanto

Kurssi Y100 jakautuu karkeasti seuraaviin osiin:

- funktiot ja niiden perusominaisuudet,
- derivointi,
- integrointi,
- differentiaaliyhtälöt,
- matriisilaskenta,
- tietokone matemaattisena työvälineenä.

Pääsääntöisesti kussakin osassa tarvitaan aikaisempien osien tietoja, lukuunottamatta matriisilaskentaa. Listan viimeinen osa-alue, tietokoneavusteinen matematiikka, toteutetaan luentojen ja laskuharjoitusten rinnalla osittain itsenäisenä kokonaisuutena. Tarkoitus on oppia hyödyntämään MS Excel -taulukkolaskentaohjelman laskentaominaisuuksia lähinnä numeerisessa ongelmanratkaisussa sekä tutustua Maple-ohjelmaan tyypillisenä matematiikan yleistyökaluna.

Uusia käsitteitä opittaessa painotetaan sekä käsitteen sisällön omaksumista että siihen liittyviä laskumenetelmiä. Sovellettaessa opittua asiaa täytyy sekä tietää mitkä käsitteet tilanteeseen liittyvät että osata suorittaa tarvittavat mekaaniset laskut.

2 Reaaliarvoiset funktiot

2.1 Funktio

Funktio on tämän kurssin useimmin toistuva käsite. Funktio voidaan ymmärtää monella tavalla tilanteesta riippuen. Voidaan esimerkiksi sanoa, että funktio on eräänlainen kone, joka muuntaa lukuja toisiksi luvuiksi jonkin säännön mukaan. Funktion olennaisia osia ovat *määrittelyjoukko*, *maalijoukko* sekä *riippuvuussääntö*. Määrittelyjoukko sisältää ne luvut, joita funktio osaa muuntaa, maalijoukko sisältää muunnosten tulokset. Tällä kurssilla maalijoukko on aina $\mathbb{R}$ eli tavallisten reaalilukujen joukko, toisin sanoen kaikki funktion tulokset ovat tavallisia lukuja (eivät esimerkiksi kompleksilukuja, vektoreita, matriiseja, funktioita tms.) Samaten määrittelyjoukko (toiselta nimeltään *lähtöjoukko*) on aina jokin reaalilukujen osajoukko, esimerkiksi suljettu väli $[0, 1]$.

Funktion voi myös ajatella kuvaavan jonkin suureen riippuvuutta toisesta. Riippuvuussäännön on aina oltava yksikäsitteisesti olemassa, vaikka sitä ei voitaisikaan kirjoittaa laskulausekkeiden avulla (niin kuin äytännössä usein on asian laita).

Funktion määrittelyssä käytetään merkintää $f : A \to \mathbb{R}$. Tämä tarkoittaa, että f on funktio, jonka määrittelyjoukko on A ja maalijoukko $\mathbb{R}$. Sitä lukua, joksi funktio muuntaa luvun x, merkitään $f(x)$ ja kutsutaan *funktion arvoksi luvulla* x (tai *kohdassa* x). Funktiolle pätee aina kaksi seikkaa:

- Jokaista määrittelyjoukon lukua vastaa jokin maalijoukosta löytyvä funktion arvo.

- Yhtäkään lähtöjoukon lukua ei vastaa useampi kuin yksi funktion arvo.

Huom. Symboli f on funktion *nimi* ja $f(x)$ on funktion *arvo luvulla* x eli jokin luku. Ei siis ole oikein sanoa esimerkiksi "funktio $f(x)$ on jatkuva" tai "$f = 2$, kun $x = 1$".

Esimerkki 2.1. Määritellään funktio, joka kuvaa tuotteen tai palvelun markkamääräisen hinnan riippuvuutta hinnasta euroissa. Funktio muuntaa siis eurohinnan markoiksi. Hinta euroissa voi periaatteessa olla mikä tahansa positiivinen reaaliluku, joten funktion määrittelyjoukoksi voidaan ottaa $\mathbb{R}_+$ (positiiviset reaaliluvut). Funktion arvo eli hinta markoissa saadaan kertomalla euromääräinen hinta valuuttakurssilla (käytetään vuoden 2002 valuuttakurssia: 1 euro = 5,94573 markkaa) eli riippuvuussääntö voidaan kirjoittaa muodossa $f(x) = 5{,}94573 \cdot x$. Näemme helposti, että jokaista x vastaa vain yksi tietty $f(x)$, joten funktion arvon yksikäsitteisyys toteutuu. Lisäksi $f(x)$:n kaikki arvot ovat reaalilukuja, joten funktion maalijoukoksi voidaan ottaa $\mathbb{R}$. Funktio voidaan siis kokonaisuudessaan määritellä seuraavasti:

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 5{,}94573 \cdot x.$$

Huomaa, että vaikka markkahintakin on tässä aina positiivinen, ei maalijoukoksi tarvitse valita joukkoa $\mathbb{R}_+$. Maalijoukon tarvitsee ainoastaan *sisältää* kaikki funktion arvot, mutta kaikkien maalijoukon lukujen ei tarvitse olla funktion arvoja.

(Joku voisi myös huomauttaa, että hinnat olisi hyvä ilmoittaa sentin tarkkuudella, jolloin määrittelyjoukkoa voitaisiin merkitä näin: $\{0.01, 0.02, 0.03, \dots\}$.)

Sovelluksissa funktio kuvaa usein jonkin suureen kehitystä ajan tai paikan mukana. Voidaan esimerkiksi ilmoittaa lämpötila ajan tai paikan funktiona. Tällöin riippuvuusehtoa ei yleensä voida antaa tarkkana laskulausekkeena. Toisinaan funktio ilmoittaa abstraktimpia riippuvuuksia, kuten aitauksen pinta-alan käytettävissä olevan aitamateriaalin funktiona. Kun funktiota käsitellään matemaattisesti, ei kuitenkaan ole tärkeää, minkätyyppisestä riippuvuudesta on kysymys.

Esimerkki 2.2. Kuvitellaan auton nopeusmittarin lukemaa ajan funktiona. Tarkkaillaan mittaria kahden tunnin ajan ja ilmoitetaan aika minuutteina. Sovitaan lisäksi, että tarkkailun alussa aika on 0. Nopeus ilmoitetaan kilometreinä tunnissa, ja se on aina reaaliluku. Näin saadaan funktio $v : [0, 120] \to \mathbb{R}$. Tietenkään tälle funktiolle ei voi antaa riippuvuussääntöä laskulausekkeena, koska nopeuden vaihtelu tuskin noudattaa mitään tiettyä kaavaa. Myöskin on mahdotonta kirjata nopeutta ylös *jokaisena* ajanhetkenä välillä $[0, 120]$, joten emme voi edes tuntea kaikkia v:n arvoja. Kuitenkin tiedetään, että jokaisella ajanhetkellä mittari varmasti näyttää jotain yhtä tiettyä lukua, joten funktion arvo $v(t)$ on yksikäsitteisesti olemassa jokaista ajanhetkeä t kohti. Lisäksi kokemusmaailmamme osoittaa, että tämä kyseinen funktio on *jatkuva* ja jopa *derivoituva*. Nämä käsitteet määritellään myöhemmin.

Esimerkki 2.3. Edellistä esimerkkiä ei voi kääntää toisin päin. Emme voi määritellä funktiota, joka kuvaisi ajanhetken riippuvuutta nopeusmittarin lukemasta, sillä tämä riippuvuus ei ole yksikäsitteistä. Tietty mittarilukema voi esiintyä useinkin matkan aikana, ei pelkästään yhdellä määrätyllä hetkellä. Jos sen sijaan kyse olisi kuljetusta matkasta eikä auto olisi koskaan pysähdyksissä (eikä kulkisi taaksepäin), voitaisiin riippuvuussuhde määritellä kummin päin vain. Kun kuljettu matka voi vain kasvaa, vastaa kutakin saavutettua matkaa jokin tietty ajanhetki.

Tarkastellaan seuraavaksi joitain tuttuja laskulausekkeilla määriteltäviä funkioita.

Esimerkki 2.4. Yksinkertaisin reaaliarvoinen funktio on vakiofunktio. Vakiofunktion tapauksessa funktion arvon "riippuvuus" lähtöjoukon alkion arvosta on kenties makuasia, funktion arvo kun on kaikkialla sama. Esim. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$ antaa kaikilla luvuilla x funktion arvoksi luvun 2.

Esimerkki 2.5. Funktioita $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joiden arvot ovat muotoa

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kutsutaan *polynomifunktioiksi.* Polynomifunktion arvo saadaan siis laskemalla yhteen lähtöjoukon arvon erilaisilla vakioilla kerrottuja potensseja eli *termejä.* Polynomifunktioita ovat esimerkiksi $P_1(x) = x^2$ ja $P_2(x) = 3x^5 - 2x + 7$. Lukuja a_j kutsutaan polynomin *kertoimiksi*, jotka voivat tietysti olla myös negatiivisia (kuten polynomin $P_2(x)$ toinen kerroin $a_1 = -2$). Suurin luku, joka esiintyy x:n potenssissa on polynomin *kertaluku eli aste.*

Esimerkki 2.6. Funktiot $R : A \to \mathbb{R}$, joiden arvot voidaan ilmoittaa muodossa $R(x) = P(x)/Q(x)$, missä P ja Q ovat molemmat polynomifunktioita, ovat *rationaalifunkioita.* **Huomaa**, että rationaalifunktio ei ole määritelty nimittäjän Q nollakohdissa. Esimerkiksi funktion $R_1(x) = 1/x$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (reaaliluvut ilman nollaa), ja funktion $R_2(x) = (2x + 3)/(x^2 - 2x)$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

Edellisessä esimerkissä käytettiin merkintää $A \setminus B$, joka tarkoittaa joukkojen *erotusta* ja lausutaan "A miinus B" tai "A pois B". Esimerkiksi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ tarkoittaa joukkoa, joka sisältää kaikki muut reaaliluvut paitsi kokonaisluvut. Tätä merkintää, kuten muitakaan joukko-opillisia merkintöjä, ei tarvitse aktiivisesti osata, mutta se on varsinkin rationaalifunktioiden yhteydessä kätevä.

Esimerkki 2.7. Funktiota, jonka arvot lasketaan eri osissa lähtöjoukkoa eri lausekkeesta, kutsutaan *paloittain määritellyksi.* Esimerkiksi itseisarvofunktio voidaan määritellä seuraavilla lausekkeilla:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Jako voi olla monimutkaisempikin, kuten seuraavalla funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{kun } x \text{ on joku muu kokonaisluku kuin } 0 \\ 1, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

2.2 Yhdistetty funktio

Kun jonkin funktion arvo annetaan toiselle funktiolle muunnettavaksi, puhutaan *yhdistetystä funkiosta.* Yhdistetyt funktiot ovat erittäin tärkeitä sekä teorian että sovellusten kannalta.

Määritelmä 2.8. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$. Funktioiden f ja g *yhdistetty funktio* $f \circ g : A \to \mathbb{R}$ määritellään seuraavasti:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Funktiota f kutsutaan *ulkofunktioksi* ja funktiota g *sisäfunktioksi.*

Funktio $f \circ g$ muuntaa siis kunkin luvun x käyttämällä ensin funktiota g ja tämän tulokseen $g(x)$ edelleen funkiota f. Huomaa, että ulkofunktion f määrittelyjoukon täytyy sisältää kaikki g:n mahdolliset arvot.

Esimerkki 2.9. Olkoon $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkioita, joiden riippuvuussäännöt ovat $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x+1$. Lasketaan aluksi yhdistetyn funktion $f \circ g$ arvo luvulla 2. Ensin käytetään funktiota g, joka muuttaa luvun 2 luvuksi 3. Sitten funktio f muuttaa saadun luvun 3 luvuksi 9.

On hyvin olennaista, miten päin funktiot kirjoitetaan. Oikealla puolella olevaa käytetään aina ensiksi. Jos esimerkiksi syötetään luku 2 ensin funktioon f, saadaan 4, joka syötettynä funktioon g antaa tulokseksi 5. Siispä $(f \circ g)(2) \neq (g \circ f)(2)$.

Yhdistetyn funktion riippuvuussääntö muodostetaan samalla periaatteella. Näin saadaan esimerkiksi seuraavanlaisia riippuvuussääntöjä:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2, \\
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1, \\
(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4, \\
(g \circ g)(x) &= g(g(x)) = g(x+1) = (x+1) + 1 = x + 2.
\end{aligned}$$

Mikään ei estä myöskään yhdistämästä useampia funkioita. Näin saataisiin esimerkiksi funktio $f \circ g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

$$(f \circ g \circ f)(x) = f(g(f(x))) = f(g(x^2)) = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2.$$

Yhdistetyn funktion käsite on tärkeä muun muassa siksi, että monet funktiot voidaan tulkita yhdistetyiksi funkioiksi. Tällainen tulkinta voidaan aina tehdä monella eri tavalla, ja tilanteesta riippuen on valittava parhaiten sopiva tulkinta. Tästä on jatkossa hyötyä esimerkiksi derivoinnin yhteydessä.

Esimerkki 2.10. Määritellään $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 1/(x^2 + 1)^2$. Tämä h voidaan tulkita yhdistetyksi funktioksi esimerkiksi seuraavasti. Määritellään $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x^2 + 1)^2$. Nyt $h = f \circ g$, sillä kaikilla luvuilla x pätee

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f((x^2 + 1)^2) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2} = h(x).$$

Lisäksi g saa vain positiivisia arvoja, joten f:n määrittelyjoukko sisältää g:n arvot. Funktio h voidaan kuitenkin tulkita yhdistetyksi funktioksi monella muullakin tavalla. Voidaan esimerkiksi valita $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 1/x^2$, ja $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = x^2 + 1$. Nytkin $h = f_1 \circ g_1$, sillä kaikilla x pätee

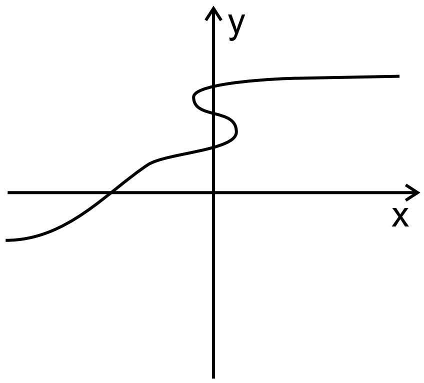
$$(f_1 \circ g_1)(x) = f_1(g_1(x)) = f_1(x^2 + 1) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2} = h(x).$$

Huom. On tärkeää ymmärtää oikein yhdistetyn funktion muodostukseen liittyvät merkinnät. Jos yhdistetään esimerkiksi funktiot $f(x) = 2x$ ja $g(x) = x^2$, tämä **ei tarkoita** sitä, että jollain tapaa yhdistettäisiin *lausekkeet* $2x$ ja x^2. Merkintä $f(x) = 2x$ tarkoittaa funktion riippuvuussääntöä, yhtä hyvin voitaisiin kirjoittaa $f(y) = 2y$ tai vaikkapa $f(\text{“kukkuluuruu”}) = 2 \cdot \text{“kukkuluuruu”}$. Muuttujan nimellä ei tässä ole mitään merkitystä: mitä tahansa voidaan sijoittaa sen paikalle. Esimerkiksi yhdistetyn funktion $f \circ g$ riippuvuussäännöksi saadaan $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2$. Huomaa, miten tässä funktion f muuttujan x paikalle on sijoitettu g:n antama arvo x^2, jolloin saadaan puolestaan f:n riippuvuussäännön mukaisesti $f(x^2) = 2x^2$.

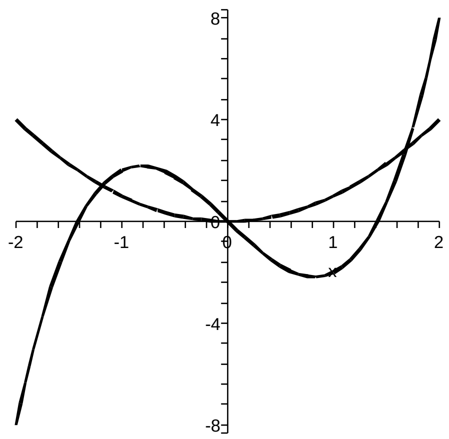
2.3 Kuvaaja

Reaaliarvoinen funktio voidaan usein esittää koordinaatistoon piirretyn kuvaajan eli *graafin* avulla. Tällöin funktion erityispiirteet, kuten kasvunopeus, jaksollisuus, ääriarvot ja epäjatkuvuuskohdat on helppo hahmottaa. On kuitenkin muistettava, että tarkkakaan piirros ei voi tyhjentävästi kuvata funktion käyttäytymistä, eikä kaikista funktioista edes pystytä piirtämään havainnollistavaa kuvaa. Siksi kuvaajan perusteella *ei koskaan voi sanoa mitään varmaa* funktion arvoista, vaan arviot on aina pystyttävä perustelemaan laskien. Kuvaajan piirtäminen on kuitenkin yksi parhaista keinoista oppia ymmärtämään jonkin tietyn funktion luonnetta.

Kaikki koordinaatistoon piirretyt käyrät eivät kuitenkaan kuvaa funktioita. Koska funktion arvojen täytyy olla yksikäsitteisiä, ei yhtä x-arvoa saa vastata kuvaajassa useampia y-arvoja. Jos siis joku pystysuora leikkaa kuvaajaksi väitetyn käyrän useammassa kuin yhdessä kohdassa, kyseessä ei ole reaalifunktion kuvaaja. Funktion kuvaaja ei esimerkiksi voi "laskostua" näin:



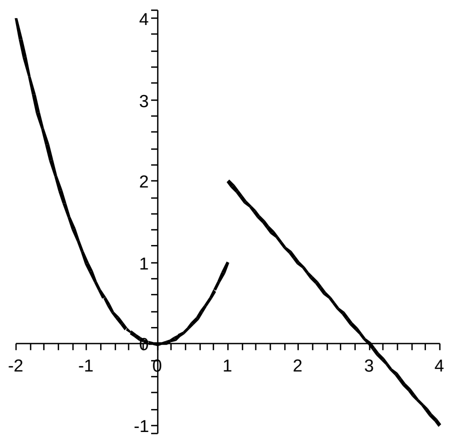
Esimerkki 2.11. Polynomifunktioiden $f(x) = x^2$ ja $g(x) = 2x^3 - 4x$ kuvaajat. Kuvan perusteella näyttäisi, että piste $x = 1{,}4$ olisi funktion g nollakohta, mutta oikeasti $g(1{,}4) = -0{,}112$.



Esimerkki 2.12. Paloittain määritellyn funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} x^2, \text{ kun } x < 1 \\ -x+3, \text{ kun } x \geq 1 \end{cases}$$

kuvaaja. Funktiolla on niin sanottu *epäjatkuvuuskohta* pisteessä $x = 1$. Kuvaajasta ei näe, onko $h(1) = 1$ vai $h(1) = 2$. Funktion lausekkeen perusteella tiedetään, että jälkimmäinen pätee.



3 Raja-arvo ja jatkuvuus

3.1 Raja-arvo

Funktion raja-arvo on tavallaan tämän kurssin tärkein peruskäsite, sillä tarvitaan käsitteiden kuten jatkuvuuden, derivaatan ja integraalin määrittelyssä. Raja-arvon täsmälliseen tarkasteluun ei kurssilla kuitenkaan valitettavasti riitä aikaa, joten sen suhteen pyritään tukeutumaan mielikuviin.

Raja-arvo kuvaa funktion käyttäytymistä jonkin pisteen lähistöllä. Voitaisiin sanoa vaikka niin, että funktion raja-arvo pisteessä x_0 on se luku, joka näyttäisi olevan funktion arvo kyseisessä pisteessä, mikäli tarkasteltaisiin vain tämän pisteen lähellä olevia pisteitä. Graafisesti raja-arvoa voisi kuvata siten, että jos funktion kuvaaja näyttää lähestyvän jotakin arvoa kohdassa x_0, tämä arvo on funktion raja-arvo pisteessä x_0 (vaikka itse arvo $f(x_0)$ olisi jotain muuta).

Esimerkki 3.1. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, pisteen $x = 1$ lähistöllä. Laskemalla joitakin funktion arvoja tuon pisteen ympärillä havaitaan, että funktion arvot näyttävät lähestyvän arvoa 2 pisteessä 1, eli $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

x	$f(x)$
0,5	1
0,8	1,6
0,9	1,8
0,99	1,98
1	-
1,01	2,02
1,1	2,2
1,2	2,4

Tässä tapauksessa funktion raja-arvo pisteessä 1 on sama kuin funktion arvo. Tämä johtuu siitä, että valitsimme tarkasteltavaksi *jatkuvan* funktion.

Alla esitellään raja-arvon täsmällinen määritelmä. Sitä on käytännössä usein vaikea soveltaa, ja tällä kurssilla riittääkin raja-arvon käsitteen intuitiivinen ymmärtäminen. On myös olemassa laskusääntöjä, joiden avulla raja-arvon voi päätellä tietyissä tilanteissa.

Määritelmä 3.2. Luku a on funktion f *raja-arvo* pisteessä x_0, jos kutakin mielivaltaisen pientä positiivista lukua E kohti voidaan aina löytää jokin väli pisteen x_0 ympäriltä niin, että tällä välillä lasketut funktion arvot sijaitsevat välillä $[a-E, a+E]$ (siis korkeintaan luvun E päässä luvusta a), lukuunottamatta mahdollisesti arvoa $f(x_0)$. Raja-arvoa merkitään $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$.

Huom. Täytyy muistaa, ettei funktion *arvo* pisteessä x_0 vaikuta mitenkään funktion *raja-arvoon* pisteessä x_0. Raja-arvo voi olla myös olemassa, vaikka funktio ei olisi edes määritelty kyseisessä kohdassa. Tämä on itse asiassa eräs tärkeimmistä syistä raja-arvon käyttöön.

Esimerkki 3.3. Olkoon $f : \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = (2x^2 - 10x + 12)/(x - 2)$. Funktio ei ole määritelty kohdassa $x = 2$, koska nollalla ei voi jakaa. Kun kuitenkin lasketaan arvoja kakkosen lähellä olevissa pisteissä, huomataan, että ne lähestyvät lukua -2. Siispä varmaankin $\lim_{x\to 2} f(x) = -2$.

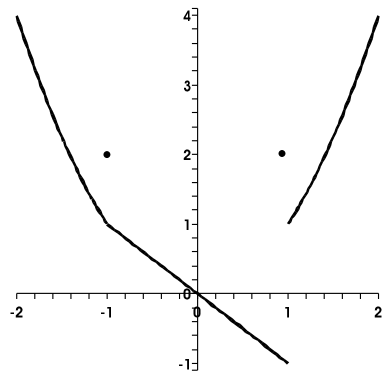
x	$f(x)$
1,5	-3
1,9	$-2{,}2$
1,99	$-2{,}02$
2	-
2,01	$-1{,}98$
2,1	$-1{,}8$
2,5	-1

Funktion kuvaajasta raja-arvon olemassaolo on usein helppo nähdä.

Esimerkki 3.4. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x < -1 \text{ tai } x > 1 \\ 2, & \text{kun } x = -1 \text{ tai } x = 1 \\ -x, & \text{kun } x = -1 < x < 1. \end{cases}$$

Funktiolla ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 1$, sillä tuon pisteen vasemmalla puolella funktion arvot lähestyvät arvoa -1, kun taas oikealla puolella ne lähestyvät pistettä 1. Arvot eivät siis lähesty mitään tiettyä arvoa. Sen sijaan funktion raja-arvo pisteessä $x = -1$ on nähtävästi 1, vaikka $f(1) = 2$.



Voidaan myös tutkia, mitä arvoa funktion arvot lähestyvät muuttujan arvojen kasvaessa tai vähetessä rajatta. Tällaista arvoa, jos sellainen löytyy, kutsutaan joskus raja-arvoksi äärettömyydessä ja merkitään $\lim_{x\to\infty} f(x)$ tai $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Esimerkki 3.5. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x/(2x+4)$. Laskemalla hyvin suuria funktion arvoja havaitaan, että funktion arvot lähestyvät lukua $1/2$, kun muuttujan arvot kasvavat rajatta. Toisin sanoen $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1/2$.

x	$f(x)$
10	0,4167
100	0,4902
1000	0,4990
10000	0,4999

Käytännössä seuraavat laskusäännöt helpottavat raja-arvojen toteamista:

1. $\lim_{x\to x_0} c = c$, kun c on vakio, joka ei riipu x:stä.

2. $\lim_{x\to x_0} x = x_0$.

3. Jos $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, niin
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab.$$
Jos lisäksi $b \neq 0$, niin
$$\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = a/b.$$

Esimerkki 3.6. Lasketaan $\lim_{x\to 2} f(x)$, kun $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = 3x^2 - 1$. Puretaan raja-arvon laskeminen useampaan osaan säännön 3 avulla ja lasketaan sitten yksinkertaisemmat raja-arvot sääntöjen 1 ja 2 mukaisesti:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} P(x) &= \lim_{x\to 2}(3x^2 - 1) = \lim_{x\to 2} 3x^2 + \lim_{x\to 2}(-1) \\
&= \lim_{x\to 2} 3 \cdot \lim_{x\to 2} x \cdot \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2}(-1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) = 11.
\end{aligned}$$

Tämän esimerkin valossa voidaan antaa yleinen sääntö kaikille polynomifunktioille P:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0).$$

Polynomin raja-arvon pisteessä x_0 voi siis laskea sijoittamalla luku x_0 suoraan polynomin lausekkeeseen. Rationaalifunktion kohdalla sama onnistuu, kunhan nimittäjään ei tällä tavoin tule 0.

Esimerkki 3.7. Lasketaan rationaalifunktion $R(x) = 2x/(x+1)$ raja-arvo kohdassa $x = 1$ edellä annettujen sääntöjen avulla:

$$\lim_{x \to 1} R(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2x}{x+1} = \frac{\lim_{x \to 1} 2x}{\lim_{x \to 1} x + 1} \qquad = \frac{\lim_{x \to 1} 2 \cdot \lim_{x \to 1} x}{\lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 1} = \frac{2 \cdot 1}{1+1} = 1.$$

Esimerkki 3.8. Tarkastellaan rationaalifunktiota $R(x) = (x^2 - x)/(x-1)$. Tämän raja-arvoa $\lim_{x \to 1} R(x)$ ei voida laskea sijoittamalla suoraan luku 1 funktion lausekkeeseen, koska nimittäjään tulisi tällöin 0. Raja-arvo voidaan kuitenkin päätellä seuraavasti. Aina kun $x \neq 1$, pätee

$$R(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{x(x-1)}{x-1} = x.$$

Koska funktion raja-arvo pisteessä 1 ei riipu funktion arvosta kyseisessä pistessä, voidaan funktion $R(x)$ sijalla raja-arvolaskussa käyttää näin saatua sievennettyä muotoa. Todetaan siis, että $\lim_{x \to 1} R(x) = \lim_{x \to 1} x = 1$.

Seuraavat säännöt koskevat raja-arvoja äärettömyydessä.

1. $\lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$.
2. $\lim_{x \to \pm\infty} 1/x = 0$.
3. $\infty + \infty = \infty \cdot \infty = \infty$.
4. Jos $c > 0$, niin $c \cdot \infty = \infty$; jos $c < 0$, niin $c \cdot \infty = -\infty$.

Jos raja-arvoksi tulee ∞, se tarkoittaa, että funktion arvot *kasvavat rajatta*. Vastaavasti, jos raja-arvoksi tulee $-\infty$, arvot *vähenevät rajatta*. Sääntöä 2 käytetään siten, että esimerkiksi

$$\lim_{x \to \infty} 2x = 2 \cdot \lim_{x \to \infty} x = 2 \cdot \infty = \infty.$$

Huomaa, että raja-arvoja $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ tai ∞/∞ ei ole määritelty.

Esimerkki 3.9. Rationaalifunktioiden raja-arvoja äärettömyydessä voidaan laskea supistamalla lauseke termillä x^r, missä r on nimittäjän aste. Tällä tavoin saadaan

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-x^2 + 3x}{2x^2 + 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-1 + \frac{3}{x}}{2 + \frac{5}{x^2}} = \frac{-1+0}{2+0} = -\frac{1}{2}.$$

Tässä käytettiin hyväksi edellä mainittuja laskusääntöjä. Toisaalta

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 1}{2x^2 - 8} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{8}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{8}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x + 0}{2 - 0} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2} x = \infty.$$

Raja-arvoa ei ole, vaan funktion arvot kasvavat rajatta.

3.2 Jatkuvuus

Monien yleisten reaalifunktioiden kuvaajat ovat katkeamattomia käyriä. Tämä johtuu siitä funktion ominaisuudesta, että muuttujan arvon muuttuessa hyvin vähän myös funktion arvo muuttuu vähän eikä tee hyppäystä. Tätä ominaisuutta sanotaan *jatkuvuudeksi.* Luonnossa on paljon esimerkkejä jatkuvista funktioista, kuten vaikkapa huoneen keskilämpötila ajan funktiona. Lukuunottamatta hyvin poikkeavia olosuhteita lämpötila ei tee hyppäyksiä ajan kuluessa. Myös polynomifunktiot, rationaalifunktiot sekä juurifunktiot ovat kaikki jatkuvia funktioita. Jatkuvuus jossain pisteessä riippuu siis funktion käyttäytymisestä tuon pisteen ympäristössä, mistä syystä jatkuvuus voidaan määritellä kätevästi raja-arvon avulla.

Määritelmä 3.10. Funktio f on *jatkuva pisteessä* x_0, jos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

eli funktion raja-arvo pisteessä x_0 on sama kuin funktion arvo kyseisessä pisteessä. Funktio on *kaikkialla jatkuva* tai yksinkertaisesti *jatkuva*, jos se on jatkuva kaikissa *määrittelyjoukkonsa* pisteissä.

Huom. Funktion kutsumiseen jatkuvaksi eivät vaikuta raja-arvot sellaisissa pisteissä, joissa funktiota ei ole määritelty. (Tällaisissa pisteissä funktio ei määritelmän mukaan voisikaan olla jatkuva.) Toisaalta funktio ei voi olla jatkuva myöskään sellaisessa pisteessä, jossa sillä ei ole raja-arvoa.

Esimerkki 3.11. Aiemmin on todettu, että jos P on polynomifunktio, niin kaikilla luvuilla x_0 pätee $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$. Siispä kaikki polynomifunktiot ovat jatkuvia. Myös kaikki rationaalifunktiot ovat jatkuvia koko määrittelyjoukossaan.

Esimerkki 3.12. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \neq 1 \\ a, & \text{kun } x = 1. \end{cases}$$

Funktio f on jatkuva ainakin kaikissa muissa pisteissä paitsi pisteessä $x = 1$. Koska raja-arvo pisteessä $x = 1$ riippuu ainoastaan funktion arvoista tuota pistettä ympäröivissä pisteissä, voidaan päätellä $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x = 1$. Jos nyt $a = 1$, niin funktion arvo pisteessä 1 on sama kuin raja-arvo kyseisessä pisteessä, ja funktio on jatkuva koko määrittelyjoukossaan. Jos $a \neq 1$, piste $x = 1$ on funktion f *epäjatkuvuuskohta.*

Esimerkki 3.13. Tarkastellaan rationaalifunktioita $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, $g(x) = x/x$. Molemmat funktiot ovat jatkuvia kaikissa määrittelyjoukkonsa pisteissä. Funktiolla f ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 0$, sillä tuota pistettä lähestyttäessä f saa mielivaltaisen suuria ja pieniä arvoja. Toisaalta

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x/x = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Nyt voitaisiin määritellä

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x), & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Tällöin saataisiin uusi jatkuva funktio g_1, joka on määritelty kaikilla luvuilla ja joka laajentaa funktiota g. Tällaista funktiota kutsutaan g:n jatkuvaksi jatkeeksi. Toisaalta funktiota f ei voi laajentaa jatkuvana pisteeseen 0, koska sillä ei ole lainkaan raja-arvoa tuossa pisteessä.