# Y100 kurssimateriaali

Syksy 2007

Jokke Häsä ja Jaakko Kortesharju

# Sisältö

# 1 Johdanto

Kurssi Y100 jakautuu karkeasti seuraaviin osiin:

- funktiot ja niiden perusominaisuudet,
- derivointi,
- integrointi,
- differentiaaliyhtälöt,
- matriisilaskenta,
- tietokone matemaattisena työvälineenä.

Pääsääntöisesti kussakin osassa tarvitaan aikaisempien osien tietoja, lukuunottamatta matriisilaskentaa. Listan viimeinen osa-alue, tietokoneavusteinen matematiikka, toteutetaan luentojen ja laskuharjoitusten rinnalla osittain itsenäisenä kokonaisuutena. Tarkoitus on oppia hyödyntämään MS Excel -taulukkolaskentaohjelman laskentaominaisuuksia lähinnä numeerisessa ongelmanratkaisussa sekä tutustua Maple-ohjelmaan tyypillisenä matematiikan yleistyökaluna.

Uusia käsitteitä opittaessa painotetaan sekä käsitteen sisällön omaksumista että siihen liittyviä laskumenetelmiä. Sovellettaessa opittua asiaa täytyy sekä tietää mitkä käsitteet tilanteeseen liittyvät että osata suorittaa tarvittavat mekaaniset laskut.

# 2 Reaaliarvoiset funktiot

## 2.1 Funktio

Funktio on tämän kurssin useimmin toistuva käsite. Funktio voidaan ymmärtää monella tavalla tilanteesta riippuen. Voidaan esimerkiksi sanoa, että funktio on eräänlainen kone, joka muuntaa lukuja toisiksi luvuiksi jonkin säännön mukaan. Funktion olennaisia osia ovat *määrittelyjoukko*, *maalijoukko* sekä *riippuvuussääntö*. Määrittelyjoukko sisältää ne luvut, joita funktio osaa muuntaa, maalijoukko sisältää muunnosten tulokset. Tällä kurssilla maalijoukko on aina $\mathbb{R}$ eli tavallisten reaalilukujen joukko, toisin sanoen kaikki funktion tulokset ovat tavallisia lukuja (eivät esimerkiksi kompleksilukuja, vektoreita, matriiseja, funktioita tms.) Samaten määrittelyjoukko (toiselta nimeltään *lähtöjoukko*) on aina jokin reaalilukujen osajoukko, esimerkiksi suljettu väli $[0, 1]$.

Funktion voi myös ajatella kuvaavan jonkin suureen riippuvuutta toisesta. Riippuvuussäännön on aina oltava yksikäsitteisesti olemassa, vaikka sitä ei voitaisikaan kirjoittaa laskulausekkeiden avulla (niin kuin äytännössä usein on asian laita).

Funktion määrittelyssä käytetään merkintää $f : A \to \mathbb{R}$. Tämä tarkoittaa, että $f$ on funktio, jonka määrittelyjoukko on $A$ ja maalijoukko $\mathbb{R}$. Sitä lukua, joksi funktio muuntaa luvun $x$, merkitään $f(x)$ ja kutsutaan *funktion arvoksi luvulla $x$* (tai *kohdassa $x$*). Funktiolle pätee aina kaksi seikkaa:

- Jokaista määrittelyjoukon lukua vastaa jokin maalijoukosta löytyvä funktion arvo.

- Yhtäkään lähtöjoukon lukua ei vastaa useampi kuin yksi funktion arvo.

**Huom.** Symboli $f$ on funktion *nimi* ja $f(x)$ on funktion *arvo luvulla* $x$ eli jokin luku. Ei siis ole oikein sanoa esimerkiksi "funktio $f(x)$ on jatkuva" tai "$f = 2$, kun $x = 1$".

**Esimerkki 2.1.** Määritellään funktio, joka kuvaa tuotteen tai palvelun markkamääräisen hinnan riippuvuutta hinnasta euroissa. Funktio muuntaa siis eurohinnan markoiksi. Hinta euroissa voi periaatteessa olla mikä tahansa positiivinen reaaliluku, joten funktion määrittelyjoukoksi voidaan ottaa $\mathbb{R}_+$ (positiiviset reaaliluvut). Funktion arvo eli hinta markoissa saadaan kertomalla euromääräinen hinta valuuttakurssilla (käytetään vuoden 2002 valuuttakurssia: 1 euro = 5,94573 markkaa) eli riippuvuussääntö voidaan kirjoittaa muodossa $f(x) = 5{,}94573 \cdot x$. Näemme helposti, että jokaista $x$ vastaa vain yksi tietty $f(x)$, joten funktion arvon yksikäsitteisyys toteutuu. Lisäksi $f(x)$:n kaikki arvot ovat reaalilukuja, joten funktion maalijoukoksi voidaan ottaa $\mathbb{R}$. Funktio voidaan siis kokonaisuudessaan määritellä seuraavasti:

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 5{,}94573 \cdot x.$$

Huomaa, että vaikka markkahintakin on tässä aina positiivinen, ei maalijoukoksi tarvitse valita joukkoa $\mathbb{R}_+$. Maalijoukon tarvitsee ainoastaan *sisältää* kaikki funktion arvot, mutta kaikkien maalijoukon lukujen ei tarvitse olla funktion arvoja.

(Joku voisi myös huomauttaa, että hinnat olisi hyvä ilmoittaa sentin tarkkuudella, jolloin määrittelyjoukkoa voitaisiin merkitä näin: $\{0.01, 0.02, 0.03, \dots\}$.)

Sovelluksissa funktio kuvaa usein jonkin suureen kehitystä ajan tai paikan mukana. Voidaan esimerkiksi ilmoittaa lämpötila ajan tai paikan funktiona. Tällöin riippuvuusehtoa ei yleensä voida antaa tarkkana laskulausekkeena. Toisinaan funktio ilmoittaa abstraktimpia riippuvuuksia, kuten aitauksen pinta-alan käytettävissä olevan aitamateriaalin funktiona. Kun funktiota käsitellään matemaattisesti, ei kuitenkaan ole tärkeää, minkätyyppisestä riippuvuudesta on kysymys.

**Esimerkki 2.2.** Kuvitellaan auton nopeusmittarin lukemaa ajan funktiona. Tarkkaillaan mittaria kahden tunnin ajan ja ilmoitetaan aika minuutteina. Sovitaan lisäksi, että tarkkailun alussa aika on 0. Nopeus ilmoitetaan kilometreinä tunnissa, ja se on aina reaaliluku. Näin saadaan funktio $v : [0, 120] \to \mathbb{R}$. Tietenkään tälle funktiolle ei voi antaa riippuvuussääntöä laskulausekkeena, koska nopeuden vaihtelu tuskin noudattaa mitään tiettyä kaavaa. Myöskin on mahdotonta kirjata nopeutta ylös *jokaisena* ajanhetkenä välillä $[0, 120]$, joten emme voi edes tuntea kaikkia $v$:n arvoja. Kuitenkin tiedetään, että jokaisella ajanhetkellä mittari varmasti näyttää jotain yhtä tiettyä lukua, joten funktion arvo $v(t)$ on yksikäsitteisesti olemassa jokaista ajanhetkeä $t$ kohti. Lisäksi kokemusmaailmamme osoittaa, että tämä kyseinen funktio on *jatkuva* ja jopa *derivoituva*. Nämä käsitteet määritellään myöhemmin.

**Esimerkki 2.3.** Edellistä esimerkkiä ei voi kääntää toisin päin. Emme voi määritellä funktiota, joka kuvaisi ajanhetken riippuvuutta nopeusmittarin lukemasta, sillä tämä riippuvuus ei ole yksikäsitteistä. Tietty mittarilukema voi esiintyä useinkin matkan aikana, ei pelkästään yhdellä määrätyllä hetkellä. Jos sen sijaan kyse olisi kuljetusta matkasta eikä auto olisi koskaan pysähdyksissä (eikä kulkisi taaksepäin), voitaisiin riippuvuussuhde määritellä kummin päin vain. Kun kuljettu matka voi vain kasvaa, vastaa kutakin saavutettua matkaa jokin tietty ajanhetki.

Tarkastellaan seuraavaksi joitain tuttuja laskulausekkeilla määriteltäviä funkioita.

**Esimerkki 2.4.** Yksinkertaisin reaaliarvoinen funktio on vakiofunktio. Vakiofunktion tapauksessa funktion arvon "riippuvuus" lähtöjoukon alkion arvosta on kenties makuasia, funktion arvo kun on kaikkialla sama. Esim. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$ antaa kaikilla luvuilla $x$ funktion arvoksi luvun 2.

**Esimerkki 2.5.** Funktioita $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joiden arvot ovat muotoa

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kutsutaan *polynomifunktioiksi*. Polynomifunktion arvo saadaan siis laskemalla yhteen lähtöjoukon arvon erilaisilla vakioilla kerrottuja potensseja eli *termejä*. Polynomifunktioita ovat esimerkiksi $P_1(x) = x^2$ ja $P_2(x) = 3x^5 - 2x + 7$. Lukuja $a_j$ kutsutaan polynomin *kertoimiksi*, jotka voivat tietysti olla myös negatiivisia (kuten polynomin $P_2(x)$ toinen kerroin $a_1 = -2$). Suurin luku, joka esiintyy $x$:n potenssissa on polynomin *kertaluku eli aste*.

**Esimerkki 2.6.** Funktiot $R : A \to \mathbb{R}$, joiden arvot voidaan ilmoittaa muodossa $R(x) = P(x)/Q(x)$, missä $P$ ja $Q$ ovat molemmat polynomifunktioita, ovat *rationaalifunkioita*. **Huomaa**, että rationaalifunktio ei ole määritelty nimittäjän $Q$ nollakohdissa. Esimerkiksi funktion $R_1(x) = 1/x$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (reaaliluvut ilman nollaa), ja funktion $R_2(x) = (2x+3)/(x^2 - 2x)$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

Edellisessä esimerkissä käytettiin merkintää $A \setminus B$, joka tarkoittaa joukkojen *erotusta* ja lausutaan "A miinus B" tai "A pois B". Esimerkiksi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ tarkoittaa joukkoa, joka sisältää kaikki muut reaaliluvut paitsi kokonaisluvut. Tätä merkintää, kuten muitakaan joukko-opillisia merkintöjä, ei tarvitse aktiivisesti osata, mutta se on varsinkin rationaalifunktioiden yhteydessä kätevä.

**Esimerkki 2.7.** Funktiota, jonka arvot lasketaan eri osissa lähtöjoukkoa eri lausekkeesta, kutsutaan *paloittain määritellyksi*. Esimerkiksi itseisarvofunktio voidaan määritellä seuraavilla lausekkeilla:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Jako voi olla monimutkaisempikin, kuten seuraavalla funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{kun } x \text{ on joku muu kokonaisluku kuin } 0 \\ 1, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

## 2.2 Yhdistetty funktio

Kun jonkin funktion arvo annetaan toiselle funktiolle muunnettavaksi, puhutaan *yhdistetystä funkiosta*. Yhdistetyt funktiot ovat erittäin tärkeitä sekä teorian että sovellusten kannalta.

**Määritelmä 2.8.** Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$. Funktioiden $f$ ja $g$ *yhdistetty funktio* $f \circ g : A \to \mathbb{R}$ määritellään seuraavasti:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Funktiota $f$ kutsutaan *ulkofunktioksi* ja funktiota $g$ *sisäfunktioksi*.

Funktio $f \circ g$ muuntaa siis kunkin luvun $x$ käyttämällä ensin funktiota $g$ ja tämän tulokseen $g(x)$ edelleen funkiota $f$. Huomaa, että ulkofunktion $f$ määrittelyjoukon täytyy sisältää kaikki $g$:n mahdolliset arvot.

**Esimerkki 2.9.** Olkoon $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkioita, joiden riippuvuussäännöt ovat $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x+1$. Lasketaan aluksi yhdistetyn funktion $f \circ g$ arvo luvulla 2. Ensin käytetään funktiota $g$, joka muuttaa luvun 2 luvuksi 3. Sitten funktio $f$ muuttaa saadun luvun 3 luvuksi 9.

On hyvin olennaista, miten päin funktiot kirjoitetaan. Oikealla puolella olevaa käytetään aina ensiksi. Jos esimerkiksi syötetään luku 2 ensin funktioon $f$, saadaan 4, joka syötettynä funktioon $g$ antaa tulokseksi 5. Siispä $(f \circ g)(2) \neq (g \circ f)(2)$.

Yhdistetyn funktion riippuvuussääntö muodostetaan samalla periaatteella. Näin saadaan esimerkiksi seuraavanlaisia riippuvuussääntöjä:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2, \\
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1, \\
(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4, \\
(g \circ g)(x) &= g(g(x)) = g(x+1) = (x+1) + 1 = x + 2.
\end{aligned}$$

Mikään ei estä myöskään yhdistämästä useampia funkioita. Näin saataisiin esimerkiksi funktio $f \circ g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

$$(f \circ g \circ f)(x) = f(g(f(x))) = f(g(x^2)) = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2.$$

Yhdistetyn funktion käsite on tärkeä muun muassa siksi, että monet funktiot voidaan tulkita yhdistetyiksi funkioiksi. Tällainen tulkinta voidaan aina tehdä monella eri tavalla, ja tilanteesta riippuen on valittava parhaiten sopiva tulkinta. Tästä on jatkossa hyötyä esimerkiksi derivoinnin yhteydessä.

**Esimerkki 2.10.** Määritellään $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 1/(x^2 + 1)^2$. Tämä $h$ voidaan tulkita yhdistetyksi funktioksi esimerkiksi seuraavasti. Määritellään $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x^2 + 1)^2$. Nyt $h = f \circ g$, sillä kaikilla luvuilla $x$ pätee

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f((x^2 + 1)^2) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2} = h(x).$$

Lisäksi $g$ saa vain positiivisia arvoja, joten $f$:n määrittelyjoukko sisältää $g$:n arvot. Funktio $h$ voidaan kuitenkin tulkita yhdistetyksi funktioksi monella muullakin tavalla. Voidaan esimerkiksi valita $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 1/x^2$, ja $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = x^2 + 1$. Nytkin $h = f_1 \circ g_1$, sillä kaikilla $x$ pätee

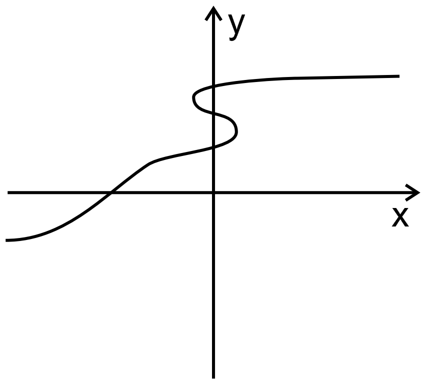
$$(f_1 \circ g_1)(x) = f_1(g_1(x)) = f_1(x^2 + 1) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2} = h(x).$$

**Huom.** On tärkeää ymmärtää oikein yhdistetyn funktion muodostukseen liittyvät merkinnät. Jos yhdistetään esimerkiksi funktiot $f(x) = 2x$ ja $g(x) = x^2$, tämä **ei tarkoita** sitä, että jollain tapaa yhdistettäisiin *lausekkeet* $2x$ ja $x^2$. Merkintä $f(x) = 2x$ tarkoittaa funktion riippuvuussääntöä, yhtä hyvin voitaisiin kirjoittaa $f(y) = 2y$ tai vaikkapa $f(\text{“kukkuluuruu”}) = 2 \cdot \text{“kukkuluuruu”}$. Muuttujan nimellä ei tässä ole mitään merkitystä: mitä tahansa voidaan sijoittaa sen paikalle. Esimerkiksi yhdistetyn funktion $f \circ g$ riippuvuussäännöksi saadaan $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2$. Huomaa, miten tässä funktion $f$ muuttujan $x$ paikalle on sijoitettu $g$:n antama arvo $x^2$, jolloin saadaan puolestaan $f$:n riippuvuussäännön mukaisesti $f(x^2) = 2x^2$.

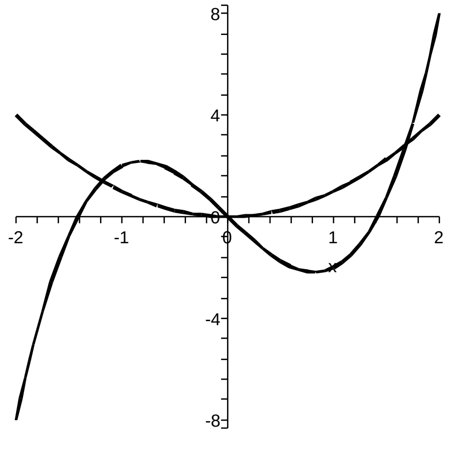
## 2.3 Kuvaaja

Reaaliarvoinen funktio voidaan usein esittää koordinaatistoon piirretyn kuvaajan eli *graafin* avulla. Tällöin funktion erityispiirteet, kuten kasvunopeus, jaksollisuus, ääriarvot ja epäjatkuvuuskohdat on helppo hahmottaa. On kuitenkin muistettava, että tarkkakaan piirros ei voi tyhjentävästi kuvata funktion käyttäytymistä, eikä kaikista funktioista edes pystytä piirtämään havainnollistavaa kuvaa. Siksi kuvaajan perusteella *ei koskaan voi sanoa mitään varmaa* funktion arvoista, vaan arviot on aina pystyttävä perustelemaan laskien. Kuvaajan piirtäminen on kuitenkin yksi parhaista keinoista oppia ymmärtämään jonkin tietyn funktion luonnetta.

Kaikki koordinaatistoon piirretyt käyrät eivät kuitenkaan kuvaa funktioita. Koska funktion arvojen täytyy olla yksikäsitteisiä, ei yhtä x-arvoa saa vastata kuvaajassa useampia y-arvoja. Jos siis joku pystysuora leikkaa kuvaajaksi väitetyn käyrän useammassa kuin yhdessä kohdassa, kyseessä ei ole reaalifunktion kuvaaja. Funktion kuvaaja ei esimerkiksi voi "laskostua" näin:



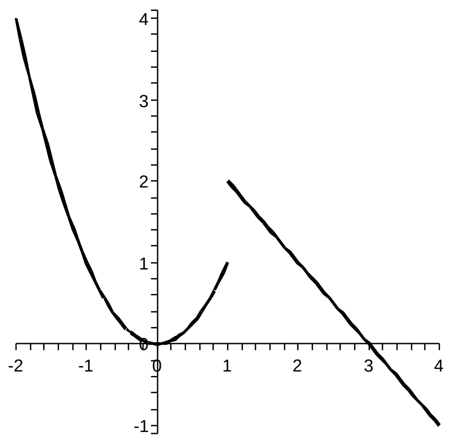

**Esimerkki 2.11.** Polynomifunktioiden $f(x) = x^2$ ja $g(x) = 2x^3 - 4x$ kuvaajat. Kuvan perusteella näyttäisi, että piste $x = 1{,}4$ olisi funktion $g$ nollakohta, mutta oikeasti $g(1{,}4) = -0{,}112$.



**Esimerkki 2.12.** Paloittain määritellyn funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} x^2, \text{ kun } x < 1 \\ -x + 3, \text{ kun } x \geq 1 \end{cases}$$

kuvaaja. Funktiolla on niin sanottu *epäjatkuvuuskohta* pisteessä $x = 1$. Kuvaajasta ei näe, onko $h(1) = 1$ vai $h(1) = 2$. Funktion lausekkeen perusteella tiedetään, että jälkimmäinen pätee.




# 3 Raja-arvo ja jatkuvuus

## 3.1 Raja-arvo

Funktion raja-arvo on tavallaan tämän kurssin tärkein peruskäsite, sillä tarvitaan käsitteiden kuten jatkuvuuden, derivaatan ja integraalin määrittelyssä. Raja-arvon täsmälliseen tarkasteluun ei kurssilla kuitenkaan valitettavasti riitä aikaa, joten sen suhteen pyritään tukeutumaan mielikuviin.

Raja-arvo kuvaa funktion käyttäytymistä jonkin pisteen lähistöllä. Voitaisiin sanoa vaikka niin, että funktion raja-arvo pisteessä $x_0$ on se luku, joka näyttäisi olevan funktion arvo kyseisessä pisteessä, mikäli tarkasteltaisiin vain tämän pisteen lähellä olevia pisteitä. Graafisesti raja-arvoa voisi kuvata siten, että jos funktion kuvaaja näyttää lähestyvän jotakin arvoa kohdassa $x_0$, tämä arvo on funktion raja-arvo pisteessä $x_0$ (vaikka itse arvo $f(x_0)$ olisi jotain muuta).

**Esimerkki 3.1.** Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, pisteen $x = 1$ lähistöllä. Laskemalla joitakin funktion arvoja tuon pisteen ympärillä havaitaan, että funktion arvot näyttävät lähestyvän arvoa 2 pisteessä 1, eli $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0,5 | 1 |
| 0,8 | 1,6 |
| 0,9 | 1,8 |
| 0,99 | 1,98 |
| 1 | - |
| 1,01 | 2,02 |
| 1,1 | 2,2 |
| 1,2 | 2,4 |

Tässä tapauksessa funktion raja-arvo pisteessä 1 on sama kuin funktion arvo. Tämä johtuu siitä, että valitsimme tarkasteltavaksi *jatkuvan* funktion.

Alla esitellään raja-arvon täsmällinen määritelmä. Sitä on käytännössä usein vaikea soveltaa, ja tällä kurssilla riittääkin raja-arvon käsitteen intuitiivinen ymmärtäminen. On myös olemassa laskusääntöjä, joiden avulla raja-arvon voi päätellä tietyissä tilanteissa.

**Määritelmä 3.2.** Luku $a$ on funktion $f$ *raja-arvo* pisteessä $x_0$, jos kutakin mielivaltaisen pientä positiivista lukua $E$ kohti voidaan aina löytää jokin väli pisteen $x_0$ ympäriltä niin, että tällä välillä lasketut funktion arvot sijaitsevat välillä $[a-E, a+E]$ (siis korkeintaan luvun $E$ päässä luvusta $a$), lukuunottamatta mahdollisesti arvoa $f(x_0)$. Raja-arvoa merkitään $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$.

**Huom.** Täytyy muistaa, ettei funktion *arvo* pisteessä $x_0$ vaikuta mitenkään funktion *raja-arvoon* pisteessä $x_0$. Raja-arvo voi olla myös olemassa, vaikka funktio ei olisi edes määritelty kyseisessä kohdassa. Tämä on itse asiassa eräs tärkeimmistä syistä raja-arvon käyttöön.

**Esimerkki 3.3.** Olkoon $f : \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = (2x^2 - 10x + 12)/(x - 2)$. Funktio ei ole määritelty kohdassa $x = 2$, koska nollalla ei voi jakaa. Kun kuitenkin lasketaan arvoja kakkosen lähellä olevissa pisteissä, huomataan, että ne lähestyvät lukua $-2$. Siispä varmaankin $\lim_{x\to 2} f(x) = -2$.

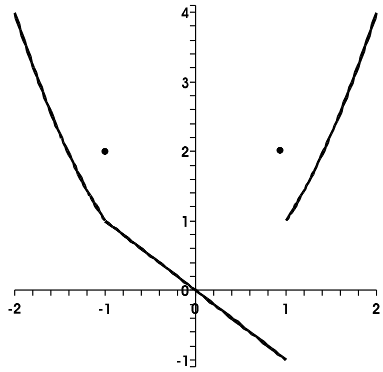
| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1,5 | $-3$ |
| 1,9 | $-2{,}2$ |
| 1,99 | $-2{,}02$ |
| 2 | - |
| 2,01 | $-1{,}98$ |
| 2,1 | $-1{,}8$ |
| 2,5 | $-1$ |

Funktion kuvaajasta raja-arvon olemassaolo on usein helppo nähdä.

**Esimerkki 3.4.** Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x < -1 \text{ tai } x > 1 \\ 2, & \text{kun } x = -1 \text{ tai } x = 1 \\ -x, & \text{kun } x = -1 < x < 1. \end{cases}$$

Funktiolla ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 1$, sillä tuon pisteen vasemmalla puolella funktion arvot lähestyvät arvoa $-1$, kun taas oikealla puolella ne lähestyvät pistettä 1. Arvot eivät siis lähesty mitään tiettyä arvoa. Sen sijaan funktion raja-arvo pisteessä $x = -1$ on nähtävästi 1, vaikka $f(1) = 2$.




Voidaan myös tutkia, mitä arvoa funktion arvot lähestyvät muuttujan arvojen kasvaessa tai vähetessä rajatta. Tällaista arvoa, jos sellainen löytyy, kutsutaan joskus raja-arvoksi äärettömyydessä ja merkitään $\lim_{x\to\infty} f(x)$ tai $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

**Esimerkki 3.5.** Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x/(2x + 4)$. Laskemalla hyvin suuria funktion arvoja havaitaan, että funktion arvot lähestyvät lukua $1/2$, kun muuttujan arvot kasvavat rajatta. Toisin sanoen $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1/2$.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 10 | 0,4167 |
| 100 | 0,4902 |
| 1000 | 0,4990 |
| 10000 | 0,4999 |

Käytännössä seuraavat laskusäännöt helpottavat raja-arvojen toteamista:

1. $\lim_{x\to x_0} c = c$, kun $c$ on vakio, joka ei riipu $x$:stä.

2. $\lim_{x\to x_0} x = x_0$.

3. Jos $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, niin
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab.$$
Jos lisäksi $b \neq 0$, niin
$$\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = a/b.$$

**Esimerkki 3.6.** Lasketaan $\lim_{x\to 2} f(x)$, kun $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = 3x^2 - 1$. Puretaan raja-arvon laskeminen useampaan osaan säännön 3 avulla ja lasketaan sitten yksinkertaisemmat raja-arvot sääntöjen 1 ja 2 mukaisesti:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} P(x) &= \lim_{x\to 2}(3x^2 - 1) = \lim_{x\to 2} 3x^2 + \lim_{x\to 2}(-1)\\ &= \lim_{x\to 2} 3 \cdot \lim_{x\to 2} x \cdot \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2}(-1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) = 11.\end{aligned}$$

Tämän esimerkin valossa voidaan antaa yleinen sääntö kaikille polynomifunktioille $P$:

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

Polynomin raja-arvon pisteessä $x_0$ voi siis laskea sijoittamalla luku $x_0$ suoraan polynomin lausekkeeseen. Rationaalifunktion kohdalla sama onnistuu, kunhan nimittäjään ei tällä tavoin tule 0.

**Esimerkki 3.7.** Lasketaan rationaalifunktion $R(x) = 2x/(x+1)$ raja-arvo kohdassa $x = 1$ edellä annettujen sääntöjen avulla:

$$\lim_{x\to 1} R(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{x+1} = \frac{\lim_{x\to 1} 2x}{\lim_{x\to 1} x+1} = \frac{\lim_{x\to 1} 2 \cdot \lim_{x\to 1} x}{\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 1} = \frac{2\cdot 1}{1+1} = 1.$$

**Esimerkki 3.8.** Tarkastellaan rationaalifunktiota $R(x) = (x^2-x)/(x-1)$. Tämän raja-arvoa $\lim_{x\to 1} R(x)$ ei voida laskea sijoittamalla suoraan luku 1 funktion lausekkeeseen, koska nimittäjään tulisi tällöin 0. Raja-arvo voidaan kuitenkin päätellä seuraavasti. Aina kun $x \neq 1$, pätee

$$R(x) = \frac{x^2-x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} = x.$$

Koska funktion raja-arvo pisteessä 1 ei riipu funktion arvosta kyseisessä pistessä, voidaan funktion $R(x)$ sijalla raja-arvolaskussa käyttää näin saatua sievennettyä muotoa. Todetaan siis, että $\lim_{x\to 1} R(x) = \lim_{x\to 1} x = 1$.

Seuraavat säännöt koskevat raja-arvoja äärettömyydessä.

1. $\lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$.
2. $\lim_{x\to\pm\infty} 1/x = 0$.
3. $\infty + \infty = \infty \cdot \infty = \infty$.
4. Jos $c > 0$, niin $c \cdot \infty = \infty$; jos $c < 0$, niin $c \cdot \infty = -\infty$.

Jos raja-arvoksi tulee $\infty$, se tarkoittaa, että funktion arvot *kasvavat rajatta*. Vastaavasti, jos raja-arvoksi tulee $-\infty$, arvot *vähenevät rajatta*. Sääntöä 2 käytetään siten, että esimerkiksi

$$\lim_{x\to\infty} 2x = 2 \cdot \lim_{x\to\infty} x = 2\cdot\infty = \infty.$$

**Huomaa**, että raja-arvoja $\infty - \infty$, $0\cdot\infty$ tai $\infty/\infty$ ei ole määritelty.

**Esimerkki 3.9.** Rationaalifunktioiden raja-arvoja äärettömyydessä voidaan laskea supistamalla lauseke termillä $x^r$, missä $r$ on nimittäjän aste. Tällä tavoin saadaan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+3x}{2x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1+\frac{3}{x}}{2+\frac{5}{x^2}} = \frac{-1+0}{2+0} = -\frac{1}{2}.$$

Tässä käytettiin hyväksi edellä mainittuja laskusääntöjä. Toisaalta

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{2x^2-8} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{8}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{8}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+0}{2-0} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}x = \infty.$$

Raja-arvoa ei ole, vaan funktion arvot kasvavat rajatta.

### 3.2 Jatkuvuus

Monien yleisten reaalifunktioiden kuvaajat ovat katkeamattomia käyriä. Tämä johtuu siitä funktion ominaisuudesta, että muuttujan arvon muuttuessa hyvin vähän myös funktion arvo muuttuu vähän eikä tee hyppäystä. Tätä ominaisuutta sanotaan *jatkuvuudeksi.* Luonnossa on paljon esimerkkejä jatkuvista funktioista, kuten vaikkapa huoneen keskilämpötila ajan funktiona. Lukuunottamatta hyvin poikkeavia olosuhteita lämpötila ei tee hyppäyksiä ajan kuluessa. Myös polynomifunktiot, rationaalifunktiot sekä juurifunktiot ovat kaikki jatkuvia funktioita. Jatkuvuus jossain pisteessä riippuu siis funktion käyttäytymisestä tuon pisteen ympäristössä, mistä syystä jatkuvuus voidaan määritellä kätevästi raja-arvon avulla.

**Määritelmä 3.10.** Funktio $f$ on *jatkuva pisteessä* $x_0$, jos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

eli funktion raja-arvo pisteessä $x_0$ on sama kuin funktion arvo kyseisessä pisteessä. Funktio on *kaikkialla jatkuva* tai yksinkertaisesti *jatkuva*, jos se on jatkuva kaikissa *määrittelyjoukkonsa* pisteissä.

**Huom.** Funktion kutsumiseen jatkuvaksi eivät vaikuta raja-arvot sellaisissa pisteissä, joissa funktiota ei ole määritelty. (Tällaisissa pisteissä funktio ei määritelmän mukaan voisikaan olla jatkuva.) Toisaalta funktio ei voi olla jatkuva myöskään sellaisessa pisteessä, jossa sillä ei ole raja-arvoa.

**Esimerkki 3.11.** Aiemmin on todettu, että jos $P$ on polynomifunktio, niin kaikilla luvuilla $x_0$ pätee $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$. Siispä kaikki polynomifunktiot ovat jatkuvia. Myös kaikki rationaalifunktiot ovat jatkuvia koko määrittelyjoukossaan.

**Esimerkki 3.12.** Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \neq 1 \\ a, & \text{kun } x = 1. \end{cases}$$

Funktio $f$ on jatkuva ainakin kaikissa muissa pisteissä paitsi pisteessä $x = 1$. Koska raja-arvo pisteessä $x = 1$ riippuu ainoastaan funktion arvoista tuota pistettä ympäröivissä pisteissä, voidaan päätellä $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x = 1$. Jos nyt $a = 1$, niin funktion arvo pisteessä 1 on sama kuin raja-arvo kyseisessä pisteessä, ja funktio on jatkuva koko määrittelyjoukossaan. Jos $a \neq 1$, piste $x = 1$ on funktion $f$ *epäjatkuvuuskohta.*

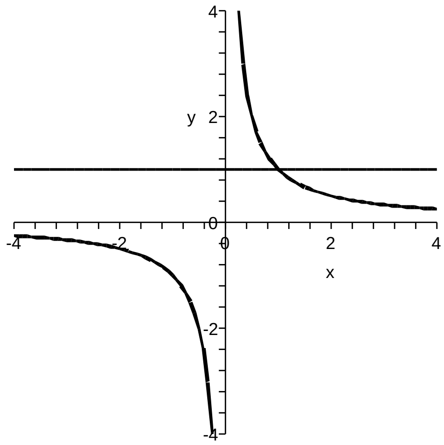
**Esimerkki 3.13.** Tarkastellaan rationaalifunktioita $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, $g(x) = x/x$. Molemmat funktiot ovat jatkuvia kaikissa määrittelyjoukkonsa pisteissä. Funktiolla $f$ ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 0$, sillä tuota pistettä lähestyttäessä $f$ saa mielivaltaisen suuria ja pieniä arvoja. Toisaalta

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x/x = \lim_{x \to 0} 1 = 1.$$

Nyt voitaisiin määritellä

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x), & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Tällöin saataisiin uusi jatkuva funktio $g_1$, joka on määritelty kaikilla luvuilla ja joka laajentaa funktiota $g$. Tällaista funktiota kutsutaan $g$:n jatkuvaksi jatkeeksi. Toisaalta funktiota $f$ ei voi laajentaa jatkuvana pisteeseen 0, koska sillä ei ole lainkaan raja-arvoa tuossa pisteessä.




# 4 Derivaatta

## 4.1 Derivaatan määritelmä

Monien funktioiden kuvaajilla on sellainen selkeä ominaisuus, että ne näyttävät etenevän välillä ylös-, välillä alaspäin, välillä jyrkemmin, välillä loivemmin. Tämä on merkki siitä, että funktion arvot välillä kasvavat ja välillä vähenevät. Paikassa, jossa kasvaminen vaihtuu vähenemiseksi, on yleensä jonkinlainen huippukohta. On ilmeistä, että tällaiset ominaisuudet voivat olla kiinnostavia. Jos funktio esimerkiksi kuvaa lämpötilaa ajan funktiona, voimme olla kiinnostuneita lämpenemisen tai jäähtymisen nopeudesta jollain tietyllä hetkellä. Toisinaan puolestaan saattaa olla tärkeää, millä hetkellä lämpötila saavuttaa huippuarvonsa.

Funktion *hetkellistä muutosnopeutta* (eli kuvaajan jyrkkyyttä) tietyssä kohdassa kuvaa funktion *derivaatta*. Tällaisen muutosnopeuden määrittelemisessä törmätään kuitenkin heti ongelmaan. Kahdesta funktion arvosta on helppo sanoa, kumpi on suurempi, mutta jos tarkastellaan vain yhtä funktion arvoa (eli yhtä pistettä kuvaajalla) on kasvusta tai vähenemisestä mahdotonta puhua. Tarvitaan lisätietoa tuon pisteen läheisyydessä saatavista arvoista, mikä puolestaan johtaa raja-arvon käyttöön.

Fysiikassa nopeus (oikeammin keskinopeus) määritellään kuljetun matkan suhteena siihen käytettyyn aikaan (siis nopeus on matka jaettuna ajalla). Samaan tapaan määritellään myös funktion muutosnopeus. Jos $x$ ja $x_1$ ovat kaksi eri funktion määrittelyjoukon lukua, määritellään niin sanottu *erotusosamäärä* seuraavalla kaavalla:

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Erotusosamäärä on siis funktion arvojen muutoksen suhde muuttujan arvojen muutokseen välillä $[x, x_1]$ (tai välillä $[x_1, x]$, jos $x_1 < x$), ja se kuvaa funktion keskimääräistä muutosnopeutta kyseisellä välillä. Tavoitteena on nyt kuvata funktion muutosnopeutta lähellä pistettä $x$ ($x_1$ on eräänlainen apupiste), ja tätä varten merkitään välin pituutta $h = x_1 - x$, jolloin $x_1 = x + h$ ja erotusosamäärän lauseke saadaan käyttökelpoisempaan muotoon:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Tämä on siis funktion keskimääräinen muutosnopeus välillä $[x, x+h]$ tai $[x+h, x]$, riippuen siitä, onko $h$ positiivinen vai negatiivinen.

Mitä lähemmäs nollaa erotusosamäärän lausekkeen (positiivinen tai negatiivinen) $h$ tulee, sitä tarkemmin erotusosamäärä kuvaa funktion muutosnopeutta pisteen $x$ lähellä. Muutosnopeus pisteessä $x$ voidaan siksi määritellä ottamalla erotusosamäärästä raja-arvo $h$:n lähestyessä nollaa. Tätä raja-arvoa ei kuitenkaan välttämättä ole olemassa. Jos funktio on esimerkiksi epäjatkuva jossain pisteessä, sen arvo muuttuu tuossa pisteessä äkisti — ikään kuin äärettömän nopeasti — ja funktion muutosnopeutta ei voida määritellä.

**Määritelmä 4.1.** Funktio $f$ on *derivoituva pisteessä* $x$, jos erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on olemassa. Tätä raja-arvoa merkitään $f'(x)$, $Df(x)$ tai $\frac{df}{dx}(x)$, ja kutsutaan funktion $f$ *derivaataksi* pisteessä $x$. Funktio on *derivoituva*, jos se on derivoituva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä.

Derivaatta kuvaa siis funktion hetkellistä muutosnopeutta. Jos funktio kuvaa kuljettua matkaa ajan funktiona, erotusosamäärä jollain välillä kuvaa keskinopeutta tuolla välillä. Derivaatta jossain pisteessä sen sijaan kuvaa hetkellistä nopeutta tuossa pisteessä. Jos taas funktio kuvaa nopeutta, derivaatta kuvaa kiihtyvyyttä; jos funktio kuvaa lämpötilaa ajan funktiona, derivaatta kuvaa lämpenemis- tai jäähtymisnopeutta.

Funktion $f$ derivaatan arvot eri pisteissä muodostavat derivaattafunktion $f'$. Derivaattafunktion määrittelyjoukko ovat ne pisteet, joissa derivaatta voidaan määritellä eli alkuperäinen funktio $f$ on derivoituva. Derivaattafunktion määrittämistä kutsutaan funktion *derivoimiseksi*. Derivaattafunktio $f'$ voidaan derivoida uudestaan, jolloin saadaan korkeampia derivaattoja $f''$, $f'''$ jne. Jos derivaattafunktio $f'$ on annettu, alkuperäisen funktion $f$ selvittämistä kutsutaan *integroinniksi*. Tästä lisää myöhemmin.

**Esimerkki 4.2.** Tarkastellaan polynomifunktiota $f(x) = x^2$ pisteen $x = 2$ ympärillä. Lasketaan aluksi funktion keskimääräinen muutosnopeus välillä $[2, 3]$:

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{9 - 4}{1} = 5.$$

Toisaalta muutosnopeus välillä $[1, 2]$ on

$$\frac{f(1) - f(2)}{1 - 2} = \frac{1 - 4}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

(Huomaa, että tulosten kannalta ei ole väliä, kummin päin erotukset osoittajassa ja nimittäjässä kirjoitetaan, kunhan ne ovat molemmissa samoin päin.) Tuloksista nähdään, että funktio kasvaa hieman nopeammin välillä $[2,3]$ kuin välillä $[1,2]$.

Lasketaan sitten toisen lausekkeen avulla erotusosamäärä, kun tarkasteluvälin pituus on $h$:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \frac{4h+h^2}{h}.$$

Koska $h$ kuvaa kahden eri luvun erotusta, se ei voi olla nolla. Voidaan siis supistaa saatu lauseke $h$:lla:

$$\frac{4h+h^2}{h} = \frac{\frac{4h}{h}+\frac{h^2}{h}}{\frac{h}{h}} = \frac{4h+h}{1} = 4+h.$$

Erotusosamäärä riippuu siis $h$:sta. Jos sijoitetaan $h=1$, saadaan muutosnopeus välillä $[2,2+h]=[2,3]$, joka laskettiin jo edellä. Jos taas sijoitetaan $h=-1$, saadaan muutosnopeus välillä $[2+h,2]=[1,2]$. Funktion derivaatta on erotusosamäärän raja-arvo, kun $h$ lähestyy nollaa, eli

$$\lim_{h\to 0}(4+h) = 4.$$

Funktiolla on siis pisteessä 2 derivaatta $f'(2)=4$.

**Esimerkki 4.3.** Tarkastellaan funktiota $f(x)=|x|$ (itseisarvo) pisteessä $x=0$. Kirjoitetaan erotusosamäärä pisteessä 0, kun merkitään tarkasteluvälin pituutta $h$:lla. Kun $h>0$, niin $|h|=h$, jolloin erotusosamäärä on

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = \frac{h-0}{h} = 1.$$

Toisaalta, kun $h<0$, niin $|h|=-h$, jolloin erotusosamäärä on

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = \frac{-h-0}{h} = -1.$$

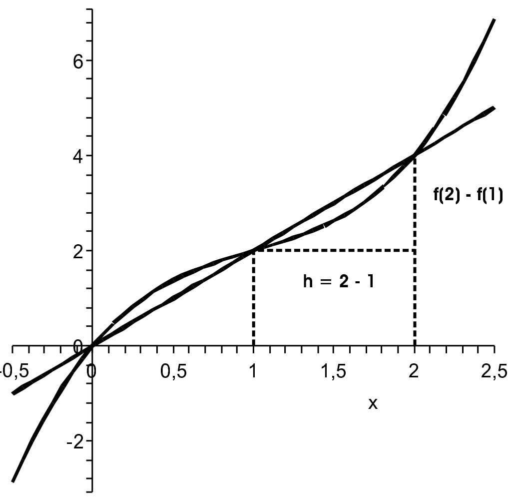
Erotusosamäärän arvo on 1, kun $h$ on positiivinen, ja $-1$, kun $h$ on negatiivinen. Tämä pätee, oli $h$ miten lähellä nollaa tahansa (paitsi tietysti silloin kun $h=0$). Erotusosamäärällä ei siis voi olla raja-arvoa $h$:n lähestyessä nollaa, joten itseisarvo ei ole derivoituva pisteessä $x=0$.

Jos funktiolla on epäjatkuvuuskohta (eli määrittelyjoukon piste, jossa funktio ei ole jatkuva), siinä kohdassa funktion muutosnopeutta ei voida määrittää.

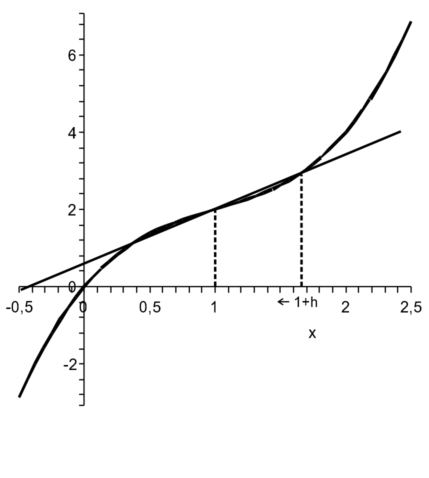
**Lause 4.4.** *Jos funktio on derivoituva pisteessä $x$, se on myös jatkuva pisteessä $x$.*

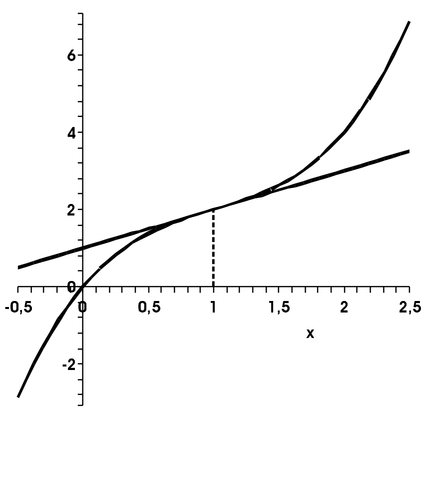
Epäjatkuva funktio ei siis voi olla derivoituva.

## 4.2 Derivaatta kuvaajassa




Tarkastellaan oheista kuvaa, johon on piirretty erään derivoituvan funktion $f$ kuvaaja. Kuvassa on lisäksi suora, joka leikkaa kuvaajaa pisteissä, joiden x-koordinaatit ovat 1 ja 2. Tällaisen suoran kulmakerroin on $(f(2) - f(1))/(2 - 1)$, joka on itse asiassa erotusosamäärän arvo välillä $[1, 2]$. Tämä kulmakerroin kertoo siis funktion keskimääräisen muutosnopeuden tuolla välillä. Erotusosamäärän nimittäjä $h$ vastaa toisen leikkauspisteen x-koordinaatin etäisyyttä ensimmäisen leikkauspisteen x-koordinaatista. Pitämällä ensimmäinen leikkauspiste paikallaan ja pienentämällä arvoa $h$ saadaan toinen leikkauspiste lähestymään ensimmäistä. Tällöin suora kääntyy kuvaajan suuntaiseksi.



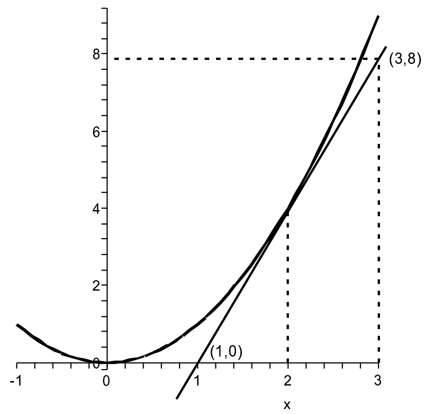




Erotusosamäärän raja-arvo eli derivaatta pisteessä $x$ on siis tuohon pisteeseen kuvaajalle piirretyn *sivuajan eli tangentin* kulmakerroin. (Älä sekoita trigonometrian tangenttifunktioon.)

**Esimerkki 4.5.** Arvioidaan aikaisemman esimerkin funktion $f(x) = x^2$ derivaattaa pisteessä $x = 2$ kuvaajan avulla. Koska derivaatta on kyseiseen pisteeseen piirretyn sivuajan kulmakerroin, hahmotellaan ensin kuvaajalle sivuaja. Asetetaan siis viivain kuvaajalle sen pisteen kohdalle, jonka x-koordinaatti on 2 siten, että se on suunnilleen kuvaajan suuntainen, ja piirretään suora. Tämän jälkeen valitaan sivuajalta kaksi pistettä, jotta sen kulmakerroin voidaan määrittää. Kuvan mukaan pisteet ovat $(1, 0)$ ja $(3, 8)$, joten kulmakertoimeksi saadaan

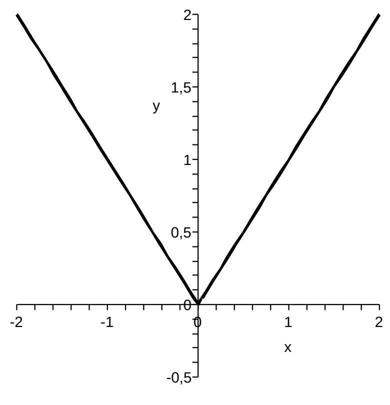
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 0}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4.$$

Aikaisemmin laskettiinkin, että funktion derivaatta tuossa pisteessä on 4.




Graafinen tarkastelu osoittautuu tärkeäksi silloin, kun funktion riippuvuussäännölle ei voida muodostaa mitään lauseketta, tai kun tätä lauseketta ei syystä tai toisesta osata derivoida. Jos funktion arvoja tunnetaan niin paljon, että niiden avulla voidaan piirtää kuvaaja, voidaan sen avulla määrittää likimääräinen derivaatta.

Jos funktion kuvaajaan muodostuu jossain kohtaa terävä kärki, siihen ei voi piirtää yksikäsitteistä sivuajaa. Tällöin funktio ei ole derivoituva. Itseisarvofunktiota tarkasteltaessa huomattiin, että se ei ole derivoituva nollassa, ja kuvaajassa näkyykin terävä kärki origon kohdalla. Funktio ei myöskään ole derivoituva pisteessä, jossa kuvaaja katkeaa, koska se ei ole sellaisessa kohdassa jatkuva.



### 4.3 Laskusääntöjä

Funktion riippuvuussäännön lausekkeesta voidaan yleensä suoraan päätellä funktion derivaatan riippuvuussääntö, ilman että tarvitsee palata derivaatan määritelmään. Jos jo tunnetaan funktioiden $f$ ja $g$ derivaatat, seuraavien sääntöjen avulla voi päätellä myös näiden summan, erotuksen, tulon ja osamäärän derivaatat. Huomaa erityisesti, miten kahden funktion tulo ja osamäärä derivoidaan.

1. $D(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$
2. $D(cf(x)) = cf'(x)$, jos $c$ on vakio
3. $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $D\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Näitä sääntöjä sovellettaessa täytyy kuitenkin ensin varmistaa, että kyseiset funktiot on määritelty ja että ne ovat derivoituvia halutussa kohdassa. Sääntö 4 esimerkiksi vaatii, että $g(x) \neq 0$.

Ennen kuin esitellään muita sääntöjä, palautetaan mieleen negatiivisten potenssien ja murtolukupotenssien määritelmät. Olkoon $k$ kokonaisluku, ja $x \neq 0$. Tällöin

$$x^k = \begin{cases} \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{k}, \text{ jos } k > 0, \\ 1, \text{ jos } k = 0, \\ \dfrac{1}{x^{|k|}}, \text{ jos } k < 0. \end{cases}$$

Lisäksi $0^k = 0$ aina, kun $k \neq 0$. Sen sijaan $0^0$ ei ole määritelty. Tämän mukaan esimerkiksi $2^{-3} = 1/2^3 = 1/8$.

Olkoot sitten $p, q$ kokonaislukuja, $q > 0$. Tällöin

$$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p.$$

Esimerkiksi $x^{1/2} = \sqrt{x}$. Muista, ettei parillinen juuri ole määritelty negatiivisille luvuille ja että parillinen juuri määritellään aina positiiviseksi. (Esimerkiksi $\sqrt{-4}$ ei ole määritelty, ja $\sqrt{4} = 2$, vaikka sekä $2^2 = 4$ että $(-2)^2 = 4$).

Nyt voidaan määritellään potensseja koskevat derivointisäännöt.

5. $D\ c = 0$, jos $c$ on vakio
6. $D\ x^k = kx^{k-1}$, jos $k \neq 0$.

Potenssit derivoidaan siis niin, että otetaan eksponentti kertoimeksi ja vähennetään sen jälkeen eksponentista 1. Huomaa ero vakiokertoimen ja vakiofunktion eli sääntöjen 2 ja 5 välillä. Vakiofunktio häviää derivoitaessa, mutta vakiokerroin säilyy sellaisenaan. Siis esimerkiksi $D\ 3 = 0$, mutta $D\ 3x^2 = 3 \cdot Dx^2$.

**Esimerkki 4.6.** Derivoidaan polynomifunktio:

$$D(x^2 + 2x - 3) = Dx^2 + 2Dx - D\ 3 = 2x^1 + 2x^0 - 0 = 2x + 2.$$

Derivoidaan seuraavaksi erään rationaalifunktion lauseke. Muuttujana on tällä kertaa vaihtelun vuoksi $t$, mutta kirjaimen valinnalla ei ole tietenkään tässäkään yhteydessä mitään merkitystä laskujen kannalta. Tässä on käytettävä osamäärän derivointisääntöä 4:

$$\begin{aligned}
D\frac{t^2 - 3t}{t+1} &= \frac{D(t^2 - 3t)\cdot(t+1) - (t^2 - 3t)\cdot D(t+1)}{(t+1)^2} \\
&= \frac{(2t-3)(t+1) - (t^2 - 3t)(1+0)}{(t+1)^2} \\
&= \frac{(2t^2 + 2t - 3t - 3) - (t^2 - 3t)}{(t+1)^2} = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t+1)^2}.
\end{aligned}$$

Derivoidaan vielä eräs juurifunktio. Juuret kannattaa aina derivoitaessa kirjoittaa potenssien avulla. Tässä tapauksessa käytetään myös negatiivista potenssia, jotta päästään eroon jakolaskusta:

$$\begin{aligned}
D\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}} &= D\ \frac{1}{x^{1/3}} = D\left(x^{-1/3}\right) = -\frac{1}{3}x^{-1/3-1} \\
&= -\frac{1}{3}x^{-4/3} = -\frac{1}{3x^{4/3}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}.
\end{aligned}$$

Viimeinen sääntö koskee yhdistettyjä funktioita.

7. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Yhdistetyn funktion derivaatta pisteessä $x$ saadaan siis laskemalla ulkofunktion derivaatta pisteessä $g(x)$ ja kertomalla se sisäfunktion derivaatalla pisteessä $x$. Kuulostaa monimutkaiselta, mutta idea on se, että ensin derivoidaan ulkofunktio välittämättä siitä, mitä funktion sisällä on. Sen jälkeen derivoidaan sisäfunktio ja nämä tulokset kerrotaan keskenään.

**Esimerkki 4.7.** Derivoidaan funktio $h(x) = (2x+1)^6$. Tämä on kuudennen asteen polynomi, mutta potenssien derivointisäännnön käyttämiseksi täytyisi lausekkeesta ensin kertoa sulut auki eli laskea $(2x+1)(2x+1)(2x+1)(2x+1)(2x+1)(2x+1)$. Tulkitsemalla funktio $h$ sopivalla tavalla yhdistetyksi funktioksi $f \circ g$, vältytään tältä (suurehkolta) vaivalta.

Valitaan ulkofunktioksi $f(x) = x^6$ ja sisäfunktioksi $g(x) = 2x + 1$. Tällöin $h = f \circ g$. Toisaalta $f'(x) = 6x^5$ ja $g'(x) = 2$, joten yhdistetyn funktion derivaatta on

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = f'(2x+1)g'(x) = 6(2x+1)^5 \cdot 2 = 12(2x+1)^5.$$

Tämä voidaan tehdä myös ilman, että sisä- ja ulkofunktiota merkitään erikseen omilla kirjaimillaan. Pidetään vain mielessä, että “ulko-osa on jotain potenssiin 6” ja “sisäosa on 2 kertaa x plus 1". Ensin derivoidaan vain ulko-osa sisäosasta välittämättä. Se jotain, mikä on sisäosassa, pysyy siis koskemattomana (vertaa kaavaan). Näin saadaan

$$(\text{"jotain"})^6 \quad \rightsquigarrow \quad 6(\text{"jotain"})^5.$$

Tähän sijoitetaan paikalleen sisäosa ja kerrotaan sisäosan derivaatalla, jolloin saadaan:

$$6(\text{"jotain"})^5 \cdot 2 = 12(2x+1)^5.$$

Lyhyesti siis

$$D(2x+1)^6 = 6(2x+1)^5 \cdot 2 = 12(2x+1)^5.$$

## 4.4 Ääriarvotehtävät

Derivaatan avulla voidaan tutkia funktion kasvua ja vähenemistä sekä funktion saamia *ääriarvoja*. Määritellään ensin näihin liittyviä käsitteitä.

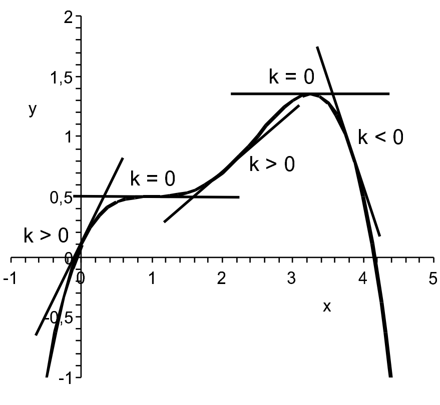
**Määritelmä 4.8.** Funktio $f$ on *kasvava välillä* $[a, b]$, jos kaikilla pisteillä $x < y$ välillä $[a, b]$ pätee $f(x) \leq f(y)$. Jos lisäksi pätee $f(x) < f(y)$, sanotaan, että funktio on *aidosti kasvava* kyseisellä välillä.

Vastaavasti määritellään *vähenevä* ja *aidosti vähenevä* funktio.

**Määritelmä 4.9.** Funktiolla $f$ on pisteessä $x_0$ *paikallinen* eli *lokaali maksimi*, jos pätee $f(x_0) \geq f(x)$ kaikilla pisteillä $x$ jossain pisteen $x_0$ ympäristössä. Tämä arvo on *funktion suurin arvo*, jos pätee $f(x_0) \geq f(x)$ kaikilla määrittelyjoukon pisteillä $x$.

Vastaavasti määritellään *paikallinen minimi* ja *funktion pienin arvo*. Minimejä ja maksimeja kutsutaan funktion *ääriarvoiksi*. Huomaa, että vakiofunktiolla on jokaisessa pisteessä sekä suurin että pienin arvo.

Kasvavuuden, vähenevyyden ja ääriarvojen käsitteitä voi käyttää minkä hyvänsä funktion yhteydessä. Kuitenkin silloin, kun funktio on derivoituva, sen kuvaajalle piirretyn sivuajan kulmakerroin kertoo funktion muutosnopeuden. Siellä, missä funktio kasvaa, kulmakerroin on positiivinen ja siellä, missä funktio vähenee, negatiivinen. Kohta, jossa kasvu vaihtuu vähenemiseksi tai päinvastoin, funktiolla on joko minimi tai maksimi. Tällaisessa kohdassa sivuajan kulmakerroin on nolla.



Puetaan seuraavaksi nämä havainnot lauseiksi. Ensimmäinen seuraa suoraan derivaatan määritelmästä (ei todisteta tässä).

**Lause 4.10.** *Jos derivoituvalla funktiolla on paikallinen ääriarvo pisteessä $x_0$, niin $f'(x_0) = 0$.*

**Huom.** Tämä lause sanoo, että maksimi- ja minimikohdissa derivaatta on nolla. Tämä ei kuitenkaan päde toisin päin, eli *kaikki derivaatan nollakohdat eivät välttämättä ole ääriarvoja.*

Seuraavat lauseet seuraavat niin kutsutusta väliarvolauseesta.

**Lause 4.11.** *Jos $f'(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$, niin funktio $f$ on kasvava kyseisellä välilllä. Jos lisäksi $f'(x) = 0$ vain välin yksittäisissä pisteissä, niin $f$ on aidosti kasvava tuolla välillä.*

Vastaava pätee myös negatiiviselle derivaatalle.

**Lause 4.12.** *Jos $f'(x) \leq 0$ välillä $[a, b]$, niin funktio $f$ on vähenevä kyseisellä välilllä. Jos lisäksi $f'(x) = 0$ vain välin yksittäisissä pisteissä, niin $f$ on aidosti vähenevä tuolla välillä.*

Edellisissä lauseissa sanonta "yksittäisissä pisteissä" tarkoittaa, että ei ole olemassa kokonaista väliä $[a, b]$, jolla derivaatta olisi nolla, vaan ainoastaan erillisiä pisteitä.

**Esimerkki 4.13.** Tarkastellaan 4. asteen polynomifunktiota $f(x) = 3x^4 + 4x^3$. Tutkitaan, missä se on kasvava ja missä vähenevä, sekä minkälaisia ääriarvoja sillä on. Tätä varten lasketaan ensin funktion derivaatta:

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 + 4 \cdot 3x^4 = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x + 1).$$

Derivaatan nollakohdat saadaan helposti tulon nollasäännön avulla:

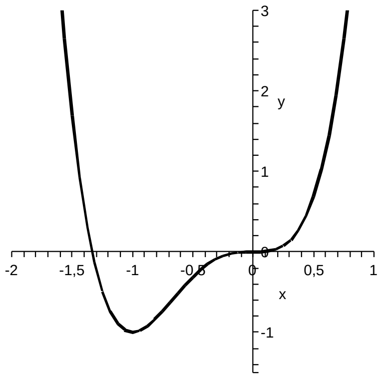
$$f'(x) = 0 \iff 12x^2(x + 1) = 0 \iff 12x^2 = 0 \text{ tai } x + 1 = 0 \iff x = 0 \text{ tai } x = -1.$$

Nollakohdat ovat siis $x = -1$ ja $x = 0$. Lauseen 4.10 perusteella nämä ovat ainoat pisteet, joissa funktiolla voi olla paikallinen minimi tai maksimi. Lisää tietoa näistä pisteistä saadaan esimerkiksi *merkkikaavion* avulla. Siihen kerätään tiedot derivaatan etumerkistä eri väleillä, ja näistä päätellään funktion muutoksen suunta.

Koska derivaatta $f'$ on itse polynomifunktio ja siksi jatkuva kaikilla reaaliluvuilla, sen etumerkki voi vaihtua ainoastaan nollakohdassa (ns. Bolzanon lause). Tiedetään siis, että väleillä $]-\infty, -1[$ , $]-1, 0[$ ja $]0, \infty[$ derivaatan merkki ei muutu. Toisaalta esimerkiksi $f'(-2) = -48$, $f'(-1/2) = 3/2$ ja $f'(1) = 24$. Näistä arvoista nähdään, mikä derivaatan etumerkki on milläkin välillä. Kerätään tulokset kaavioon.

| | $x < -1$ | $-1 < x < 0$ | $0 < x$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ $(-48)$ | $+$ $(3/2)$ | $+$ $(24)$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ |

Lauseiden 4.11 ja 4.12 perusteella $f$ on vähenevä välillä $]-\infty,-1]$ ja kasvava välillä $[-1,\infty[$ . Väheneminen ja kasvaminen on lisäksi aitoa, sillä derivaatta on nolla vain yksittäisissä pisteissä. Nyt voidaan myös päätellä, mitkä derivaatan nollakohdista ovat ääriarvokohtia. Pisteen $x=0$ ympärillä $f$ on aidosti kasvava, joten se ei voi olla ääriarvokohta. Toisaalta pisteen $x=-1$ vasemmalla puolella $f$ on vähenevä ja oikealla puolella kasvava, joten kyseessä on lokaali minimikohta.




**Esimerkki 4.14.** Tarkastellaan edellisen esimerkin tavoin erästä rationaalifunktiota $g : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x^4+1)/x^2$. Funktion derivaatta on

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{D(x^4+1)\cdot x^2 - (x^4+1)\cdot D\,x^2}{(x^2)^2} = \frac{4x^3\cdot x^2 - (x^4+1)\cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{4x^5 - 2x^5 - 2x}{x^4} = \frac{2x^5-2x}{x^4} = \frac{x(2x^4-2)}{x^4} = \frac{2x^4-2}{x^3}. \end{aligned}$$

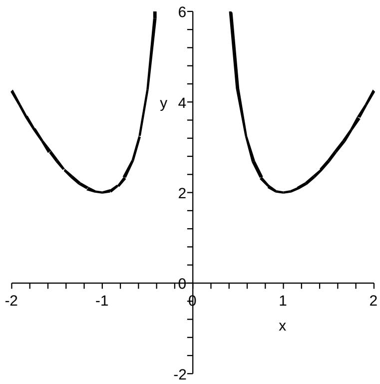
Derivaatta on tietysti määritelty vain funktion määrittelyjoukossa, eli kun $x \neq 0$. Murtolausekkeen nollakohdat ovat samat kuin sen osoittajan nollakohdat, joten

$$g'(x) = 0 \iff 2x^4 - 2 = 0 \iff x^4 = 1 \iff x = \pm 1.$$

Derivaatan nollakohdat ovat siis 1 ja $-1$. Entä derivaatan etumerkki? Kuten edellä, derivaatta on jatkuva siellä missä se on määritelty ja voi tällä alueella vaihtaa etumerkkiään vain nollakohdissaan. Derivaatta ei kuitenkaan ole määritelty nollassa, joten sen etumerkki voi olla erilainen nollan eri puolilla. Tarkastelu on siis jaettava väleihin $]-\infty,-1[$ , $]-1,0[$ , $]0,1[$ ja $]1,\infty[$ . Tutkimalla derivaatan arvoja näillä väleillä saadaan seuraavan näköinen merkkikaavio:

| | $x<-1$ | $-1<x<0$ | $0<x<1$ | $1<x$ |
|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $g(x)$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

Merkkikaavion mukaan kohdissa $x=-1$ ja $x=1$ on lokaalit minimit. (Kohdassa $x=0$ sitä vastoin ei ole lokaalia maksimia, sillä $g$ ei ole siinä määritelty.)




Näillä tiedoilla voidaan jo hyvin tarkasti määrittää derivoituvan funktion kulku. Seuraava lisätieto auttaa ääriarvojen löytämisessä.

**Lause 4.15.** *Suljetulla välillä määritelty jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa tuolla välillä. Jos funktio on lisäksi derivoituva, suurin ja pienin arvo löytyvät joko välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista.*

**Esimerkki 4.16.** Tarkastellaan nyt aikaisemman esimerkin funktiota $f(x) = 3x^4 + 4x^3$ suljetulla välillä $[-2, 1]$. Lasketaan funktion arvot derivaatan nollakohdissa sekä välin päätepisteissä.

$$f(-1) = -1, \quad f(0) = 0, \quad f(-2) = 16, \quad f(1) = 7.$$

Edellisen lauseen perusteella funktion suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 1]$ löytyvät näiden arvojen joukosta. Suurin arvo on selvästi $f(-2) = 16$ ja pienin $f(-1) = -1$.

Monet arkielämän optimointiongelmat voidaan edellä opittujen seikkojen avulla käsitellä derivaatan avulla.

**Esimerkki 4.17.** Maanviljelijällä on 20 metriä verkkoaitaa. Hän haluaa rakentaa kanoille suorakulmaisen aitauksen. Aitatarpeita säästääkseen hän päättää rakentaa aitauksen ladon viereen niin, että ladon seinä korvaa toisen aitauksen pitkistä sivuista. Miten pitkät on aitauksen sivujen oltava, jotta aitauksen pinta-ala olisi mahdollisimman iso?

Ratkaisun löytämiseksi muodostetaan funktio, joka kuvaa maksimoitavaa suuretta jonkin muuttujan funktiona. Maksimoitava suure on aitauksen pinta-ala, joka lasketaan pitkän ja lyhyen sivun pituuksien tulona. Merkitään lyhyen sivun pituutta $x$. Pitkälle sivuille jää tällöin $20 - 2x$ metriä verkkoaitaa. Näin saadaan aitauksen pinta-ala lyhyen sivun pituuden funktiona:

$$A(x) = x \cdot (20 - 2x) = -2x^2 + 20x.$$

Lyhyt sivu on vähintään 0 ja enintään 10 metriä pitkä. Funktio $A$ on siis määritelty suljetulla välillä $[0, 10]$. Se on derivoituva, joten suurin arvo löytyy määrittelyvälin päätepisteestä tai derivaatan nollakohdasta. Derivaatta on

$$A'(x) = -4x + 20.$$

Derivaatta on nolla vain, jos $x = 5$. Suurin arvo löytyy siis seuraavien arvojen joukosta:

$$A(5) = -2 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5 = 50, \quad A(0) = 0, \quad A(10) = 0.$$

Suurin pinta-ala saadaan siis, kun lyhyen sivun pituus on 5 metriä, jolloin pitkän sivun pituudeksi tulee 10 metriä.

**Esimerkki 4.18.** Suorakulmio sijaitsee koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä siten, että sen yksi kulma on origossa ja vastakkainen kulma suoralla $y = -2x + 3$ (ks. kuva). Laske tällaisen suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala.

Merkitään suorakulmion alareunan pituutta $x$. Koska suorakulmion kulma on suoralla $y = -2x + 3$, sen y-koordinaatin, joka on samalla suorakulmion korkeus, täytyy olla $-2x + 3$. Tällöin ala on

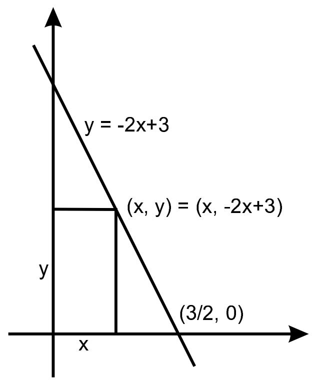
$$A(x) = x(-2x + 3) = -2x^2 + 3x.$$

Tehtävänannon mukaan täytyy olla $0 \leq x \leq 3/2$. Sallitut arvot muodostavat suljetun välin, ja funktio on derivoituva, joten suurin arvo löytyy derivaatan nollakohdasta tai määrittelyvälin päätepisteestä. Päätepisteissä ala on selvästi 0. Derivaatta on

$$A'(x) = -4x + 3,$$

ja tämän ainoa nollakohta on $x = 3/4$. Alan suurin arvo on siis

$$A(3/4) = -2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}.$$




## 4.5 Korkeammat derivaatat

Funktion $f$ derivaatta $f'$ on myös eräs funktio, joten myös se itse voi olla derivoituva. Tämä pätee myös derivaatan derivaatalle ja niin edelleen. Jos $f$ voidaan derivoida $n$ kertaa, tulosta kutsutaan *n:nneksi derivaataksi* ja merkitään jollain seuraavista tavoista:

$$f^{(n)}, \quad D^{(n)}f, \quad \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Jos $n$ on pieni, kuten 2 tai 3, voidaan myös merkitä $f''$ tai $f'''$.

Toinen derivaatta kertoo funktion derivaatan kasvusta. Jos esimerkiksi $s$ kuvaa kuljettua matkaa, kuvaa $s'$ nopeutta ja $s''$ vastaavasti kiihtyvyyttä.

Seuraava toisen derivaatan ominaisuus voi olla hyödyksi.

**Lause 4.19.** *Oletetaan, että $f$ on kahdesti derivoituva ja $f'$:lla on nollakohta pisteessä $x_0$. Tällöin pätee:*

*a) jos $f''(x_0) < 0$, niin $x_0$ on $f$:n paikallinen maksimikohta,*

*b) jos $f''(x_0) > 0$, niin $x_0$ on $f$:n paikallinen minimikohta.*

*Sen sijaan, jos $f''(x_0) = 0$, niin kohdassa $x_0$ voi olla paikallinen ääriarvo tai olla olematta.*

**Esimerkki 4.20.** Olkoon jälleen $f(x) = 3x^4 + 4x^3$. Ensimmäinen derivaatta on

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2,$$

ja toinen derivaatta

$$f''(x) = 12 \cdot 3x^2 + 12 \cdot 2x = 36x^2 + 24x.$$

Derivaatan nollakohdat olivat $x = -1$ ja $x = 0$. Toisen derivaatan arvot näissä pisteissä ovat

$$f''(-1) = 36 \cdot 1 + 24(-1) = 12, \quad f(0) = 0.$$

Kohdassa $x = -1$ on siis lokaali minimi, mutta kohdasta $x = 0$ ei osata tällä perusteella sanoa mitään. Aiempi tutkimus osoitti, että tässä kohdassa ei ollut ääriarvoa.

## 4.6 Derivaatan käyttö yhtälöissä

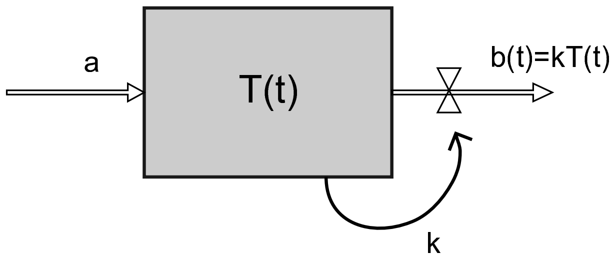
Koska derivaatta kertoo funktion kasvu- tai vähenemisnopeuden, voidaan sen avulla kuvata tilanteita, jotka riippuvat jonkin suureen muutoksen tahdista.

**Esimerkki 4.21.** Oletetaan, että bakteerikasvuston suuruutta tietyllä ajanhetkellä kuvaa funktio $S$. Tällöin funktion derivaatan arvo $S'(t)$ kuvaa kasvuston lisääntymisnopeutta ajanhetkellä $t$. Suotuisissa olosuhteissa, joissa ei ole ympäristön asettamia rajoituksia, bakteerien lisääntymisnopeus on suoraan verrannollinen bakteerikasvuston kokoon. Tämä tarkoittaa sitä, että lisääntymisnopeuden $S'$ ja kasvuston koon $S$ suhde on koko ajan vakio. Merkitään tätä vakiosuhdetta kirjaimella $k$. Nyt voidaan muodostaa yhtälö, joka kuvaa bakteerien lisääntymistä suotuisissa olosuhteissa:

$$\frac{S'(t)}{S(t)} = k \qquad \text{tai} \qquad S'(t) = k \cdot S(t).$$

Tämä yhtälö pätee kaikilla ajanhetkillä $t$, niin kauan kuin ympäristö ei aseta kasvulle rajoituksia.

**Esimerkki 4.22.** Kuvitellaan, että johonkin säiliöön virtaa ainetta A nopeudella $a$ ja sieltä virtaa ulos samaa ainetta nopeudella $b$. Nopeus $a$ on vakio, mutta $b$ on kullakin ajanhetkellä $t$ suoraan verrannollinen säiliössä olevan aineen määrään, joten käsitellään sitä funktiona ajan suhteen. Merkitään verrannollisuuskerrointa $k$. Säiliössä olevan aineen määrä riippuu ajasta, ja sitä merkitään funktiolla $T$. Tilanteeseen liittyy seuraavan kuvan mukainen *virtauskaavio*.




Säiliössä olevan aineen määrän kasvunopeus muodostuu sinne tulevan aineen virtausnopeudesta ja sieltä lähtevän aineen virtausnopeudesta: $T'(t) = a - b(t)$. Koska $b(t)$ on suoraan verrannollinen säiliössä olevan aineen määrään, eli $b(t) = k \cdot T(t)$, saadaan muodostettua yhtälö

$$T'(t) = a - kT(t).$$

Kuvatunlainen säiliö voisi olla esimerkiksi metsänpohja, johon putoaa kariketta tasaisella nopeudella, ja jossa karikkeen poistumisnopeus on verrannollinen karikkeen määrään.

Edellisissä esimerkeissä esiintyivät tuntemattomat suureet $S$ ja $T$. Kunkin esimerkin yhtälö määrää itse asiassa siinä esiintyvän suureen käyttäytymisen, mutta emme vielä osaa ratkaista, millä tavalla tämä käyttäytyminen määräytyy. Yksinkertaisemmassa tapauksessa osaamme jo nyt päätellä, miten tämänkaltainen yhtälö vaikuttaa siinä esiintyvään tuntemattomaan suureeseen.

**Esimerkki 4.23.** Kun kappale päästetään putoamaan, se putoaa jonkin aikaa vakiokiihtyvyydellä $g$ ($\approx 9{,}8$ m/s$^2$). Jos merkitään kappaleen nopeuden riippuvuutta ajasta funktiolla $v$, niin derivaatta $v'$ kuvaa kappaleen kiihtyvyyttä. Näin saadaan suoraan yhtälö

$$v'(t) = g,$$

joka pätee kaikilla hetkillä $t$ niin kauan kuin putoaminen on tasaisesti kiihtyvää (jossain vaiheessa ilmanvastus alkaa vaikuttaa tilanteeseen).

Yllä oleva yhtälö sanoo siis, että funktion $v$ derivaatta on jokaisessa pisteessä vakio $g$. Tästä voidaan päätellä ikäänkuin takaperoisesti, että funktion $v$ on oltava polynomifunktio, jonka riippuvuussääntö on

$$v(t) = gt + C,$$

missä $C$ on jokin vakio. Tällaisen funktion derivaatta $t$:n suhteen on nimittäin $g$. Vakio $C$ kuvaa itse asiassa kappaleen alkunopeutta, sillä ajanhetkellä 0 pätee $v(t) = g \cdot 0 + C = C$. Koska kappale “päästettiin putoamaan”, voidaan sanoa, että $C = 0$, jolloin kappaleen nopeutta kuvaava funktio on itse asiassa $v(t) = gt$.

# 5 Jatkuvan funktion integraali

## 5.1 Integraalin määritelmä

Kuten edellisessä luvussa todettiin, funktion derivaatta kertoo funktion muutosnopeuden. Jos siis tunnetaan jonkin suureen riippuvuutta kuvaava funktio, saadaan derivaatan avulla selville jotain kyseisen suureen muutoksesta. Joskus tilanne on kuitenkin sellainen, että tunnemme suureen vaihtelua kuvaavan funktio, ja haluaisimme selvittää jotain suureesta itsestään. Voimme esimerkiksi auton nopeusmittaria tarkkailemalla saada tietää nopeutta kullakin ajanhetkellä kuvaavan funktion. Tämän funktion avulla pitäisi sitten selvittää, miten paljon auto on edennyt jollain tietyllä aikavälillä.

Edellä kuvatun kaltaisissa tilanteissa on kyse funktion integroinnista. Integroiminen on derivoinnille vastakkainen toimenpide. Derivaatta antaa funktion muutosnopeuden tietyssä pisteessä, integraali puolestaan selvittää muutosnopeudesta funktion todelliset arvot. Tällä kurssilla integroidaan vain jatkuvia funktioita, mutta integraalin määritelmää voidaan yleistää niin, että se soveltuu myös epäjatkuville funktioille. (Toisin kuin derivaatan tapauksessa.)

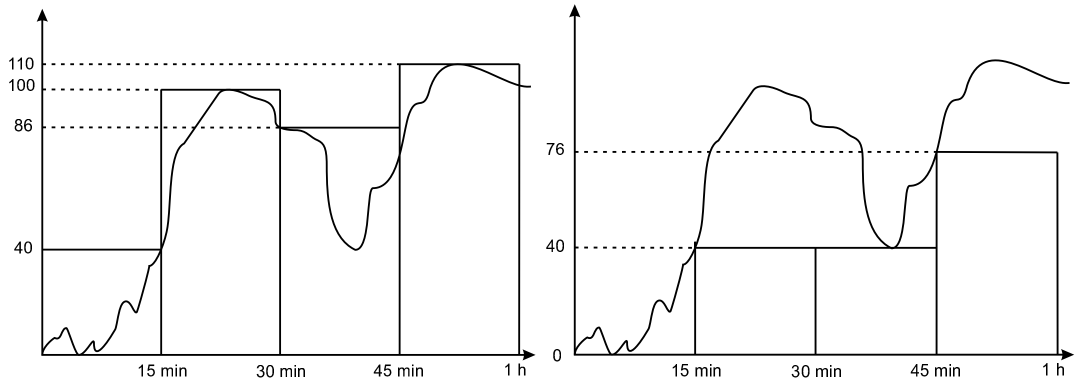
Tarkastellaan ensimmäisenä esimerkkinä linja-autoa matkalla Kotkasta Helsinkiin. Oletetaan, että tunnemme linja-auton nopeuden $v$ ajan funktiona. Yritetään arvioida nopeuden funktion perusteella kuljettua matkaa ensimmäisen tunnin aikana eli aikavälillä $[0, 1]$.

Jos nopeus pysyisi koko ajan tasaisena, eli $v$ olisi vakiofunktio, saisimme kuljetun matkan yksinkertaisesti kertomalla käytetyn ajan tuolla vakionopeudella. Tällöin kuljettu matka olisi $s = v \cdot 1$ h. Nopeus voi kuitenkin vaihdella ajanhetkestä toiseen, joten tämä lähestymistapa ei tuota haluttua tulosta. Sen avulla voidaan kuitenkin arvioida kuljettua matkaa, jos tunnetaan linja-auton maksimi- ja miniminopeudet.

Olkoon esimerkiksi bussin suurin nopeus välillä $[0, 1]$ ollut 110 km/h, ja pienin nopeus 0 km/h (bussi seisoi aluksi asemalla). Jos bussi olisi ajanut koko ajan maksiminopeudellaan, se olisi kulkenut tunnin aikana 110 km/h $\cdot$ 1 h = 110 km. Jos se taas olisi ollut koko ajan paikallaan, se olisi kulkenut 0 km. Tiedämme siis, että todellinen kuljettu matka on jossain nollan ja 110 kilometrin välillä.

Tarkempi arvio saadaan, kun tarkastellaan aikaväliä osissa. Oletetaan esimerkiksi, että ensimmäisen puolen tunnin aikana bussin maksiminopeus oli vain 100 km/h ja miniminopeus 0 km/h. Toisen puolen tunnin aikana maksimi- ja miniminopeudet olivat vastaavasti 110 km/h ja 40 km/h. Nyt voimme arvioida, että ensimmäisellä osalla edettiin enintään $100 \cdot 1/2 = 50$ km ja vähintään $0 \cdot 1/2 = 0$ km, sekä toisella osalla enintään $110 \cdot 1/2 = 55$ km ja vähintään $40 \cdot 1/2 = 20$ km. Kun nämä lasketaan yhteen, voidaan todeta, että tunnin aikana edettiin yhteensä enintään $50 + 55 = 105$ km ja vähintään $0 + 20 = 20$ km, mikä on jo alkuperäistä parempi arvio. Vielä tarkempi arvio saadaan, jos pilkotaan aikaväli esimerkiksi 4 osaan ja tehdään vastaavanlainen arvio. Tällöin voitaisiin saada esimerkiksi seuraavan taulukon mukainen tulos:

| aikaväli | nopeus max | nopeus min | matka max | matka min |
|---|---|---|---|---|
| 0-15 min | 40 km/h | 0 km/h | 10 km | 0 km |
| 15-30 min | 100 km/h | 40 km/h | 25 km | 10 km |
| 30-45 min | 86 km/h | 40 km/h | 21,5 km | 10 km |
| 45-60 min | 110 km/h | 76 km/h | 27,5 km | 19 km |
| yhteensä | — | — | 84 km | 39 km |




Tarkastelusta huomataan, että mitä pienempiin osiin pilkomme aikavälin, sitä tarkemman arvion saamme auton kulkemalle matkalle. Tarkimman arvion saamiseksi voisimme tarkastella raja-arvoa osavälien pituuden lähestyessä nollaa.

Esimerkin tarkastelu voidaan suorittaa minkä tahansa jatkuvan funktion kohdalla, ei ainoastaan sellaisen, joka kuvaa nopeutta. Saatuja ylä- ja ala-arvioita kutsutaan funktion *ylä- ja alasummiksi* ja näiden raja-arvoa funktion *integraaliksi*. Integraali kuvaa funktion *kertymää* tietyllä välillä. Jos funktio kuvaa jonkin suureen muutosnopeutta, integraali kertoo suureen arvon kokonaismuutoksen.

**Määritelmä 5.1.** Olkoon $f$ välillä $[a,b]$ määritelty jatkuva funktio. Jaetaan väli tasaisesti korkeintaan $h$:n pituisiin suljettuihin osaväleihin. (Jos jako ei mene tasan, annetaan oikeanpuoleisimman osavälin olla lyhyempi kuin muut.) Valitaan jokaisella osavälillä funktion suurin arvo, kerrotaan se välin pituudella ja lasketaan näin saadut arvot yhteen. Kutsutaan saatua summaa funktion *yläsummaksi välillä* $[a,b]$ ja merkitään tätä $S_h$. Funktiolla on varmasti jokaisella osavälillä suurin arvo lauseen 4.15 nojalla.

Valitaan samoin jokaisella osavälillä pienin arvo, kerrotaan se välin pituudella ja lasketaan tulokset yhteen. Kutsutaan tätä summaa funktion *alasummaksi välillä* $[a,b]$ ja merkitään sitä $s_h$.

Funktion $f$ *integraali välillä* $[a,b]$ on yläsumman ja alasumman raja-arvo osavälin pituuden $h$ lähestyessä nollaa:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} S_h = \lim_{h\to 0} s_h.$$

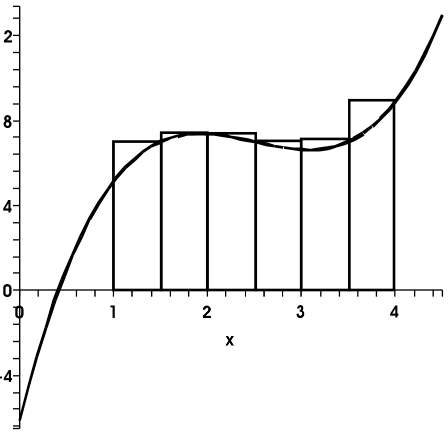
Tämä raja-arvo on aina olemassa, kun $f$ on jatkuva välillä $[a,b]$.

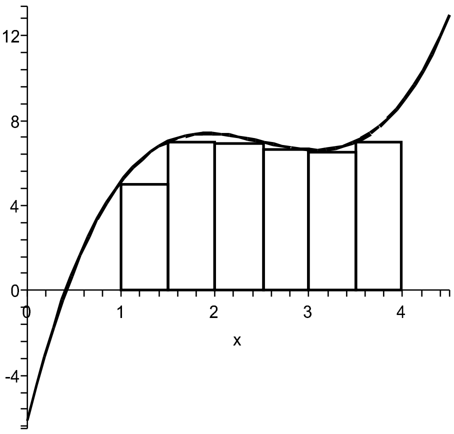
Integraalimerkinnässä integroimisväli merkitään integraalimerkin ylä- ja alapäähän. Termi $dx$ lopettaa integroitavan lausekkeen. Se kertoo, minkä muuttujan suhteen integroitava lauseke on kirjoitettu (voisi olla esim. $\int_a^b 2t^2\,dt$).

Integraalin määritelmässä ei itse asiassa tarvitsisi tarkastella sekä ylä- että alasummia. Integraali voidaan kuitenkin määritellä muillekin kuin jatkuville funktioille, ja jos funktio ei ole jatkuva, voi käydä niin, etteivät ylä- ja alasummat lähesty toisiaan $h$:n pienetessä. Tällöin sanotaan, että funktio ei ole *integroituva*. Kuitenkin kaikki suljetulla välillä jatkuvat funktiot ovat integroituvia tuolla välillä.

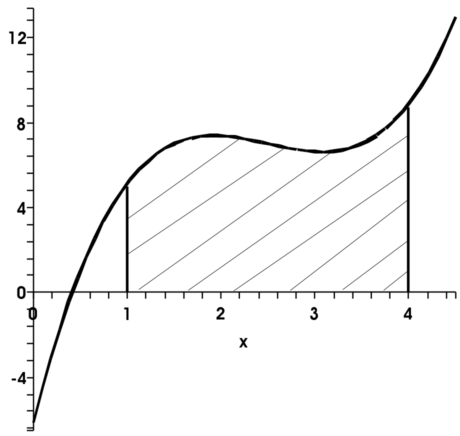
## 5.2 Integraali kuvaajassa

Ajatellaan integroimisväli jaetuksi tasaisesti osaväleihin. Funktion yläsumma on sellaisten suorakulmioiden pinta-alojen summa, joiden korkeus on jokaisella osavälillä funktion suurin arvo. Alasumma taas koostuu sellaisten suorakulmioiden pinta-aloista, joiden korkeus on joka osavälillä funktion pienin arvo.




Kun osavälin pituutta lyhennetään, lähestyvät funktion suurin ja pienin arvo tuolla välillä toisiaan. (Tämä johtuu funktion jatkuvuudesta: kun muuttuja on sidottu pienelle välille, ei funktion arvokaan voi muuttua paljon.) Siispä myös ylä- ja alasuorakulmioiden huiput kullakin välillä lähestyvät toisiaan ja samalla funktion kuvaajaa, joka on niiden välissä. Kun osavälien pituus lähestyy nollaa, suorakulmioiden huiput kohtaavat ja puristavat funktion arvon väliinsä. Tällöin niiden yhteenlasketun pinta-alan raja-arvo, funktion integraali, vastaa *kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa.*




**Huom.** Kuten erotusosamäärän lausekkeessa esiintyvä $h$ voi olla negatiivinen, vaikka se kuvaa erään välin "pituutta", voi myös integraali olla negatiivinen, vaikka se tavallaan kuvaakin pinta-alaa. Jos nimittäin funktio on jollain välillä negatiivinen, eli kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, sen suurimmat ja pienimmät arvot tuolla välillä ovat negatiivisia, mistä johtuen myös integraali on negatiivinen.

## 5.3 Integraalin laskeminen

Integraalin laskeminen suoraan määritelmän avulla on yleensä erittäin vaikeaa (huomattavasti vaikeampaa kuin derivaatan laskeminen erotusosamäärän avulla), joten käytännössä tarvitaan eri tilanteisiin sopivia laskusääntöjä. Koska integrointi on derivoinnille käänteinen toimenpide, myös integroimissäännöt saadaan suoraan derivoimissäännöistä. Apuna käytetään niin kutsuttua *integraalifunktiota.*

**Määritelmä 5.2.** Jos funktio $f$ on jonkin funktion $F$ derivaatta eli $f = F'$, niin tätä funktiota $F$ kutsutaan $f$:n *integraalifunktioksi.* (Joskus sanotaan myös, että $F$ on $f$:n *antiderivaatta*).

Integraalifunktio on derivaattafunktion vastakohta. Funktion integraalifunktion derivaatta on funktio itse, samoin kuin sen derivaatan integraalifunktio. Jos funktio on jatkuva, sillä on aina olemassa integraalifunktio, jopa useita. Jos esimerkiksi $f(x) = 2x$, niin integraalifunktioksi kelpaa yhtä hyvin $F_1(x) = x^2$ kuin $F_2(x) = x^2 + 1$, sillä $Dx^2 = D(x^2 + 1) = 2x$. Funktion eri integraalifunktiot eivät kuitenkaan eroa toisistaan kovin paljon, kuten seuraava lause kertoo.

**Lause 5.3 (Integraalilaskennan peruslause).** *Olkoon $F_1' = F_2' = f$, eli sekä $F_1$ että $F_2$ ovat funktion $f$ integraalifunktioita. Tällöin on olemassa jokin $x$:stä riippumaton vakio, jolle pätee $F_1(x) = F_2(x) + C$ kaikilla $x$.*

Funktion $f$ kaikki integraalifunktiot ovat siis vakion lisäämistä vaille samoja. Integraalifunktiota merkitään usein seuraavasti:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

Tässä $F$ on jokin funktion $f$ integraalifunktio. Merkintä on sama kuin integraalilla ilman integroimisväliä, ja joskus integraalifunktiota kutsutaankin *määräämättömäksi integraaliksi.* Vakio $C$ on niin sanottu *integroimisvakio.* Se on merkittävä näkyviin, koska tietyn funktion integraalifunktioon voi aina lisätä minkä tahansa vakion ja se pysyy silti saman funktion integraalifunktiona.

**Esimerkki 5.4.** Funktion $f(x) = 4x$ eräs integraalifunktio on $F(x) = 2x^2$, koska $D\ 2x^2 = 2 \cdot 2x = 4x$. Voidaan merkitä

$$\int 4x\, dx = 2x^2 + C.$$

Integroimisvakio $C$ voi olla mikä luku tahansa, joten saman funktion integraalifunktioita ovat $2x^2$, $2x^2 + 1$, $2x^2 - 3$, $2x^2 + \pi$, jne.

Integraalifunktion käyttö integroinnissa perustuu seuraavaan lauseeseen.

**Lause 5.5 (Analyysin peruslause).** *Olkoon $f$ välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio, ja $F$ jokin sen integraalifunktio (eli $F' = f$.) Tällöin*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

*Usein merkitään*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overset{b}{\underset{a}{\Big/}} F(x) = F(b) - F(a).$$

*Merkintä* $\overset{b}{\underset{a}{\Big/}}$ *lausutaan "sijoitus a:sta b:hen".*

**Huom.** Vaikka kaikilla funktioilla on useita eri integraalifunktioita, ei ole väliä sillä, mitä niistä käyttää integroinnissa. Tämä johtuu siitä, että sijoituksessa mahdolliset ylimääräiset vakiot supistuvat kuitenkin pois.

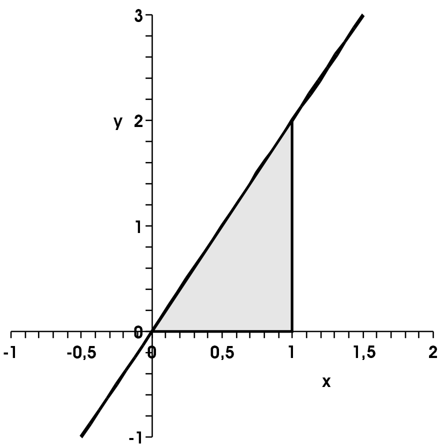
**Esimerkki 5.6.** Olkoon $f(x) = 2x$. Eräs integraalifunktio on $F(x) = x^2$. Edeltävän lauseen mukaan

$$\int_0^1 2x\,dx = \overset{1}{\underset{0}{\Big/}} x^2 = 1^2 - 0^2 = 1.$$

Toisaalta myös $x^2 + 3$ on $f$:n integraalifunktio, joten

$$\int_0^1 2x\,dx = \overset{1}{\underset{0}{\Big/}} (x^2 + 3) = (1^2 + 3) - (0^2 + 3) = 1 + 3 - 0 - 3 = 1.$$

Tämän integraalin arvo on kuvan varjostetun kolmion pinta-ala.



## 5.4 Laskusääntöjä

1. $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Kaksi ensimmäistä sääntöä ovat tuttuja jo derivoinnin yhteydestä. Kolmas sääntö sanoo, että integroimisväli voidaan pilkkoa osiin. Tämä on hyödyllistä esimerkiksi silloin, kun funktio on paloittain määritelty ja eri alueissa tarvitaan eri integraalifunktioita.

**Esimerkki 5.7.** Integroidaan itseisarvofunktiota $f(x) = |x|$ välillä $[-1, 1]$. Lasketaan integraali osissa. Välillä $[-1, 0]$ on $f(x) = -x$, joten integraalifunktioksi voidaan valita $F_1(x) = -\frac{1}{2}x^2$. Toisaalta välillä $[0, 1]$ pätee $f(x) = x$, joten integraalifunktioksi käy $F_2(x) = \frac{1}{2}x^2$. Täten

$$\int_{-1}^1 |x|\,dx = \int_{-1}^0 -x\,dx + \int_0^1 x\,dx = \mathop{\Big/}_{-1}^{0} -\frac{x^2}{2} + \mathop{\Big/}_{0}^{1} \frac{x^2}{2}$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\cdot 0^2 - \left(-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2\right)\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2\right) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 = 1.$$

Funktioiden derivoimissäännöistä saadaan "kääntämällä" suoraan vastaavat integroimissäännöt. Esimerkiksi potenssin integroimissääntö on

4. $\displaystyle\int_a^b x^k\,dx = \mathop{\Big/}_{a}^{b} \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad \text{kun } k \neq -1.$

**Huom.** Potenssitermi integroidaan siis lisäämällä eksponenttiin yksi ja jakamalla lauseke näin syntyneellä uudella eksponentilla. Koska potenssin derivoimissääntö ei toimi, jos eksponentti on nolla, vastaavasti *integroimissääntö ei toimi, kun eksponentti on* $-1$.

Integroiminen on vaikeampaa kuin derivoiminen, koska tulon, osamäärän tai yhdistetyn funktion integroimiseen ei ole olemassa laskusääntöjä. Yhdistetyn funktion derivoimissäännöstä saadaan kuitenkin seuraava hyödyllinen integroimissääntö:

5. $\displaystyle\int_a^b f'(g(x))g'(x)\,dx = \mathop{\Big/}_{a}^{b} f(g(x)).$

**Esimerkki 5.8.** Integroidaan funktiota $h(x) = x(x^2+1)^3$ välillä $[0, 1]$. Yritetään saada riippuvuussäännön lauseke laskusäännön 5 vaatimaan muotoon $f'(g(x))g'(x)$. Lauseke täytyisi siis tulkita siten, että siinä on yhdistetty funktio, jonka ulkofunktio on jonkin funktion $f$ derivaatta ja tämä yhdistetty funktio on vielä kerrottu sisäfunktion $g$ derivaatalla.

Lausekkeessa esiintyykin valmiina yhdistetyn funktion lauseke $(x^2+1)^3$. Valitaan siis sisäfunktioksi $g(x) = x^2 + 1$. Tämä lauseke on vielä kerrottu $x$:llä, joka on itse asiassa melkein kuin sisäfunktion derivaatta $g'(x) = 2x$. Tulkitaan nyt ulkofunktio erään funktion $f$ derivaataksi eli etsitään jokin $f$, jolle pätee $f'(x) = x^3$. Voidaan valita esimerkiksi $f(x) = \frac{1}{4}x^4$. Säännön 5 mukaan

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^3 \cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(g(x))g'(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\Big/_{0}^{1} f(g(x)) = \frac{1}{2}\Big/_{0}^{1} f(x^2+1) = \frac{1}{2}\Big/_{0}^{1} \frac{1}{4}(x^2+1)^4 \\ &= \frac{1}{8}\left[(1^2+1)^4 - (0^2+1)^4\right] = \frac{1}{8}(16-1) = \frac{15}{8}.\end{aligned}$$

Huomaa, miten integraaliin lisättiin aluksi sisäfunktion derivaatan vaatima kerroin 2. Samalla koko integraali piti kertoa puolikkaalla. Tällä tavoin voidaan korvata mikä tahansa vakiokertoimen puuttuminen sisäfunktion derivaatasta. Sen sijaan esimerkiksi lauseketta $x(x^3+1)^3$ ei voisi saada säännön vaatimaan muotoon, koska sisäfunktion derivaatta on $3x^2$, ja ulkopuolella on kertoimena vain $x$. Toista potenssia sille ei mitenkään voida lisätä.

## 5.5 Sovelluksia

Integraalilla voidaan laskea jonkin suureen kertymää esimerkiksi ajan suhteen.

**Esimerkki 5.9.** Metsän kasvit käyttävät auringonpaisteesta saamaansa energiaa. Energian mittausta varten metsään on asetettu mittalaitteita, jotka mittaavat auringonpaisteen tehoa eli energiavuota. Mitä kirkkaampi paiste, sitä suurempi mittalaitteen lukema. Erään tällaisen mittalaitteen lukema noudatti aikavälillä $[12, 13]$ melko tarkasti funktiota $P(t) = -3{,}6t^2 + 94t - 500$ (kJ/h). Tällä aikavälillä laitteen vastaanottama energia on energiavuon kertymä, joten se saadaan integroimalla:

$$\begin{aligned}E &= \int_{12}^{13} -3{,}6t^2 + 94t - 500\,dt = \Big/_{12}^{13} \big(-1{,}2t^3 + 47t^2 - 500t\big) \\ &= \big(-1{,}2 \cdot 13^3 + 47 \cdot 13^2 - 500 \cdot 13\big) - \big(-1{,}2 \cdot 12^3 + 47 \cdot 12^2 - 500 \cdot 12\big) \approx 110 \text{ (kJ)}.\end{aligned}$$

Tämän tuloksen tarkkuus riippuu tietenkin siitä, miten tarkkaan funktio $P(t)$ todella approksimoi auringonpaisteen tehoa.

Integrointia voidaan käyttää myös apuna, kun ratkaistaan yhtälöitä, joissa esiintyy tuntemattoman suureen derivaatta. Näihin niin kutsuttuihin differentiaaliyhtälöihin tutustutaan tarkemmin myöhemmin.

**Esimerkki 5.10.** Eräässä kasvustossa bakteerien lisääntymisnopeus kasvoi suorassa suhteessa aikaan. Kasvuston massan avulla ilmoitettuna lisääntymisnopeus ajanhetkellä $t$ oli $5 \cdot t$ mg/h. Jos $m(t)$ kuvaa bakteerien määrää ajanhetkellä $t$, niin lisääntymisnopeutta kuvaa määrän derivaatta $m'(t)$. Kuvatussa tilanteessa siis

$$m'(t) = 5t.$$

Alussa kasvuston koko oli $m(0) = 3$ mg.

Koska lisääntymisnopeus on määrän derivaatta, niin määrä on puolestaan lisääntymisnopeuden integraalifunktio. Integroimalla saadaan

$$m(t) = \int m'(t)\,dt = \int 5t\,dt = \frac{5t^2}{2} + C.$$

Koska alussa bakteereja oli 3 mg, tiedetään lisäksi, että

$$m(0) = 3 \iff \frac{5 \cdot 0^2}{2} + C = 3,$$

eli $C = 3$. Bakteerien määrää kuvaa siis funktio $m(t) = 5t^2/2 + 3$ (mg).

Integraalia voidaan myös käyttää geometrisenä työkaluna, koska se kertoo kuvaajan ja x-akselin välisen pinta-alan.

**Esimerkki 5.11.** Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3$. Mikä on tämän funktion kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[-1, 1]$?

Ensin on muistettava, että integraali ei itse asiassa välttämättä kuvaa todellista pinta-alaa, koska se on negatiivinen siellä, missä integroitva funktio on negatiivinen. (Pinta-ala sen sijaan on aina positiivinen.) Ensin on siis tutkittava hieman funktiota $f$, jolloin saadaan selville, että $f$ on negatiivinen välillä $[-1, 0[$. Pinta-alan laskemiseksi on siis jaettava väli kahteen osaan: $[0, 1]$ ja $[-1, 0]$. Integraalit näiden välien yli ovat

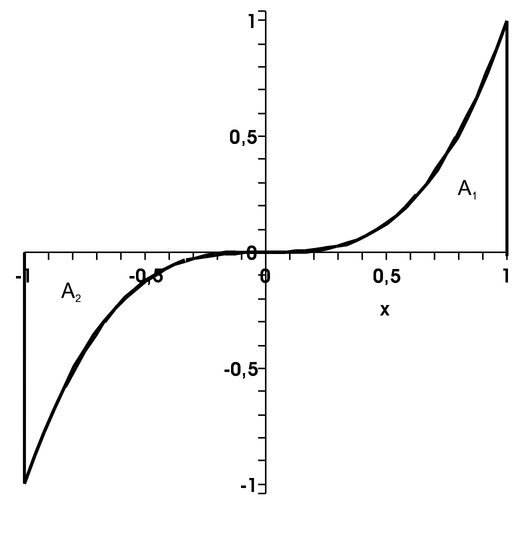
$$I_1 = \int_0^1 x^3\,dx = \Big/_{\!0}^{1} \frac{x^4}{4} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4},$$

ja

$$I_2 = \int_{-1}^0 x^3\,dx = \Big/_{\!-1}^{0} \frac{x^4}{4} = \left(0 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Jälkimmäinen integraali on negatiivinen, kuten pitikin olla. Pinta-ala saadaan nyt laskemalla yhteen nämä integraalit, kunhan jälkimmäisen etumerkki vaihdetaan:

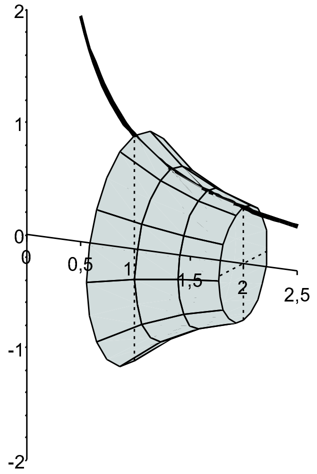
$$A = I_1 + (-I_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$



**Esimerkki 5.12.** Tutkitaan pyörähdyskappaletta, joka syntyy, kun jonkin funktion $f$ kuvaaja pyörähtää syvyyssuunnassa x-akselin ympäri ja näin saadun pinnan sisään jäävä tila vielä "katkaistaan päistä" kahdella x-akseliin nähden kohtisuorassa olevalla tasolla kohdissa $a$ ja $b$. Ollaan siis tavallaan "sorvattu" $a$:n ja $b$:n välillä olevasta palikasta pyörähdyskappale funktion $f$ kuvaajan muotoisella terällä.

Tietyssä kohdassa $x$ mainitun pyörähdyskappaleen poikkileikkaus on ympyrä, jonka säde on $f(x)$. Ympyrän alan kaava on $\pi r^2$, joten pyörähdyskappaleen poikkipinta-ala tuossa kohdassa on $\pi f(x)^2$. Kappaleen tilavuus saadaan poikkipinta-alan kertymänä välillä $[a, b]$ eli integroimalla $\pi f(x)^2$ $a$:sta $b$:hen. Otetaan esimerkiksi selville funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ kuvaajan välille [1,2] muodostaman pyörähdyskappaleen tilavuus:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^2 \pi f(x)^2\,dx = \int_1^2 \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \pi\int_1^2 x^{-2}\,dx = \pi \mathop{\Big/}_{1}^{2} -x^{-1} = \pi \mathop{\Big/}_{1}^{2} \left(-\frac{1}{x}\right) \\
&= \pi\left(-\frac{1}{2} - (-1)\right) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$




## 5.6 Epäjatkuvan funktion integraalista

Integraali voidaan helposti yleistää koskemaan myös epäjatkuvia funktioita. Määritelmää täytyy oikeastaan muuttaa vain kahdessa kohdassa. Ensinnäkin epäjatkuva funktio ei välttämättä saavuta pienintä tai suurinta arvoa suljetulla välillä. Tämä voidaan kuitenkin helposti korvata käyttämällä suurimman arvon sijasta niin kutsuttua pienintä ylärajaa ja pienimmän arvon sijasta suurinta alarajaa. Nämä ovat olemassa, mikäli funktio on rajoitettu (eli ei saa mielivaltaisen suuria tai pieniä arvoja). Toinen ongelma on se, etteivät funktion yläsumma ja alasumma välttämättä lähesty samaa lukua osavälejä lyhennettäessä. Tällöin funktio ei ole integroituva. Lisäksi täytyy sallia muutkin kuin tasaiset osavälijaot, koska joidenkin epäjatkuvien funktioiden ylä- ja alasummat lähestyvät toisiaan vain, jos jako ei ole tasainen.

Myös integraalifunktion käsite aiheuttaa ongelmia. Lähes kaikki derivaatat ovat jatkuvia, joten useimmilla epäjatkuvilla funktioilla ei ole integraalifunktiota. Integraalit on silloin laskettava muulla tavalla. Toisaalta voi myös käydä niin, että integraalifunktio on kyllä olemassa, mutta funktio ei olekaan integroituva. Epäjatkuvien funktioiden kanssa täytyy siis olla joka suhteessa tarkkana, mutta usein integrointi kuitenkin onnistuu helposti, kuten seuraavan esimerkin tapauksessa.

**Esimerkki 5.13.** Ennen kuin auringonpaistetta mittaavat laitteet vietiin metsään, niitä testattiin laboratoriossa. Laite asetettiin kirkkaan lampun alle kymmeneksi sekunniksi, ja viiden sekunnin kohdalla valo katkaistiin. Mittalaite kuitenkin rekisteröi vielä huoneen ikkunoista tulevan valon.

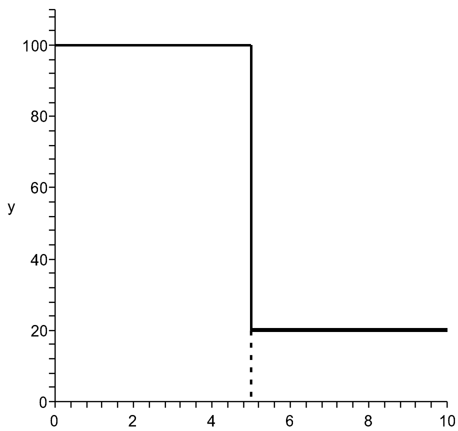
Olkoon mittalaitteen $P : [0, 10] \to \mathbb{R}$ mittalaitteen lukema ajan funktiona. Tällöin

$$P(t) = \begin{cases} 100, \text{ kun } 0 \leq t \leq 5 \\ 20, \text{ kun } 5 < t \leq 10 \end{cases} \quad \text{(J/s)}.$$

Funktio $P$ on epäjatkuva eikä se ole minkään funktion derivaatta. Sillä ei siis ole integraalifunktiota. Se on kuitenkin integroituva, ja sen integraalille pätevät kaikki samat laskusäännöt kuin jatkuvassakin tapauksessa. Voimme siis integroida sen erikseen väleillä $[0, 5]$ ja $[5, 10]$ (laskusääntö 3). Kummallakin osalla funktio on jatkuva ja sillä on integraalifunktio, joten

$$\begin{aligned} \int_0^{10} P(t)\,dt &= \int_0^5 P(t)\,dt + \int_5^{10} P(t)\,dt = \int_0^5 100\,dt + \int_5^{10} 20\,dt \\ &= \Big/_{\!0}^{5} 100t + \Big/_{\!5}^{10} 20t = (500 - 0) + (200 - 100) = 600 \text{ (kJ)}. \end{aligned}$$

(Jos ollaan tarkkoja, suljetulla välillä $[5, 10]$ funktio ei ole jatkuva, koska päätepisteessä arvo on $f(5) = 100$. Integraalin suuruus ei kuitenkaan riipu arvoista päätepisteissä.)




# 6 Joitain erityisfunktioita

## 6.1 Eksponenttifunktiot

Luvun $a$ potenssi $a^k$ on tähän mennessä määritelty vain niissä tapauksissa, joissa $k$ on kokonais- tai murtoluku. Tätä määritelmää voidaan kuitenkin laajentaa koskemaan myös muita reaalilukuja, jolloin voidaan laskea esimerkiksi luku $2^{\sqrt{2}}$. Määritelmää ei käydä läpi tällä kurssilla, vaan sen sijaan luotetaan siihen, että laskin antaa tällaisille luvuille tarvittaessa hyviä likiarvoja.

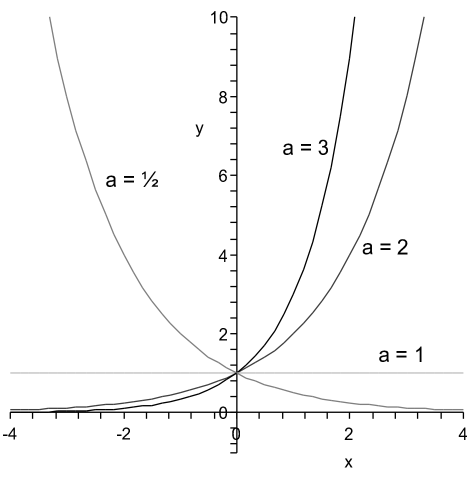
Kun potenssi laajennetaan koskemaan mitä tahansa lukuja, voidaan muodostaa sellainen funktio, jonka arvot ovat jonkin positiivisen vakion $a$ arvoja korotettuina muuttujan osoittamiin potensseihin. Tämä funktio on nimeltään *a-kantainen eksponenttifunktio*, ja sitä merkitään usein $\exp_a$.

**Määritelmä 6.1.** Funktiota $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp_a x = a^x$, missä $a$ on jokin positiivinen vakio, kutsutaan *a-kantaiseksi eksponenttifunktioksi*. Vakiota $a$ kutsutaan eksponenttifunktion *kantaluvuksi*.

Potenssifunktion ja eksponenttifunktion ero on siis se, että potenssifunktiossa muuttujan arvo korotetaan vakiopotenssiin, kun taas eksponenttifunktiossa vakio korotetaan muuttujan osoittamaan potenssiin. Huomaa, että jälkimmäisessä tapauksessa vakion $a$ on määritelmän mukaan oltava positiivinen.

**Esimerkki 6.2.** Olkoot $f(x) = x^2$ ja $g(x) = 2^x$. Tällöin $f(1) = 1^2 = 1$, $f(-1) = (-1)^2 = 1$ ja $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$. Toisaalta $g(1) = 2^1 = 2$, $g(-1) = 2^{-1} = 1/2$ ja $g(\sqrt{2}) = 2^{\sqrt{2}} \approx 2{,}665$. Kuitenkin $f(2) = 2^2 = g(2)$.

Eksponenttifunktio on (kantaluvusta riippumatta) kaikkialla jatkuva ja derivoituva sekä aina aidosti positiivinen. Alla on eksponenttifunktion kuvaajia erilaisilla kantaluvun $a$ arvoilla. Jos $a > 1$, niin eksponenttifunktio on aidosti kasvava. Jos taas $a < 1$, niin funktio on aidosti vähenevä.




Potenssien laskusäännöt pätevät myös eksponenttifunktiolle:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

4. $a^0 = 1$

Kun kantaluvuksi valitaan ns. *Neperin luku* $e = 2{,}71828\ldots$, saadaan eräs erityisen tärkeä eksponenttifunktio. Yleensä, jos puhutaan eksponenttifunktiosta kantalukua mainitsematta, tarkoitetaan juuri tätä funktiota.

**Määritelmä 6.3.** Funktiota

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp x = e^x$$

kutsutaan *(tavalliseksi) eksponenttifunktioksi.* Vakio $e$ on irrationaaliluku, jonka likiarvo on 2,71828.

Tavallisen eksponenttifunktion tärkein ominaisuus on se, että sen derivaatan arvo on joka pisteessä sama kuin itse funktion arvo:

$$D\ e^x = e^x.$$

Tämä ominaisuus osoittautuu erityisen tärkeäksi myöhemmin differentiaaliyhtälöiden yhteydessä.

**Esimerkki 6.4.** Eksponenttifunktioiden yhteydessä tulon ja yhdistetyn funktion derivointisäännöt tulevat tarpeeseen. Derivoidaan esimerkin vuoksi funktio $f(x) = xe^{2x}$. Kyseessä on siis polynomin ja eksponenttifunktion tulo. Tulon derivointisäännön mukaan

$$f'(x) = Dx \cdot e^{2x} + x \cdot De^{2x} = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot De^{2x} = e^{2x} + x \cdot De^{2x}.$$

Derivoimatta jäi vielä $De^{2x}$. Tämä on yhdistetyn funktion lauseke, missä ulkofunktiona on $g(x) = e^x$ ja sisäfunktiona $h(x) = 2x$. Ulko-osan derivaatta on $e^x$, ja sisäosan derivaatta on 2. Yhdistetyn funktion derivoimissäännön mukaisesti saadaan siis

$$De^{2x} = g'(h(x))h'(x) = g'(2x) \cdot 2 = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}.$$

Lopputulos on siis

$$f'(x) = e^{2x} + x \cdot De^{2x} = e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = e^{2x} + 2xe^{2x} = e^{2x}(1 + 2x).$$

## 6.2 Logaritmifunktiot

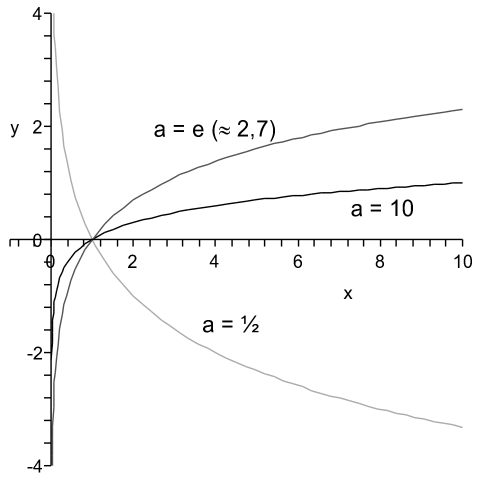
Logaritmifunktio on eksponenttifunktion *käänteisfunktio.* Tämä tarkoittaa sitä, että eksponenttifunktion arvo syötettynä logaritmifunktiolle palauttaa alkuperäisen muuttujan arvon. Toisaalta myös logaritmifunktion arvo syötettynä eksponenttifunktiolle palauttaa alkuperäisen arvon.

**Määritelmä 6.5.** Olkoon $a$ jokin positiivinen vakio. Voidaan osoittaa, että on olemassa funktio $\log_a : ]0, \infty[ \to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$\log_a a^x = a^{\log_a x} = x.$$

Tätä funktiota kutsutaan *$a$-kantaiseksi logaritmifunktioksi.*

Luvusta $x$ otettu $a$-kantainen logaritmi kertoo siis, mihin potenssiin $a$ täytyy korottaa, jotta saataisiin $x$ (sillä $a^{\log_a x} = x$). Huomaa, että logaritmi on määritelty vain positiivisilla luvuilla, koska positiivinen $a$ korotettuna mihin tahansa potenssiin on aina positiivinen. Kuten eksponenttifunktio, myös logaritmifunktio on kantaluvusta riippumatta derivoituva koko määrittelyjoukossaan, ja jos $a > 1$, niin logaritmifunktio on kasvava, jos $a < 1$, niin se on vähenevä.




**Esimerkki 6.6.** Logaritmi luvusta $x$ kertoo, mihin potenssiin kantaluku täytyy korottaa, jotta saataisiin $x$. Siispä

$$\log_2 16 = 4, \quad \log_3 9 = 2, \quad \log_5 125 = 3.$$

Lisäksi kaikilla kantaluvuilla $a$ pätee

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{ja} \quad \log_a a = 1.$$

Eksponenttifunktion laskusäännöistä voidaan johtaa logaritmin laskusääntöjä.

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a x^y = y \log_a x$
3. $\log_a \dfrac{1}{x} = -\log_a x$
4. $\log_a 1 = 0$

Esimerkiksi 1 sääntö voidaan johtaa seuraavasti. Logaritmi $\log_a xy$ kertoo, mihin potenssiin $a$ täytyy korottaa, jotta saataisiin $xy$. Eksponenttifunktion laskusäännön 1 sekä logaritmifunktion määritelmän avulla saadaan $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy$. Siis $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

Joidenkin kantalukujen tapauksissa on tapana käyttää logaritmista omaa merkintää. Esimerkiksi

$$\log_{10} x = \lg x, \quad \log_e x = \ln x, \quad \log_2 x = \operatorname{lb} x.$$

**Esimerkki 6.7.** Kymmenkantainen logaritmi kertoo suunnilleen, kuinka monta numeroa luvussa on:

$$\lg 10 = 1, \quad \lg 120 \approx 2 \quad \lg 10000 = 4, \quad \lg 987654321 \approx 9.$$

Erikantaisista logaritmeista matematiikassa tärkein on ln. Sitä kutsutaan *luonnolliseksi logaritmiksi*, ja se on tavallisen eksponenttifunktion käänteisfunktio. Monesti sitä merkitään yksinkertaisesti log (ilman kantalukua). Luonnollisen logaritmin derivaatta on

$$D \ \ln x = \frac{1}{x}.$$

Esimerkiksi yhdistetyn funktion derivoimissäännöllä voidaan näyttää, että myös $D \ln(-x) = 1/x$. Tästä saadaan integroimissääntö

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \mathop{/}_{a}^{b} \ln|x|.$$

Itseisarvo tarvitaan, koska ei tiedetä, onko väli $[a, b]$ positiivisella vai negatiivisella puolella. Logaritmiin ei nimittäin voi sijoittaa negatiivisia lukuja. Nyt voidaan vihdoin kirjoittaa potenssin integroimissääntö kokonaisuudessaan:

$$\int_a^b x^k\,dx = \mathop{/}_{a}^{b} \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad \text{jos } k \neq -1,$$

$$\int_a^b x^{-1}\,dx = \mathop{/}_{a}^{b} \ln|x|.$$

**Esimerkki 6.8.** Integroidaan funktiota $f(x) = 1/x$ välillä $[1, e]$. Funktion $f$ (eräs) integraalifunktio on $\ln|x|$. Koska esimerkin integroimisvälillä pätee $x > 0$, integraalifunktio on itse asiassa $\ln x$. Täten

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \mathop{/}_{1}^{e} \ln x = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Integroidaan sitten samaa funktiota välillä $[-2, -1]$. Koska nyt $x < 0$, integraalifunktio on $\ln|x| = \ln(-x)$. Siispä

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \mathop{/}_{-2}^{-1} \ln(-x) = \ln 1 - \ln 2 = 0 - \ln 2 = -\ln 2.$$

Huomaa, että funktiota $f$ ei voi ollenkaan integroida sellaisella välillä, joka sisältää sekä negatiivisia että positiivisia lukuja (esimerkiksi $[-1, 1]$), koska $f$ ei ole määritelty nollassa.

## 6.3 Kantaluvun vaihtaminen

Kaikki eksponentti- ja logaritmifunktiot voidaan ilmaista tavallisen eksponenttifunktion ja luonnollisen logaritmifunktion avulla. Koska $e^{\ln a} = a$, saadaan ensinnäkin

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{\ln a \cdot x}.$$

Toisaalta $\log_a y$ on se luku $x$, johon $a$ pitää korottaa, jotta saataisiin $y$. Edellisen yhtälön mukaan tämä luku $x$ kerrottuna luvulla $\ln a$ on se luku, johon $e$ pitää korottaa, jotta saataisiin $y$. Saadaan siis seuraavat laskusäännöt kantaluvun vaihtamiselle:

$$\begin{aligned}\exp_a x &= \exp(\ln a \cdot x),\\ \log_a x &= \frac{\ln x}{\ln a}.\end{aligned}$$

Itse asiassa tässä voisi olla toisena kantalukuna jokin muukin kuin $e$. Voitaisiin esimerkiksi vaihtaa kantaluvuksi 10 seuraavilla kaavoilla:

$$\begin{aligned}\exp_a x &= \exp_{10}(\lg a \cdot x),\\ \log_a x &= \frac{\lg x}{\lg a}.\end{aligned}$$

**Esimerkki 6.9.** Ratkaistaan yksinkertainen eksponenttiyhtälö $4^x = 10$. Koska $4^1 = 4$ ja $4^2 = 16$, ratkaisu on oletettavasti ykkösen ja kakkosen välissä. Logaritmin määritelmän perusteella ratkaisu on $x = \log_4 10$, mutta tavallisella laskimella tätä ei voi suoraan laskea. Laskimen näppäimissä on yleensä vain luonnollinen logaritmi (ln tai log) sekä toisinaan myös kymmenkantainen logaritmi (lg, joskus myös log (!!)). Käytetään siis kantaluvun vaihtoa:

$$x = \log_4 10 = \frac{\ln 10}{\ln 4} \approx \frac{2{,}303}{1{,}386} \approx 1{,}66.$$

Yhtälön voi ratkaista myös toisella tavalla. Logaritmien laskusääntöjen mukaan nimittäin $\ln 4^x = x \ln 4$. Voidaan siis päätellä seuraavasti:

$$\begin{aligned}4^x = 10 &\iff \ln 4^x = \ln 10\\ &\iff x\ln 4 = \ln 10 \quad \mid : \ln 4\\ &\iff x = \frac{\ln 10}{\ln 4}.\end{aligned}$$

**Esimerkki 6.10.** Derivoidaan funktio $f : ]0, \infty[ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$. Kantalukua vaihtamalla nähdään, että $x^x = e^{\ln x \cdot x}$. Täten

$$f'(x) = Dx^x = D\left(e^{\ln x \cdot x}\right).$$

Tämä voidaan nyt laskea yhdistetyn funktion derivaattana. Ulkofunktio on tavallinen eksponenttifunktio, jonka derivaatta on kyseinen funktio itse. Ulko-osa säilyy siis koskemattomana. Sisäfunktion lauseke on puolestaan $\ln x \cdot x$, jonka derivoimiseen käytetään tulon derivointisääntöä:

$$D(\ln x \cdot x) = D(\ln x) \cdot x + \ln x \cdot Dx = \frac{1}{x} \cdot x + \ln x \cdot 1 = 1 + \ln x.$$

Yhdistetyn funktion derivoimissäännön mukaisesti saadaan lopulta

$$f'(x) = D\left(e^{\ln x \cdot x}\right) = e^{\ln x \cdot x} \cdot D(\ln x \cdot x) = e^{\ln x \cdot x} \cdot (1 + \ln x).$$

Lopputulos voidaan vielä kirjoittaa muotoon $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$.

### 6.4 Logaritminen asteikko

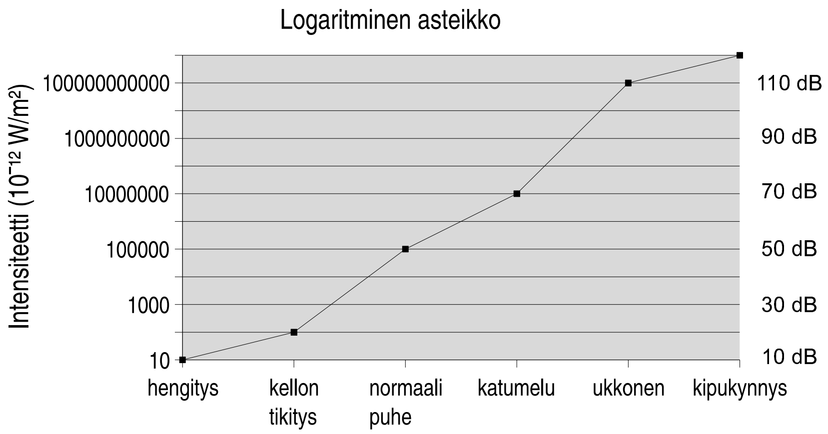
Toisinaan on käytännöllistä ilmaista jonkin suureen arvoja ns. *logaritmisen asteikon* avulla. Tämä tulee kyseeseen erityisesti, jos suureen arvot vaihtelevat erityisen laajoissa rajoissa. Logaritmin ottaminen palauttaa arvot ymmärrettävälle asteikolle.

Esimerkiksi kuuloaisti toimii siten, että äänen intensiteetin kymmenkertaistaminen lisää kuulovaikutelman voimakkuutta vakiomäärällä, oli kyse sitten kovista tai hiljaisista äänistä. (Siis kymmenkertainen voimakkuuden muutos alkuperäiseen verrattuna kuulostaa samalta kuin satakertainen kymmenkertaiseen verrattuna.) Jos samalla asteikolla esimerkiksi kellon tikityksen voimakkuus on 1 ja puheen 10, on ukkosen voimakkuus jopa 1000. Tällaisella asteikolla pienet vaihtelut jäävät asteikon alapäässä varjoon.

Äänen voimakkuuden kuvaamiseen käytetään yleisesti *desibeliasteikkoa*, joka määritellään kaavalla $L = 10 \cdot \lg(I/I_0)$ tai $L = 10 \cdot (\lg(I) - \lg(I_0))$ (katso logaritmin laskusäännöt). Samaa asteikkoa käytetään muissakin yhteyksissä, mutta äänenvoimakkuden tapauksessa $I$ on äänen intensiteetti (yksikkönä $\mathrm{W/m^2}$) ja $I_0$ on kuulokynnystä vastaava intensiteetti. Luku $L$ on voimakkuden vaikutelma desibeleinä.

Kaavan idea on seuraava. Koska kuulijan havaitsema äänenvoimakkuus lisääntyy vakiolla, kun intensiteetti kerrotaan vakiolla, käytetään intensiteetin sijasta sen logaritmia. Logaritmin laskusääntöjen mukaan nimittäin $\lg(c \cdot I) = \lg c + \lg I$. Sitten asteikkoa siirretään niin, että kuulokynnyksellä saadaan nolla. Näin saadaan kuulovaikutelma *beleinä*: $\lg(I) - \lg(I_0)$. Lopulta siirrytään *desi*beleihin kertomalla tulos kymmenellä.

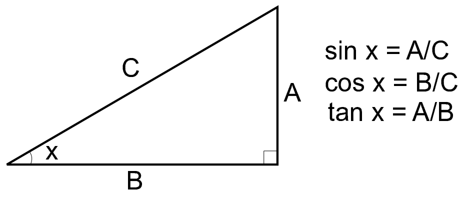
Kaavan mukaan 60 desibelin ääni on intensiteetiltään kymmenen kertaa voimakkaampi kuin 50 desibelin ääni. Toisaalta 70 desibelin ääni on jo sata kertaa voimakkaampi.




Myös äänen korkeutta kuvataan yleensä logaritmisella asteikolla. Tietty sävel soitettuna oktaavia korkeammalta on aina taajuudeltaan kaksinkertainen alkuperäiseen nähden. Esimerkiksi yksiviivainen a soi taajuudella 440 Hz, kaksiviivainen a taajuudella 880 Hz ja kolmiviivainen taajuudella 1760 Hz. Richterin asteikko, jolla ilmaistaan maanjäristysten voimakkuuksia, on myös logaritminen. Yhtä Richterin yksikköä kovempi järistys on alkuperäiseen nähden voimakkuudeltaan kymmenkertainen.

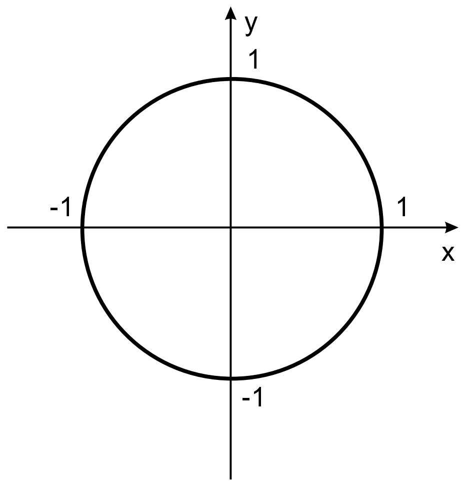
## 6.5 Trigonometriset funktiot

Tässä osassa tutustutaan sini-, kosini- ja tangenttifunktioihin. Näitä kutsutaan trigonometrisiksi funktioiksi, koska ne liittyvät kolmioiden sivujen ja kulmien suhteisiin. Ne voidaan myös määritellä suorakulmaisen kolmion avulla koulusta tutulla tavalla seuraavasti: kulman $x$ sini, jota merkitään $\sin x$, on kulman $x$ vastaisen kateetin pituuden suhde kolmion hypotenuusan pituuteen. Kuvan mukaisesti siis $\sin x = A/C$. Samoin määritellään, että kulman $x$ kosini on kulman viereisen kateetin pituuden suhde hypotenuusan pituuteen. Tangentti puolestaan on vastaisen kateetin suhde viereiseen kateettiin.

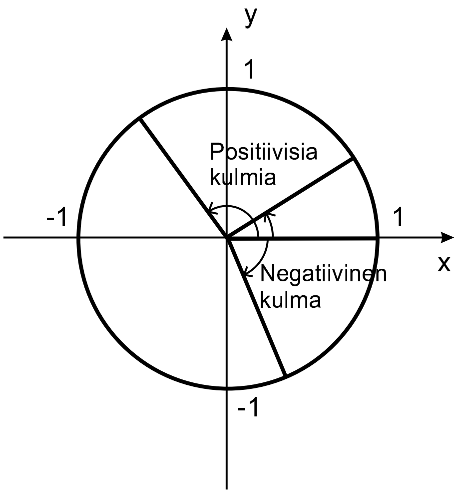


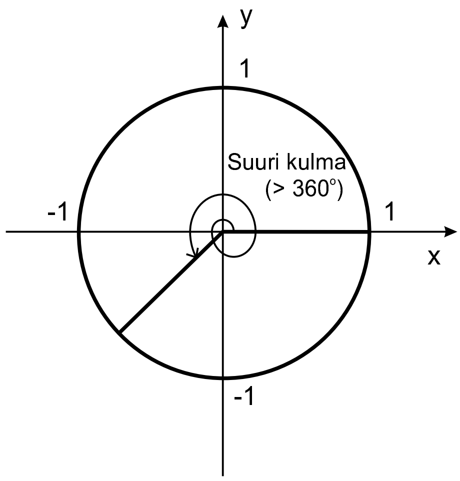

Suorakulmaisessa kolmiossa ei mikään muu kuin tuo suora kulma voi olla 90 astetta suurempi. Tällä tavoin määriteltyjen trigonometristen funktioiden määrittelyjoukoksi jää siis väli $[0, 90[$. Määritelmää voidaan kuitenkin laajentaa niin sanotun *yksikköympyrän* avulla, kun tulkitaan negatiiviset sekä 360 astetta suuremmat kulmat oikealla tavalla.

Yksikköympyrä on x,y-koordinaatistoon piirretty origokeskeinen ympyrä, jonka säde on 1.

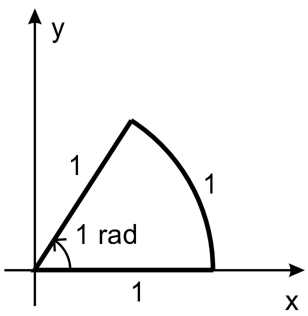



Sijoitetaan yksikköympyrään *suunnattu kulma* (eli kulma, jolla on määrätyt *alkukylki* ja *loppukylki*) siten, että kulman kärkipiste on origossa ja alkukylki kulkee x-akselin positiivista puolta pitkin. Kulman suuruus on positiivinen, jos se aukeaa alkukyljestä vastapäivään, muutoin negatiivinen. Kulma voi olla laajempikin kuin täysi ympyrä.






Kulman suuruus ilmoitetaan tavallisesti *radiaaneissa* eli *absoluuttisissa kulmayksiköissä*. Yksi radiaani on sellaisen kulman laajuus, jota vastaa yksikköympyrän kehällä kaari, jonka pituus on 1.



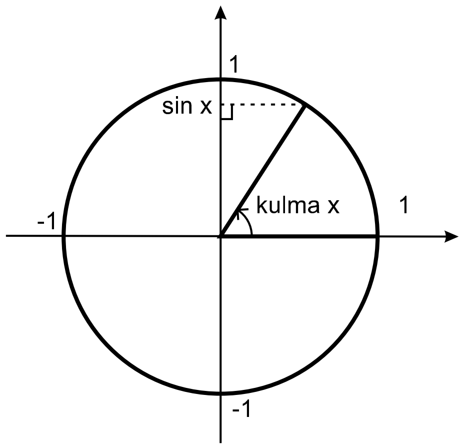

Koska yksikköympyrän kehän pituus on $2\pi$, on koko ympyrässä eli täyskulmassa $2\pi$ radiaania, oikokulmassa $(180^\circ)$ $\pi$ radiaania ja suorassa kulmassa $\frac{\pi}{2}$ radiaania. Yleisesti asteiden ja radiaanien yhteys on seuraava:

$$\text{kulman suuruus radiaaneina} = \text{kulman suuruus asteina} \cdot \frac{\pi}{180}$$

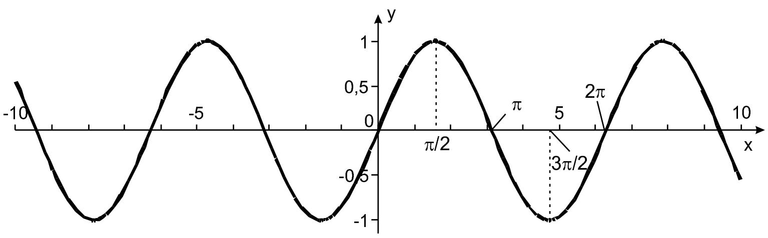
## 6.6 Sinifunktio

Yksikköympyrään piirretyn kolmion avulla voidaan määritellä yleinen sinifunktio.

**Määritelmä 6.11.** Funktio $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään seuraavasti. Olkoon $x$ yksikköympyrään sijoitetun suunnatun kulman suuruus. Tällöin $\sin x$ on kulman loppukyljen ja ympyrän kehän leikkauspisteen y-koordinaatin arvo.




Funktion määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko eli $\mathbb{R}$. Sinifunktion arvot täyttävät suljetun välin $[-1, 1]$, toisin sanoen funktio saa kaikkia arvoja ko. väliltä, välin päätepisteet mukaan lukien. Sinifunktio on kaikkialla jatkuva. Sinifunktion kuvaaja, *sinikäyrä*, aaltoilee -1:n ja 1:n välillä:




Edellisessa kuvassa kulman yksikkönä on käytetty radiaaneja, mikä on matematiikassa yleensä kätevää. Tällöin sinifunktio kasvaa $x$:n kasvaessa 0:sta $\frac{\pi}{2}$:een, alkaa sitten vähetä, muuttuu negatiiviseksi arvon $x = \pi$ jälkeen, alkaa taas kasvaa arvon $x = \frac{3}{2}\pi$ jälkeen ja saavuttaa uudelleen nollan kohdassa $x = 2\pi$. Tämän voi todeta helposti myös pienentämällä ja kasvattamalla suunnattua kulmaa yksikköympyrässä. Käytännössä kohdat, joissa sinifunktion suunta tai merkki vaihtuu, osuvat kohtiin, joissa tarkasteltavan kulman loppukylki siirtyy koordinaatiston neljänneksestä toiseen ja jotka siis ovat suoran kulman $\pi/2$ monikertoja.

Sinifunktio on *jaksollinen*, mikä tarkoittaa, että samat arvot toistuvat aina tietyin välein. Sinifunktion aaltoilu toistuu kuvaajassa aina $2\pi$:n välein, ja funktiolla on ääretön määrä nollakohtia. Trigonometristen funktioiden nollakohtia laskettaessa onkin aina muistettava, että nollakohtia on funktion toistumisjakson välein ääretön määrä. Sinifunktion nollakohdat voisi esittää esimerkiksi seuraavasti:

$$x = 0 + n \cdot \pi,$$

missä $n$ on jokin kokonaisluku (voi olla myös negatiivinen). Tällöin nollakohtia ovat luvun 0 lisäksi kaikki luvut, joissa nollaan on lisätty (tai vähennetty) $\pi$ mielivaltaisen monta kertaa.

**Esimerkki 6.12.** Etsitään väliltä $[0, 4]$ ne luvut $x$, jotka toteuttavat yhtälön $\sin(2x + \pi/2) = 0$. Koska sinifunktio saa arvon nolla kohdassa 0 sekä aina $\pi$:n välein, nähdään

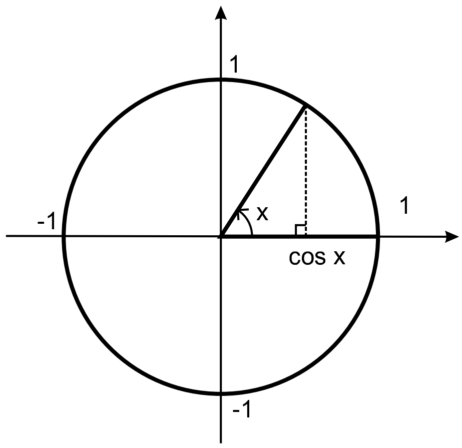
että
$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=0 \iff 2x+\frac{\pi}{2}=0+n\cdot\pi,$$
missä $n$ on mielivaltainen kokonaisluku. Saadusta yhtälöstä voidaan sitten ratkaista $x$:
$$\begin{aligned}2x+\frac{\pi}{2}=n\cdot\pi &\iff 2x=-\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi \quad \mid :2\\ &\iff x=-\frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Nähdään siis, että kysytty yhtälö toteutuu pisteessä $x=-\pi/4$, sekä tämän jälkeen aina $\pi/2$:n välein. Näistä luvuista tutkittavalle välille osuvat $\pi/4\approx 0{,}785$, $3\pi/4\approx 2{,}36$ ja $5\pi/4\approx 3{,}93$.

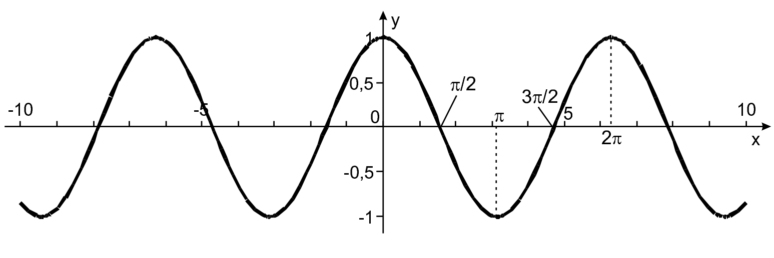
## 6.7 Kosinifunktio

Kosinifunktion määritelmä on hyvin samankaltainen kuin sinifunktion.

**Määritelmä 6.13.** Olkoon $x$ yksikköympyrään sijoitetun suunnatun kulman suuruus. Tällöin $\cos x$ on kulman loppukyljen ja ympyrän kehän leikkauspisteen x-koordinaatin arvo.




Myös kosinifunktio on määritelty kaikkialla $\mathbb{R}$:ssä ja se saa arvot väliltä $[-1,1]$. Samaten kosinifunktio on jatkuva kaikkialla ja toistuu $2\pi$:n pituisella jaksolla. Itse asiassa kosinifunktion kuvaaja on kuin sinifunktion kuvaaja siirrettynä sen verran vasemmalle, että lähtöarvolla 0 funktio saa arvon 1. Tämä voidaan ilmaista kaavana $\cos x=\sin(x+\pi/2)$.



Kosinifunktion nollakohdat on helppo esittää samaan tapaan kuin sinifunktion, tällä kertaa nollakohtaa ei kuitenkaan löydy arvolta $x = 0$ vaan muun muassa kohdasta $x = \frac{\pi}{2}$. Nollakohdat ovat siis:

$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi,$$

missä $n$ on jälleen kerran mielivaltainen kokonaisluku.

## 6.8 Peruskaavoja

Sini- ja kosinifunktioiden jaksollisuudesta johtuen samat funktioiden arvot toistuvat tasavälein ($2\pi$:n välein) lukusuoraa pitkin liikuttaessa. Tämä voidaan ilmaista seuraavilla kaavoilla:

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(x + n \cdot 2\pi),\\ \cos x &= \cos(x + n \cdot 2\pi),\end{aligned}$$

joissa $n$ on mielivaltainen kokonaisluku. Yksikköympyrää tutkimalla voidaan lisäksi helposti johtaa seuraavat säännöt sini- ja kosinifunktioiden arvoille:

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= -\sin x,\\ \cos(-x) &= \cos x,\\ \sin x &= -\sin(x + \pi) = -\sin(x - \pi),\\ \cos x &= -\cos(x + \pi) = -\cos(x - \pi).\end{aligned}$$

Aiemmin mainittiin jo, että kosinifunktio saa samat arvot kuin sinifunktio sai aiemmissa (tai myöhemmissä pisteissä):

$$\begin{aligned}\sin x &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right),\\ \cos x &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Lisäksi suorakulmaista kolmiota koskeva, geometriasta tuttu Pythagoraan lause on yhtäpitävä seuraavan ns. *trigonometrian peruskaavan* kanssa:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tag{6.14}$$

missä merkinnät $\sin^2 x$ ja $\cos^2 x$ tarkoittavat samaa kuin $(\sin x)^2$ ja $(\cos x)^2$. Ratkaisemalla tästä kaavasta $\sin x$ ja $\cos x$ saadaan sinin ja kosinin välille vielä seuraavat yhteydet:

$$\begin{aligned}\sin x &= \pm\sqrt{1 - \cos^2 x},\\ \cos x &= \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}.\end{aligned}$$

Näissä kaavoissa etumerkki täytyy valita sen mukaan, kumman etumerkin sini tai kosini saa annetulla kulman arvolla. Neliöjuurihan tuottaa kuitenkin aina positiivinen luvun.

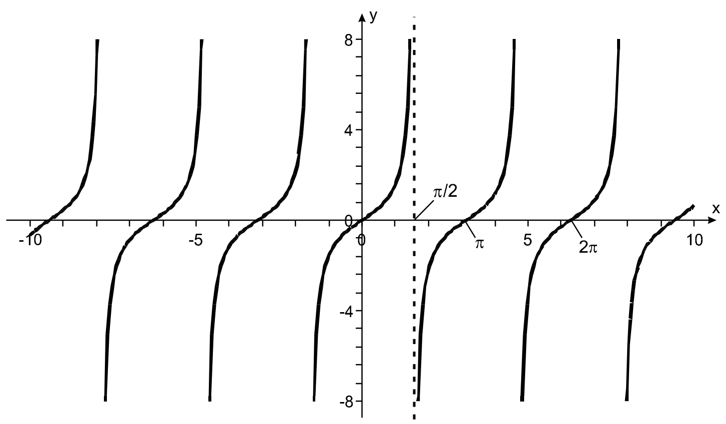
## 6.9 Tangenttifunktio

Tangenttifunktio on kolmas tavallinen trigonometrinen funktio, jonka ominaisuudet kuitenkin poikkeavat melkoisesti sini- ja kosinifunktioiden ominaisuuksista. Se määritellään sinin ja kosinin osamääränä.

**Määritelmä 6.15.** Tangenttifunktion arvo kulmalla $x$ on sinin ja kosinin osamäärä:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Tangenttifunktion määrittelyjoukosta puuttuvat kaikki $\cos x$:n nollakohdat eli pisteet, jotka ovat muotoa $\pi/2 + n \cdot \pi$, missä $n$ voi olla mikä tahansa kokonaisluku. Tangenttifunktio on määrittelyjoukossaan jatkuva ja derivoituva ja saa arvoja koko reaalilukujen joukon alueelta. Tangenttifunktiokin on jaksollinen, jakson pituus on tällä kertaa $\pi$, ja nollakohdat ovat muotoa $x = 0 + n \cdot \pi$, missä $n$ on kokonaisluku.




Samoin kuin sini- ja kosinifunktioille, myös tangenttifunktiolle voidaan helposti johtaa seuraavat, toisinaan laskemista helpottavat peruskaavat:

$$\tan(-x) = -\tan x,$$
$$\tan x = \tan(x + n\pi),$$

missä $n$ on kokonaisluku.

## 6.10 Trigonometristen funktioiden derivaatat

Kun kulman yksikkönä käytetään radiaania, saavutetaan muun muassa se hyöty, että sini- ja kosinifunktiot ovat toistensa derivaattoja. Täytyy vain muistaa, että kosinifunktiota derivoitaessa on lisättävä miinusmerkki. Siis:

$$D \sin x = \cos x,$$
$$D \cos x = -\sin x.$$

**Esimerkki 6.16.** Derivoidaan tangenttifunktio $f(x) = \tan x$. Määritelmän mukaan

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Tangenttifunktio on derivoituva koko määrittelyjoukossaan, eli kun $\cos \neq 0$. Tällöin sen derivaatta saadaan osamäärän derivoimissäännöllä:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{D\sin x \cdot \cos x - \sin x \cdot D\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Trigonometrian peruskaavan mukaan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, joten

$$f'(x) = D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

**Esimerkki 6.17.** Tutkitaan, missä pisteissä funktio $f(x) = 2\sin x + x$ saa ääriarvoja avoimella välillä $]0, 10[$ . Tätä varten derivoidaan ensin kyseinen funktio:

$$f'(x) = 2\cos x + 1.$$

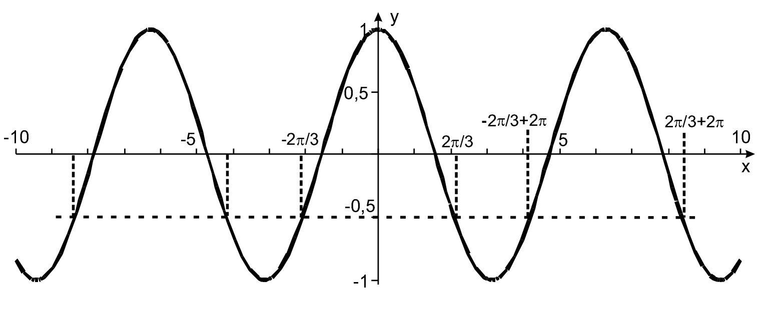
Ääriarvoja funktio voi saada vain derivaatan nollakohdissa. Ratkaistaan nämä:

$$2\cos x + 1 = 0 \iff \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Laskimella voidaan selvittää, missä pisteissä kosini saa arvon $-1/2$. Vastaukseksi pitäisi tulla $120°$, joka on $2\pi/3$ radiaania (likiarvo 2,094). Tämän voi myös katsoa jostain sopivasta taulukosta. Nyt on kuitenkin muistettava kaksi seikkaa. Ensinnäkin kosini saa saman arvon aina $2\pi$:n välein. Toisekseen $\cos x = \cos(-x)$, joten myös $\cos(-2\pi/3) = -1/2$. Näin saadaan kahdenlaisia ratkaisuja:

$$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi,$$

missä $n$ voi olla mikä tahansa kokonaisluku.



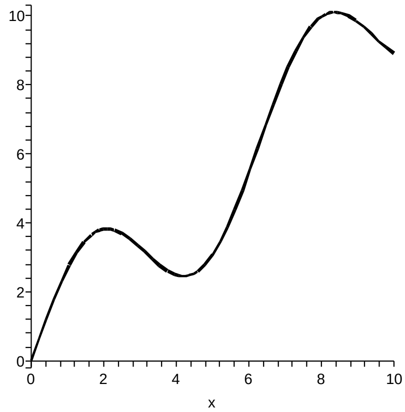

Saatuja nollakohtia tutkimalla nähdään, että niistä kysytylle välille osuvat vain

$$\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}094, \qquad \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3} \approx 8{,}378 \quad \text{ja} \quad -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3} \approx 4{,}188.$$

Laskemalla derivaatan arvoja näiden nollakohtien välissä (muista asettaa laskimeen kulmanyksiköksi radiaanit!) saadaan seuraavanlainen merkkikaavio:

| | $0 < x < 2\pi/3$ | $2\pi/3 < x < 4\pi/3$ | $4\pi/3 < x < 8\pi/3$ | $8\pi/3 < x < 10$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |

Nähdään siis, että funktiolla $f$ on lokaalit maksimit kohdissa $x = 2\pi/3$ ja $x = 8\pi/3$ sekä lokaali minimi kohdassa $x = 4\pi/3$.




Sinin ja kosinin derivointikaavoista saadaan jälleen vastaavat integroimiskaavat:

$$\int_a^b \sin x \, dx = \Big/_{\!a}^{\,b} - \cos x,$$

$$\int_a^b \cos x \, dx = \Big/_{\!a}^{\,b} \sin x.$$

**Esimerkki 6.18.** Tietylle alueelle osuvan auringonsäteilyn määrä vaihtelee jaksollisesti vuodenaikojen mukaan. Tämä vaihtelu vaikuttaa merkittävästi kasvien kasvunopeuteen. Jos muita tekijöitä ei oteta huomioon, voitaisiin lauhkealla vyöhykkeellä kasvavan ruoholajin kasvunopeutta arvioida esimerkiksi seuraavalla funktiolla:

$$k(t) = 1500 - 900 \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) \quad \text{(kg/ha/kk)},$$

missä $t$ on aika kuukausina vuoden alusta lähtien. Keskellä kesää eli kun $t = 6, 18, 30$, jne., kosini saa minimiarvon $-1$, jolloin funktio $k$ saa maksimiarvon 2400. Vastaavasti keskellä talvea on $t = 0, 12, 24$, jne., jolloin funktio $k$ saa minimiarvon 600. Lasketaan ruohon määrän kertymä marraskuun alusta helmikuun loppuun, eli välillä $[-2, 2]$ (tai yhtä hyvin $[10, 14]$). Käytetään yhdistetyn funktion integrointia:

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^{2} 1500 - 900\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)\,dt \\
&= \int_{-2}^{2} 1500\,dt - \frac{6}{\pi}\int_{-2}^{2} 900\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)\cdot\frac{\pi}{6}\,dt \\
&= \Big/_{-2}^{2}\, 1500t - \frac{6}{\pi}\Big/_{-2}^{2}\, 900\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right) \\
&= \big(3000 - (-3000)\big) - \frac{6}{\pi}\left(900\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 900\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
&\approx 3022{,}8.
\end{aligned}$$

Ruohoa kertyy siis talvikuukausien aikana noin 3 tonnia hehtaaria kohti.

# 7 Differentiaaliyhtälöt

## 7.1 Differentiaaliyhtälöt ja alkuarvotehtävät

Useissa tilanteissa jonkin suureen muutos riippuu jollain tavoin suureen tilasta. Aiemmin on jo esitetty esimerkkejä, joissa muun muassa bakteerikannan lisääntymisnopeus oli riippuvainen bakteerien määrästä. Tällä tavoin bakteerien määrä tulevaisuudessa myös riippuu niiden määrästä menneisyydessä: mitä vähemmän bakteereja nyt, sitä pienempi lisääntymisnopeus ja sitä vähemmän bakteereja tulevaisuudessa. Riippuvuus voi tietysti olla paljon monimutkaisempaakin.

Jos suureen arvoa kuvaa jokin derivoituva funktio, tämän derivaatta kertoo suureen muutosnopeudesta. (Muutos voi olla paitsi ajallista, myös paikallista tai johonkin muuhun muuttujaan sidottua.) Tällöin edellä kuvatun kaltaisia riippuvuuksia voidaan ilmaista matemaattisesti yhtälöillä, jotka sitovat funktion derivaatan arvot jollain tavoin funktion arvoihin. Tällaisia yhtälöitä *differentiaaliyhtälöiksi*. Edellä mainitun bakteeriesimerkin riippuvuutta kuvaa differentiaaliyhtälö

$$S'(t) = k \cdot S(t),$$

missä funktio $S$ kuvaa bakteerien määrää ajan suhteen ja $k$ on verrannollisuuskerroin, joka kuvaa bakteerien lisääntymiskykyä. Yhtälö siis ilmaisee, että bakteerien määrän muutosnopeus $S'(t)$ hetkellä $t$ on suoraan verrannollinen bakteerien määrään $S(t)$ kyseisellä hetkellä. Tällaisesta yhtälöstä olisi tarkoitus päätellä, minkälainen on funktio $S$. Yhtälön ratkaiseminen tarkoittaa siis kyseisen funktion riippuvuussäännön määrittämistä.

Differentiaaliyhtälöissä esiintyy aina (vähintään yksi) tuntematon funktio, joka pyritään ratkaisemaan. Koska ratkaistavana ei siis ole luku vaan funktio, ei ratkaisussa pärjätä pelkästään tavallisten yhtälöiden käsittelyssä opituilla menetelmillä. Lisäksi differentiaaliyhtälön ratkaisu ei ole yleensä yksikäsitteinen, vaan moni funktio voi toteuttaa saman yhtälön. Tällöin tarvitaan jotain lisätietoa, jotta funktio voitaisiin ratkaista yksikäsitteisesti. Tällainen lisätieto voisi olla esimerkiksi bakteerien määrä jollain sovitulla alkuhetkellä. Tämä lisätieto auttaa ratkaisemaan bakteerien määrää ajan funktiona kuvaavan funktion yksikäsitteisesti, mikäli verrannollisuuskerroin $k$ tunnetaan (riippuu bakteerien fysiologiasta).

Differentiaaliyhtälöiden yhteydessä käytetään matematiikassa yleensä tiettyjä melko vakiintuneita merkintöjä. Tuntematonta funktiota merkitään usein $y$ ja sen derivaattaa $y'$. Lisäksi yhtälössä voi esiintyä derivaatan derivaattoja $y''$, $y'''$ jne. Funktion muuttujana voi olla $x$, mutta hyvin usein myös $t$, varsinkin jos funktio kuvaa jotain ajasta riippuvaa suuretta. Jos muuttujana on $t$, funktiota itseään voidaan toisinaan jopa merkitä $x$:llä, esimerkiksi $x(t) = t^2$. Koska differentiaaliyhtälön ajatellaan yleensä pätevän kaikilla muuttujan arvoilla (esimerkiksi bakteerien määrän riippuvuutta kuvaava yhtälö pätee teoriassa kaikilla ajanhetkillä), niin yhtälöissä jätetään lisäksi yleensä merkitsemättä funktion muuttuja; ei siis merkitä funktion arvoa (oikeaoppisesti) $y(x)$ vaan yksinkertaisesti $y$.

**Määritelmä 7.1.** Yhtälöä, jossa esiintyy vähintään yksi tuntemattoman funktion $y$ derivaatta tai korkeampi derivaatta, kutsutaan *differentiaaliyhtälöksi* (DY). Differentiaaliyhtälön ratkaisu on mikä tahansa funktio, joka $y$:n paikalle sijoitettuna toteuttaa yhtälön. Yhtälön *kertaluku eli aste* on korkeimman siinä esiintyvän derivaatan kertaluku.

**Esimerkki 7.2.** Differentiaaliyhtälöitä:

$$\begin{aligned} y' &= 0 && \text{(1. aste)},\\ y'' + 2xy &= \sqrt{x} && \text{(2. aste)},\\ y''y &= \frac{x}{\sqrt{y'''}} && \text{(3. aste)}. \end{aligned}$$

**Esimerkki 7.3.** Tarkastellaan yhtälöä

$$y'' - 2y' + y = x.$$

Tämä on toisen asteen differentiaaliyhtälö. Yhtälön eräs ratkaisu on $y(x) = e^x + x + 2$, sillä sen derivaatat ovat

$$y'(x) = e^x + 1 \quad \text{ja} \quad y''(x) = e^x.$$

Kun nämä sijoitetaan yhtälön vasemmalle puolelle, saadaan

$$y'' - 2y' + y = e^x - 2(e^x + 1) + (e^x + x + 2) = x.$$

Tämä on sama kuin yhtälön oikea puoli, eli funktio $y$ toteuttaa yhtälön.

**Esimerkki 7.4.** Jos suureen muutosnopeus on suoraan verrannollinen suureen nykytilaan, kuvaa tilannetta differentiaaliyhtälö

$$y' = ky,$$

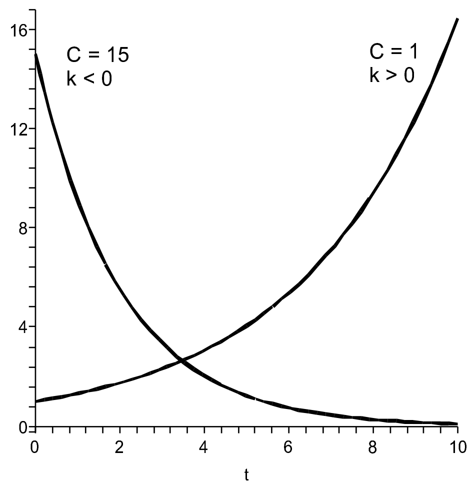
missä $k$ on verrannollisuuskerroin. Tällaisen yhtälön ratkaisut ovat muotoa

$$y(t) = Ce^{kt},$$

missä $C$ on jokin tuntematon vakio. Nimittäin, tällaisen funktion derivaatta on

$$y'(t) = Ce^{kt} \cdot k = k \cdot Ce^{kt} = ky(t),$$

joten nähdään, että $y$ todella toteuttaa kyseisen yhtälön. Tällaista yhtälöä sanotaan *eksponentiaalisen kasvun* (tai vähenemisen) yhtälöksi, sillä ratkaisufunktio $y$ on eksponenttifunktio. Mikäli verrannollisuuskerroin $k$ on positiivinen, ratkaisu on eksponentiaalisesti kasvava, mikäli $k$ on negatiivinen, ratkaisu on eksponentiaalisesti vähenevä ja lähestyy nollaa. Luvun alun bakteeriesimerkki on tyypillinen esimerkki eksponentiaalisesta kasvusta. Luku $C$ on tuntematon vakio, joka kuvaa systeemin alkutilaa. Sen arvoa ei voi päätellä suoraan ilman lisätietoja.




Kuva 1: Eksponentiaalisen kasvun kuvaajia

**Esimerkki 7.5.** Ilman ympäristön asettamia rajoitteita populaation koon kehittyminen noudattaa eksponentiaalisen kasvun mallia. Ympäristön vaikutus voidaan ottaa huomioon lisäämällä yhtälöön ympäristön kantokykyä kuvaava vakio $E$. Olkoon $N(t)$ populaation koko ajanhetkellä $t$. Suhde $N(t)/E$ kuvaa ympäristön kuormitusta. Kun se on 0, niin $N(t) = 0$ eikä ympäristö ole lainkaan kuormittunut. Kun se on 1, niin $N(t) = E$ ja ympäristö asettaa esteen lisääntymiselle. Näin saadaan yhtälö populaation lisääntymiselle yhtälö

$$N' = kN\left(1 - \frac{N}{E}\right).$$

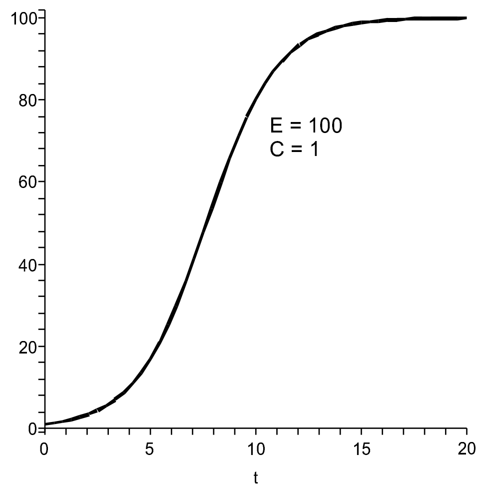
Tässä yhtälössä $k$ on jälleen eliöiden lisääntymiskykyä kuvaava vakio, joka on nyt positiivinen. Eksponentiaalisesta mallista poiketen mukana on nyt termi $1 - N(t)/E$, joka pakottaa lisääntymisnopeuden nollaan, kun populaation koko $N(t)$ saavuttaa ympäristön kantokyvyn $E$.

Edellä kuvattua yhtälöä sanotaan *logistisen kasvun* yhtälöksi. Sen ratkaisut ovat muotoa

$$N(t) = \frac{E \cdot Ce^{kt}}{E + C(e^{kt} - 1)},$$

missä $C$ on jälleen populaation alkutilaa kuvaava tuntematon vakio.

Edellisissä esimerkeissä nähtiin, että differentiaaliyhtälö ei määrää systeemiä välttämättä täydellisesti, vaan ratkaisuun saattaa jäädä tuntemattomia vakioita. Usein systeemistä kuitenkin tiedetään sen toteuttaman differentiaaliyhtälön lisäksi sen alkutila tai tila




Kuva 2: Eräs logistisen kasvun kuvaaja

jollakin muulla hetkellä. Nämä *alkuarvot* auttavat systeemin tilaa kuvaavan funktion tarkassa määrittämisessä.

**Määritelmä 7.6.** Ongelmaa, jossa yritetään ratkaista tuntematon funktio, kutsutaan *alkuarvotehtäväksi* (AAT), jos tiedetään

1) jokin $y$:n toteuttama differentiaaliyhtälö, sekä

2) $y$:n sekä sen derivaattojen arvot jossain (samassa) pisteessä $(n-1)$:nteen derivaattaan asti, missä $n$ on yhtälön kertaluku.

**Esimerkki 7.7.** Tarkastellaan tavallista eksponentiaalisen kasvun mallia, jota kuvaa yhtälö

$$y'(t) = ky(t),$$

missä $k$ on verrannollisuuskerroin. Tällaisen yhtälön ratkaisut ovat muotoa

$$y(t) = Ce^{kt},$$

missä $C$ on jokin tuntematon vakio. Jos tunnetaan systeemin alkutila eli funktion $y$ arvo ajanhetkellä $y(0)$, voidaan vakion $C$ arvo selvittää. Esimerkiksi, jos $y$ kuvaa bakteerikasvuston massaa ja alussa bakteereja oli 3 mg, voidaan merkitä $y(0) = 3$. Funktion $y$ lausekkeen mukaan

$$y(0) = C \cdot e^{k \cdot 0} = C \cdot 1 = C,$$

joten voidaan päätellä, että $C = 3$.

**Esimerkki 7.8.** Aina alkuarvoehtokaan ei riitä yhtälön yksikäsitteiseen ratkaisemiseen. Tarkastellaan vaikkapa alkuarvotehtävää

$$y' = \sqrt{y}, \qquad y(0) = 0.$$

Heti nähdään, että vakiofunktio $y_1(x) = 0$ toteuttaa yhtälön ja alkuarvoehdon, joten se on eräs ratkaisu. Toisaalta myös $y_2(x) = x^2/4$ on ratkaisu. Tämän derivaatta on nimittäin $y_2'(x) = 2x/4 = x/2$, ja

$$\sqrt{y_2} = \sqrt{\frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{4}} = \frac{x}{2},$$

joten $y_2' = \sqrt{y_2}$. Lisäksi $y_2$ toteuttaa myös alkuarvoehdon.

Koska differentiaaliyhtälöissä esiintyy derivaattoja, täytyy niitä ratkaistaessa yleensä etsiä funktioiden integraalifunktioita. Tämän vuoksi differentiaaliyhtälön ratkaisemista kutsutaan joskus yhtälön integroimiseksi. Integraalifunktioita etsittäessä on muistettava, että tietyn funktion integraalifunktio ei ole koskaan yksikäsitteinen. Eri integraalifunktiot voivat poiketa toisistaan integroimisvakiolla, joka on otettava huomioon.

**Esimerkki 7.9.** Jotkut differentiaaliyhtälöt ovat yksinkertaisia ratkaista. Tarkastellaan esimerkiksi alkuarvotehtävää

$$y'' = 2x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

Tämä yhtälö sanoo yksinkertaisesti, että tuntematon funktio $y$ on sellainen, jonka toisen derivaatan lauseke on $2x$. (Huomaa, että itse funktio $y$ ei välttämättä esiinny yhtälössä.) Yhtälö voidaan ratkaista peruuttamalla derivointi kahdesti, eli etsimällä funktion $y''$ integraalifunktiot $y'$, ja sitten tämän funktion integraalifunktiot $y$. Aluksi saadaan

$$y'(x) = \int y''(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + C.$$

Tässä ei saa unohtaa integroimisvakiota $C$. Toisen alkuarvoehdon mukaan nimittäin pitää päteä $y'(0) = -1$, ja toisaalta

$$y'(0) = 0^2 + C = C,$$

joten itse asiassa $C = -1$ ja $y'(x) = x^2 - 1$. Nyt voidaan jatkaa:

$$y(x) = \int y'(x)\,dx = \int x^2 - 1\,dx = \frac{x^3}{3} - x + D.$$

Edelleen, koska ensimmäisen alkuarvoehdon mukaan pätee $y(0) = 0$, mutta toisaalta

$$y'(0) = \frac{0^3}{3} - 0 + D = 0 - 0 + D = D,$$

niin itse asiassa $D = 0$ ja $y(x) = x^3/3 - x$.

Jos alkuarvoehtoja ei olisi, ei vakiota $C$ olisi voitu selvittää. Tällöin ratkaisuksi saataisiin

$$y(x) = \int y'(x)\,dx = \int x^2 + C\,dx = \frac{x^3}{3} + Cx + D,$$

ja ratkaisuun jää kaksi tuntematonta (integroimis)vakiota.

## 7.2 Separoituvan yhtälön ratkaiseminen

Separoituvia differentiaaliyhtälöitä esiintyy käytännön tilanteissa melko usein, ja niiden ratkaisumenetelmä on yksinkertainen. Separoituvassa differentiaaliyhtälössä muuttujan arvo ja funktion arvo saadaan yhtäsuuruusmerkin eri puolille.

**Määritelmä 7.10.** Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä kutsutaan *separoituvaksi*, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$g(y)y' = h(x),$$

missä $g(y)$ on lauseke, jossa ei esiinny ollenkaan muuttujaa $x$ (paitsi funktion $y$ muuttujana) ja $h(x)$ on lauseke, jossa ei esiinny lainkaan tuntematonta funktiota $y$.

**Esimerkki 7.11.**

a) Yhtälö

$$2yy' = x^2$$

on separoituva. Tässä $g(y) = 2y$ ja $h(x) = x^2$.

b) Myös yhtälö

$$y' = (x+2)y^2$$

on separoituva, jos $y \neq 0$, sillä se voidaan tällöin jakaa puolittain $y^2$:lla, jolloin saadaan

$$\frac{y'}{y^2} = x + 2.$$

Tässä $g(y) = 1/y^2$ ja $h(x) = x + 2$.

c) Yhtälö

$$y' + 2y = x$$

ei ole separoituva, sillä se ei ole muotoa $g(y)y' = h(x)$, eikä sitä voi myöskään muuttaa tähän muotoon.

Separoituvan differentiaaliyhtälön ratkaiseminen perustuu yhdistetyn funktion derivaattaa koskevaan integrointisääntöön. Tarkoituksena on päästä eroon $y$:n derivaatasta, jolloin yhtälö muuttuu differentiaaliyhtälöstä tavalliseksi algebralliseksi yhtälöksi.

Kun muistetaan $y$:n olevan itse asiassa $x$:n funktio, niin huomataan, että yhtälön vasemmalla puolella oleva $g(y) = g(y(x))$ on yhdistetyn funktion lauseke. Merkitään $G$:llä jotain funktion $g$ integraalifunktiota. Tällöin $G' = g$, joten separoituva yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$G'(y(x))y'(x) = h(x).$$

Nyt nähdään, että vasemmalla puolella olevassa lausekkeessa on yhdistetty funktio kerrottu sisäfunktion derivaatalla. Tähän voidaan suoraan soveltaa sopivaa integroimissääntöä (numero 5), jolloin vasemman puolen integraalifunktioksi saadaan

$$\int G'(y(x))y'(x)\,dx = G(y(x)) + C.$$

Vasemman puolen integraalifunktion on oltava sama kuin oikean puolen, jonkin vakion lisäystä lukuunottamatta. Jos merkitään oikean puolen funktion $h$ jotain integraalifunktiota $H$, niin saadaan ratkaisuksi

$$G(y(x)) = H(x) + C.$$

Tämä on nyt tavallinen yhtälö, koska siinä ei enää esiinny $y$:n derivaattoja. Tästä pyritään vielä ratkaisemaan $y$, mutta se ei ole aina mahdollista.

**Esimerkki 7.12.** Ratkaistaan yhtälö

$$2yy' = x^2.$$

Tässä $g(y) = 2y$ ja $h(x) = x^2$. Funktio $g$ on siis ikään kuin *muuttujan $y$ funktio*, ja sen eräs integraalifunktio on $G(y) = y^2$. Funktion $h$ integraalifunktioksi voidaan valita esimerkiksi $H(x) = x^3/3$. Edellä esitetyn ratkaisumenetelmän mukaan $G(y) = H(x)+C$, missä $C$ on jokin vakio, joten

$$y^2 = x^3/3 + C.$$

Tästä voidaan vielä ratkaista $y$ ottamalla molemmilta puolilta neliöjuuri. Täytyy kuitenkin muistaa ottaa huomioon myös negatiivinen vaihtoehto:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x^3 + C}.$$

Usein yhtälön muuttaminen separoituvaan muotoon vaatii lisäoletuksia, joiden avulla voi löytyä lisäratkaisuja. Tällaisia ratkaisuja, jotka löytyvät ennen kuin yhtälö on separoituvassa muodossa, kutsutaan *erillisratkaisuiksi*.

**Esimerkki 7.13.** Ratkaistaan yhtälö

$$y' = y^2.$$

Yhtälö ei ole separoituvassa muodossa, mutta se voidaan helposti muuttaa sellaiseen jakamalla termillä $y^2$. Tämä on kuitenkin kiellettyä, jos $y = 0$. Toisaalta funktio $y(x) = 0$ toteuttaa kyseisen yhtälön. Se on siis erillisratkaisu.

Muiden ratkaisujen löytämiseksi voidaan olettaa, että $y \neq 0$. Jaetaan yhtälö puolittain $y^2$:lla:

$$y^{-2}y' = 1.$$

Nyt $g(y) = y^{-2}$, ja tämän eräs integraalifunktio on $G(y) = -y^{-1}$. Toisaalta funktion $h(x) = 1$ eräs integraalifunktio on $H(x) = x$. Saadaan siis

$$-y^{-1} = x + C,$$

josta ratkeaa helposti

$$y(x) = -\frac{1}{x+C}.$$

Tämä separoimalla saatu ratkaisu ei saa koskaan arvoa 0, niin kuin oletettiinkin. Yhtälön ratkaisuja ovat siis erillisratkaisun lisäksi kaikki separoimalla saadut ratkaisut, jotka riippuvat vakiosta $C$:

$$y(x) = 0 \quad \text{tai} \quad y(x) = -\frac{1}{x+C}.$$

Jos tehtävässä olisi vielä alkuarvoehto, sen avulla voitaisiin valita oikea ratkaisu. Jos esimerkiksi $y(1) = 0$, niin tiedetään, että erillisratkaisu $y(x) = 0$ on oikea, koska separoimalla saatu ratkaisu ei voi koskaan saada arvoa 0.

Separoituvan yhtälön ratkaisumenetelmän muistamista voi helpottaa, jos ajattelee vain "integroivansa molemmat puolet". Samalla voi yhdistetyn funktion integroimissäännön muistaa muodossa $y'\,dx \rightsquigarrow dy$.

**Esimerkki 7.14.** Ratkaistaan eksponentiaalisen kasvun mallin mukainen alkuarvotehtävä

$$y'(t) = -3y(t), \qquad y(0) = 4.$$

Yhtälö ei ole separoidussa muodossa, mutta se voidaan helposti muuttaa sellaiseen jakamalla puolittain termillä $y$. Tämä on kuitenkin kiellettyä, jos $y = 0$. Erillisratkaisu $y(t) = 0$ ei kuitenkaan toteuta alkuarvoehtoa, joten voidaan olettaa, että $y \neq 0$. Jaetaan nyt yhtälö puolittain $y$:llä ja integroidaan:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot y' &= -3 \\ \int \frac{1}{y} \cdot y'\,dt &= \int -3\,dt \\ \int \frac{1}{y}\,dy &= \int -3\,dt \\ \ln|y| &= -3t + C. \end{aligned}$$

Integroimisvakio tarvitsee merkitä vain toiselle puolelle. Koska alkuarvoehdon mukaan $y(0) = 4 > 0$, niin voidaan jättää itseisarvomerkit pois.

Koska logaritmi $y$:stä kertoo, mihin potenssiin kantaluku pitäisi korottaa, jotta saataisiin $-3t + C$, nähdään että

$$y = e^{-3t+C} = e^C \cdot e^{-3t}.$$

On tapana merkitä $e^C = y_0$, jolloin ratkaisufunktio on $y(t) = y_0 e^{-3t}$, missä $y_0 = e^C$ on jokin positiivinen vakio.

Koska alkuarvoehdon mukaan $y(0) = 4$, ja toisaalta

$$y(0) = y_0 \cdot e^{k \cdot 0} = y_0 \cdot 1 = y_0,$$

niin nähdään, että vakio $y_0 = 4$. Ratkaisufunktio on siis

$$y(t) = 4e^{-3t}.$$

**Esimerkki 7.15.** Myös logistisen mallin yhtälö on separoituva. Muokataan yhtälön lauseketta ensin hieman:

$$N' = kN\left(1 - \frac{N}{E}\right) = k\left(N - \frac{N^2}{E}\right).$$

Voidaan olettaa, että $N > 0$ (eli populaatio ei ole tyhjä) ja $N < E$ (eli populaatio ei ole saavuttanut ympäristön kantokykyä), jolloin yhtälö voidaan jakaa puolittain oikean puolen termillä $N - N^2/E$:

$$\frac{1}{N - N^2/E} N' = k.$$

Yhtälö on nyt separoidussa muodossa: $H(t) = k$ ja $G(N) = 1/(N - N^2/E)$, joista jälkimmäinen voidaan myös kirjoittaa muodossa

$$G(N) = \frac{1}{N} - \frac{1}{N - E}.$$

Integroidaan yhtälö puolittain ja muistetaan, että $N > 0$ ja $N - E < 0$:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N-E}\right) N'\,dt &= \int k\,dt \\ \int \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N-E}\right) dN &= \int k\,dt \\ \ln N - \ln(E-N) &= kt + C. \end{aligned}$$

Logaritmien laskusääntöjen mukaan $\ln N - \ln(E-N) = \ln \frac{N}{E-N}$, joten eksponenttifunktion avulla saadaan

$$\frac{N}{E-N} = e^C \cdot e^{kt}.$$

Merkitään nyt $e^C = N_0/(E - N_0)$ ja ratkaistaan vielä yhtälöstä $N$:

$$\begin{aligned} \frac{N}{E-N} &= \frac{N_0 e^{kt}}{E-N_0} \qquad \| \text{ (kerrotaan ristiin)} \\ EN - N_0 N &= EN_0 e^{kt} - NN_0 e^{kt} \\ EN - NN_0 + NN_0 e^{kt} &= EN_0 e^{kt} \\ \big(E + N_0(e^{kt} - 1)\big)N &= EN_0 e^{kt} \\ N &= \frac{EN_0 e^{kt}}{E + N_0(e^{kt} - 1)}. \end{aligned}$$

Jos nyt $t = 0$, niin

$$N(0) = \frac{EN_0 e^{k\cdot 0}}{E + N_0(e^{k\cdot 0} - 1)} = \frac{EN_0 \cdot 1}{E + \underbrace{N_0(1-1)}_{=0}} = \frac{EN_0}{E} = N_0.$$

Vakio $N_0$ kuvaa siis populaation kokoa ajanhetkellä 0.

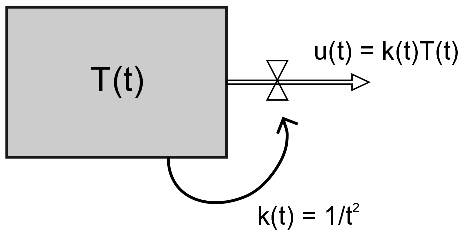
## 7.3 Virtausmallit

Virtausmallit tuottavat helposti differentiaaliyhtälöitä, sillä aineen virtaaminen johonkin säiliöön tai sieltä pois aiheuttaa aineen määrän muutoksen säiliössä. Jos virtausnopeudet ovat jonkin takaisinkytkennän kautta sidoksissa aineen määrään säiliössä, tilannetta voidaan kuvata differentiaaliyhtälöllä.

**Esimerkki 7.16.** Olkoon $T(t)$ aineen määrä säiliössä ajanhetkellä $t$. Ainetta on hetkellä $t = 1$ säiliössä 10 litraa, eikä sitä tule lisää. Ulosvirtaavan aineen nopeus $u(t)$ puolestaan riippuu aineen määrästä säiliössä niin, että $u(t) = kT(t)$. Verrannollisuuskerroin $k$ ei kuitenkaan tällä kertaa ole vakio, vaan vähenee ajan myötä noudattaen funktiota $k(t) = 1/t^2$. Säiliössä olevan aineen määrän muutos ajanhetkellä $t$ on $T'(t)$, ja koska se riippuu nyt vain ulosvirtauksen nopeudesta, saadaan yhtälö $T'(t) = -u(t) = -k(t)T(t)$ eli

$$T'(t) = -\frac{1}{t^2} \cdot T(t).$$

Tilannetta kuvaa oheinen virtauskaavio.




Tämä yhtälö voidaan separoida jakamalla puolittain $T$:llä. Koska alkuehdon mukaan aineen määrä ei ole nolla, niin jako voidaan suorittaa, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} \cdot T' &= -\frac{1}{t^2} \\
\int \frac{1}{T} \cdot T' \, dt &= \int -\frac{1}{t^2} \, dt \\
\int \frac{1}{T} \, dT &= \int -t^{-2} \, dt \\
\ln |T| &= -\frac{t^{-1}}{-1} + C \\
\ln |T| &= \frac{1}{t} + C.
\end{aligned}$$

Koska aineen määrä säiliössä on aina positiivinen, voidaan itseisarvomerkit jättää pois. Eksponenttifunktion avulla saadaan

$$T = e^{\frac{1}{t}+C} = e^C \cdot e^{\frac{1}{t}} = Ae^{\frac{1}{t}},$$

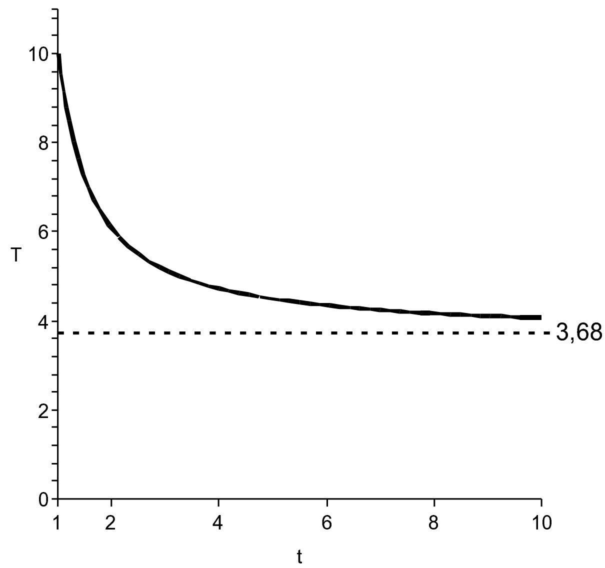
missä on merkitty $e^C = A$. Alkuehdon mukaan $T(1) = 10$, ja toisaalta

$$T(1) = Ae^{\frac{1}{1}} = Ae,$$

joten $A \cdot e = 10$, josta $A = 10/e = 10e^{-1}$. Alkuarvotehtävän ratkaisuksi saadaan siis funktio

$$T = 10e^{-1}e^{\frac{1}{t}} = 10e^{\frac{1}{t}-1}.$$

Kun $t$:tä kasvatetaan, niin $1/t \to 0$, joten $\lim_{t\to\infty} T(t) = 10e^{-1} \approx 3{,}68$.




# 8 Matriisilaskenta

Kurssin loppuosassa tutustutaan matriiseihin ja niiden käyttöön lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemisessa.

## 8.1 Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen

**Määritelmä 8.1.** Yhtälöä

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

missä $a_1, \ldots, a_n$ sekä $b$ ovat vakioita ja $x_1, \ldots, x_n$ ovat tuntemattomia, kutsutaan *n:n tuntemattoman lineaariseksi yhtälöksi*. Jos liitetään yhteen $m$ kappaletta lineaarisia yhtälöitä, joissa on samat tuntemattomat, saadaan *lineaarinen yhtälöryhmä*:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. .$$

Lukuja $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ nimitetään yhtälöryhmän *kertoimiksi*. Jos tuntemattomia on vähän, niitä merkitään yleensä $x, y, z, \ldots$. Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen merkitsee sitä, että löydetään $n$ kappaletta lukuja, jotka tuntemattomien $x_1, \ldots, x_n$ paikalle sijoitettuina toteuttavat yhtä aikaa kaikki $m$ yhtälöä.

**Esimerkki 8.2.** Lineaarisia yhtälöryhmiä:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcr} 2x - y + z & = & -2 \\ -3x + 2y - z & = & 0 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & & +4x_3 & = & 1 \\ -3x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & = & 12 \end{array}\right. .$$

Ensimmäisen yhtälöryhmän ratkaisu on $x = 3/2$, $y = -1/2$. Toisella yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua, kuten myöhemmin nähdään.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemisessa pyritään löytämään luvut, jotka tuntemattomien paikalle sijoitettuina toteuttavat *kaikki* ryhmän yhtälöt. On helppo nähdä, että tämä ei aina onnistu, eli yhtälöryhmällä ei aina ole ratkaisua. Esimerkiksi yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ x + y &= 0 \end{cases}$$

sisältää kaksi keskenään ristiriitaista yhtälöä, eivätkä mitkään luvut $x$ ja $y$ voi toteuttaa molempia yhtälöitä yhtä aikaa. Toisaalta joskus ratkaisuja löytyy äärettömästi, kuten seuraavan yhtälöryhmän tapauksessa:

$$\begin{cases} x - y &= 0 \\ 2x - 2y &= 0 \end{cases}.$$

Tämän yhtälöryhmän molemmat yhtälöt sisältävät saman tiedon luvuista $x$ ja $y$, nimittäin sen että $x = y$. Mikä tahansa luku sijoitettuna sekä $x$:n että $y$:n paikalle toteuttaa molemmat yhtälöt.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseksi on olemassa monta menetelmää. Pienillä yhtälöryhmillä (2-3 yhtälöä) voidaan käyttää sijoitusmenetelmää, jossa yhdestä yhtälöstä ratkaistaan aina yksi tuntematon, joka sitten sijoitetaan muihin yhtälöihin. Yhtälöjen lukumäärän kasvaessa tämä menetelmä käy kuitenkin epäkäytännölliseksi.

Tällä kurssilla käytetään yhtälöryhmien ratkaisemiseen ns. *Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmää.* Siinä muokataan yhtälöryhmää yksinkertaisemmaksi sellaisilla tavoilla, jotka eivät muuta yhtälöryhmän ratkaisuja. Yhtälöt käydään läpi ylhäältä alkaen, ja jokaisen yhtälön kohdalla toistetaan kaksi päävaihetta. Nämä ovat:

1) Jaetaan yhtälö puolittain, jotta yhtälön vasemmanpuolimmaisen tuntemattoman kertoimeksi saadaan 1.

2) Eliminoidaan tämän kertoimen avulla vastaavat tuntemattomat kaikista muista yhtälöistä.

Jälkimmäinen vaihe, eliminointi, tapahtuu seuraavasti. Oletetaan, että ollaan käsittelemässä 1. yhtälöä ja halutaan eliminoida ensimmäinen tuntematon 2. yhtälöstä. Kerrotaan 1. yhtälö puolittain 2. yhtälön ensimmäisen tuntemattoman kertoimen vastaluvulla. Lisätään sitten ensimmäinen yhtälö toiseen, jolloin tuo tuntematon häviää. Tarkastellaan ensin yksinkertaista esimerkkiä.

**Esimerkki 8.3.** Olkoon ratkaistavana seuraava yhtälöpari:

$$\begin{cases} 2x + 4y &= 2 \\ 3x + 5y &= -1 \end{cases}.$$

Aloitetaan käsittely ensimmäisestä yhtälöstä. Jaetaan yhtälö puolittain luvulla 2, jolloin ensimmäiseksi kertoimeksi tulee 1:

$$\begin{cases} x + 2y &= 1 \\ 3x + 5y &= -1 \end{cases}.$$

Toisen yhtälön ensimmäisen tuntemattoman kerroin on 3. Jotta tämä saataisiin häviämään, kerrotaan ensimmäinen yhtälö puolittain luvulla $-3$, ja lisätään näin saatu yhtälö toiseen. Ensimmäinen yhtälö $-3$:llä kerrottuna on

$$-3x - 6y = -3.$$

Lisätään tämä nyt puolittain toiseen yhtälöön:

$$\begin{array}{rcll} -3x - 6y & = & -3 & \mid (-3)\times(1.\text{ yhtälö}) \\ 3x + 5y & = & -1 & \mid 2.\text{ yhtälö} \\ \hline 0 - y & = & -4 & \end{array}$$

Saatu yhtälö kirjoitetaan toisen yhtälön paikalle, jolloin yhtälöryhmästä tulee

$$\begin{cases} x & +2y & = & 1 \\ & -y & = & -4 \end{cases}.$$

Toisesta yhtälöstä hävisi näin $x$. Huomaa, että ensimmäinen yhtälö kirjoitettiin edelleen samassa muodossa kuin aiemmin. Sitä vain käytettiin hyväksi $x$:n kertoimen nollaamisessa toisesta yhtälöstä.

Tästä muodosta voi jo lukea yhtälöryhmän ratkaisun, sillä selvästikin $y = 4$, ja $x$:n voi ratkaista, kun $y$ tunnetaan. Jatketaan kuitenkin menetelmää vielä täydellisyyden (ja harjoituksen) vuoksi loppuun asti. Toisen yhtälön ensimmäinen nollasta poikkeava kerroin $y$:n kerroin ja se on $-1$. Jaetaan toinen yhtälö luvulla $-1$, jolloin yhtälöryhmästä tulee

$$\begin{cases} x & +2y & = & 1 \\ & y & = & 4 \end{cases}.$$

Käytetään sitten jälkimmäistä yhtälöä $y$:n hävittämiseen ensimmäisestä. Ensimmäisessä yhtälössä $y$:n kerroin on 2. Kerrotaan jälkimmäinen yhtälö siis puolittain $-2$:lla ja lisätään ensimmäiseen:

$$\begin{array}{rrcll} & -2y & = & -8 & \mid (-2)\times(2.\text{ yhtälö}) \\ x & +2y & = & 1 & \mid 1.\text{ yhtälö} \\ \hline x & & = & -7 & \end{array}.$$

Tulos sijoitetaan ensimmäisen yhtälön paikalle:

$$\begin{cases} x & & = & -7 \\ & y & = & 4 \end{cases}.$$

Nyt yhtälöryhmä on täysin ratkaistussa muodossa, josta voidaan suoraan lukea tuntemattomien arvot. Tarkistetaan vielä tämä vastaus sijoittamalla saadut arvot alkuperäisiin yhtälöihin:

$$\begin{cases} 2\cdot(-7) + 4\cdot 4 & = & -14 + 16 & = & 2 \\ 3\cdot(-7) + 5\cdot 4 & = & -21 + 20 & = & -1 \end{cases}.$$

Tulos on oikea.

Käytetyssä menetelmässä ei lainkaan koskettu tuntemattomiin $x$ ja $y$. Niitä ei esimerkiksi siirrelty yhtälön puolelta toiselle, vaan kaikki hoidettiin vain manipuloimalla niiden kertoimia. Tämä antaa aiheen muotoilla yhtälöryhmä niin, että vain tuntemattomien kertoimet ovat näkyvissä, mikä helpottaa varsinkin isojen yhtälöryhmien käsittelyä huomattavasti. Tällaiseen muotoiluun soveltuvat erityisesti niin kutsutut matriisit.

**Määritelmä 8.4.** Lukukaaviota, jossa on $m$ riviä ja $n$ saraketta, kutsutaan *matriisiksi, jonka tyyppi on* $m \times n$, eli lyhyemmin $m \times n$*-matriisiksi.* Matriiseja merkitään yleensä isoilla kirjaimilla. Esimerkiksi

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

on $m \times n$-matriisi, jonka *alkioina* ovat luvut $a_{11}, \dots, a_{mn}$. Matriisin alkioihin voidaan viitata merkitsemällä $M_{ij}$, missä $i$ on rivin numero ja $j$ sarakkeen numero. Esimerkiksi $M_{21}$ on matriisin $M$ toisen rivin ensimmäisen sarakkeen alkio, eli tässä tapauksessa $M_{21} = a_{21}$.

**Esimerkki 8.5.** Esimerkkejä matriiseista:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 13 & \pi \\ 0 & -5 & \sqrt{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Näiden matriisien tyypit ovat vasemmalta oikealle lukien $2 \times 2$, $3 \times 3$, $3 \times 1$ ja $2 \times 3$.

Ratkaistavan yhtälöryhmän kertoimet voidaan sijoittaa matriisiin, jonka jälkeen eliminointi sujuu aivan samalla tavoin kuin aiemminkin; tuntemattomia vain ei tarvitse koko ajan kirjoittaa näkyviin.

**Esimerkki 8.6.** Ratkaistaan seuraava kolmen yhtälön yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = & 12 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 14 \end{cases}.$$

Sijoitetaan kertoimet ja oikealla puolella olevat vakiot $3 \times 4$-matriisiin. Halutessamme voimme selvyyden vuoksi merkitä pystyviivan matriisiin siihen kohtaan, missä yhtälöryhmässä on $=$-merkki. Syntyvä matriisi näyttää tältä:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 12 \\ 3 & 1 & -1 & | & -2 \\ 2 & -3 & 2 & | & 14 \end{bmatrix}.$$

Aloitetaan nyt eliminointi. Ensimmäiseksi tarkastellaan matriisin ensimmäistä riviä (joka siis vastaa yhtälöryhmän ensimmäistä yhtälöä). Jaetaan rivi 2:lla, jolloin saadaan ensimmäiseksi kertoimeksi 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 12 \\ 3 & 1 & -1 & | & -2 \\ 2 & -3 & 2 & | & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} :2 \\ \phantom{x} \\ \phantom{x} \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 3 & 1 & -1 & | & -2 \\ 2 & -3 & 2 & | & 14 \end{bmatrix}.$$

Käytetään sitten ensimmäisen rivin ensimmäisen sarakkeen kerrointa eliminoimaan kertoimet samasta sarakkeesta kaikilta muilta riveiltä. Toisella rivillä ensimmäisessä sarakkeessa on 3 ja kolmannella 2. Lisätään siis ensimmäinen rivi toiseen $-3$:lla kerrottuna ja kolmanteen $-2$:lla kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 3 & 1 & -1 & | & -2 \\ 2 & -3 & 2 & | & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) & | \cdot (-2) \\ \leftarrow & | \\ & | \leftarrow \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & -5 & -10 & | & -20 \\ 0 & -7 & -4 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Nyt on eliminoitu ensimmäinen kerroin toiselta ja kolmannelta riviltä (eli tuntematon $x_1$ on hävinnyt toisesta ja kolmannesta yhtälöstä). Siirrytään tarkastelemaan toista riviä. Toisen rivin ensimmäinen nollasta poikkeava kerroin on $-5$. Jaetaan rivi tällä luvulla:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & -5 & -10 & | & -20 \\ 0 & -7 & -4 & | & 2 \end{bmatrix} : (-5) \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & -7 & -4 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Toisen sarakkeen kerroin on ensimmäisellä rivillä 2 ja kolmannella $-7$. Lisätään siis toinen rivi ensimmäiseen $-2$:lla kerrottuna ja kolmanteen 7:llä kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & -7 & -4 & | & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{ll} \leftarrow & \\ \cdot(-2) & | \cdot 7 \\ & | \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 10 & | & 30 \end{bmatrix}.$$

Jaetaan vielä viimeinen rivi luvulla 10:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 10 & | & 30 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ : 10 \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix},$$

ja lisätään se ensimmäiseen 1:llä kerrottuna sekä toiseen $-2$:lla kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{ll} \leftarrow & \\ & | \leftarrow \\ \cdot 1 & | \cdot (-2) \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}.$$

Nyt on eliminointi suoritettu loppuun. Tuloksena saatiin matriisi, jossa pystyviivan vasemmalla puolella (eli yhtälöryhmän tuntemattomien puolella) on lävistäjällä ykkösiä, muualla nollia. Tämä matriisi vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & = & -2 \\ & & x_3 & = & 3 \end{cases}.$$

Näin on yhtälöryhmä täydellisesti ratkaistu.

Toisinaan jotain tuntematonta eliminoitaessa eliminoituu kaksi tuntematonta samalla kertaa. Tällöin voidaan vaihtaa yhtälöiden järjestystä, jotta eliminointia voidaan jatkaa.

**Esimerkki 8.7.** Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & +6x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 3 \end{cases}.$$

Kirjoitetaan yhtälöryhmä jälleen matriisimuodossa. Ensimmäisen rivin ensimmäinen kerroin on jo valmiiksi 1, joten voidaan ruveta eliminoimaan saman sarakkeen muita alkioita:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 2 & 6 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{ll} \leftarrow \cdot(-2) & | \cdot (-1) \\ \leftarrow & | \\ & | \leftarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & | & -14 \\ 0 & -4 & 0 & | & -4 \end{bmatrix}.$$

Koska toiselta riviltä hävisi myös toinen tuntematon, vaihdetaan toinen ja kolmas rivi keskenään, jolloin saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & -4 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -14 \end{bmatrix}.$$

Nyt voidaan jatkaa normaalisti. Jaetaan toinen rivi $-4$:llä:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & -4 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -14 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ :(-4) \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -14 \end{bmatrix}.$$

Eliminoidaan toisen sarakkeen kerroin ensimmäiseltä riviltä. (Kolmannelta riviltä se onkin jo hävinnyt.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -14 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot(-3) \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -14 \end{bmatrix}$$

Eliminoidaan lopuksi vielä kolmannen sarakkeen kerroin ensimmäisestä yhtälöstä:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -14 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \\ \cdot 1 \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -10 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -14 \end{bmatrix}$$

Tulos vastaa ratkaistua yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 & & & = & -10 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & -14 \end{cases}.$$

Kuten edellä mainittiin, lineaarisella yhtälöryhmällä ei aina ole ratkaisua, ja toisinaan taas ratkaisu ei ole yksikäsitteinen. Tällaisia yhtälöryhmiä nimitetään tällä kurssilla *huonosti ratkeaviksi.*

**Lause 8.8.** *Lineaarisella yhtälöryhmällä on aina joko yksi, ei yhtään tai ääretön määrä ratkaisuja. Jos yhtälöryhmällä ei ole lainkaan ratkaisua tai ratkaisuja on ääretön määrä, sanotaan, että yhtälöryhmä on* huonosti ratkeava.

**Esimerkki 8.9.** Ratkaistaan eliminoimalla matriisimuodossa esimerkin 8.2 yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x & -y & +z & = & -2 \\ -3x & +2y & -z & = & 0 \end{cases}.$$

Jaetaan aluksi ensimmäinen rivi 2:lla:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & | & -2 \\ -3 & 2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} :2 \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & | & -1 \\ -3 & 2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Lisätään sitten ensimmäinen rivi toiseen 3:lla kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & | & -1 \\ -3 & 2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & | & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & | & -3 \end{bmatrix}.$$

Jaetaan jälkimmäinen rivi 1/2:lla (mikä on sama kuin kertominen kahdella), jotta saadaan ensimmäiseksi nollasta poikkeavaksi kertoimeksi 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & | & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & | & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ :1/2 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -6 \end{bmatrix}.$$

Lopuksi lisätään toinen yhtälö ensimmäiseen 1/2:lla kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \cdot 1/2 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -4 \\ 0 & 1 & 1 & | & -6 \end{bmatrix}.$$

Eliminointi on nyt suoritettu loppuun. Tulosmatriisi vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x & & +z & = & -4 \\ & y & +z & = & -6 \end{cases}.$$

Viimeistä tuntematonta $z$ ei voitu eliminoida, koska se ei tullut mihinkään yhtälöön ensimmäiseksi. Tällaista tuntematonta kutsutaan *vapaaksi muuttujaksi*, sillä sen arvo voi olla mitä vain. Yhtälöryhmällä on siis ääretön määrä ratkaisuja, mutta nämä ratkaisut riippuvat vapaan muuttujan (joita voi olla myös useita) arvosta. Jos esimerkiksi valittaisiin $z = 1$, niin muut tuntemattomat voitaisiin tällä perusteella ratkaista, ja saataisiin $x = -5$ ja $y = -7$.

Edellisessä esimerkissä oli kaksi yhtälöä ja kolme tuntematonta. Jotta vapaita muuttujia ei tulisi, täytyy yhtälöitä olla vähintään yhtä paljon kuin tuntemattomia. Lisäksi mikä tahansa yhtälöryhmä voi olla ratkeamaton. Yhteenvetona saadaan seuraava lause.

**Lause 8.10.** *Jos lineaarisessa yhtälöryhmässä on $n$ tuntematonta ja $m$ yhtälöä, ja $n > m$ (eli enemmän tuntemattomia kuin yhtälöitä tai matriisimuodossa liian vähän rivejä), yhtälöryhmä on huonosti ratkeava.*

Yhtälöryhmä voi olla huonosti ratkeava, vaikka siinä ei olisikaan enempää tuntemattomia kuin rivejä.

**Esimerkki 8.11.** Tarkastellaan seuraavaa yhtälöryhmää:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = & -2 \end{cases}.$$

Ensimmäisen rivin ensimmäinen kerroin on valmiiksi 1. Lisätään ensimmäinen rivi toiseen $-2$:lla kerrottuna ja kolmanteen $-1$:llä kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & -2 & -2 & | & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & | \cdot (-1) \\ \leftarrow & | \\ & | \leftarrow \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & -1 & | & -4 \\ 0 & -3 & -3 & | & -5 \end{bmatrix}.$$

Jaetaan toinen rivi puolittain $-1$:llä:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & -1 & | & -4 \\ 0 & -3 & -3 & | & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ :(-1) \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & -3 & -3 & | & -5 \end{bmatrix}.$$

Lisätään sitten toinen rivi ensimmäiseen $-1$:llä kerrottuna ja kolmanteen 3:lla kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & -3 & -3 & | & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \\ \cdot(-1) & | \cdot 3 \\ & | \leftarrow \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 7 \end{bmatrix}.$$

Tulokseksi saatu matriisi vastaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 & & & = & -1 \\ & x_2 & +x_3 & = & 4 \\ & & 0 & = & 7 \end{cases}.$$

Viimeiseltä riviltä eliminoituivat siis kaikki tuntemattomat, mutta oikealle puolelle jäi luku 7. Tämä on ristiriitaista, sillä $0 \neq 7$. Yhtälöryhmällä ei siis ole ratkaisua. Huomaa, että vaikka ensimmäisellä rivillä lukeekin $x_1 = -1$, tämä ei ole edes osittainen ratkaisu, sillä yhtälöryhmää ratkaistaessa on kaikki yhtälöt ratkaistava yhtä aikaa. Jos johonkin kohtaan tulee ristiriita, se tarkoittaa, että koko yhtälöryhmä oli alun pitäen ristiriitainen.

Kerrataan vielä eliminointimenetelmän vaiheet. Jokaista riviä kohti ylhäältä alkaen suoritetaan seuraavat operaatiot:

1. Jos tarvitaan, vaihdetaan rivi jonkin alemman vielä käsittelemättömän rivin kanssa.

2. Jaetaan rivin alkiot jollain luvulla niin, että ensimmäisen nollasta poikkeavan kertoimen arvoksi tulee 1.

3. Eliminoidaan tämän kertoimen avulla vastaava kerroin saman sarakkeen kohdalta kaikilta muista riveiltä.

Kun nämä vaiheet on suoritettu kaikille riveille, tulos voi olla jokin seuraavista:

- Kaikki tuntemattomat jäävät yksin omalle rivilleen, ja yhtälöryhmä ratkeaa yksikäsitteisesti.

- Jokin tuntematon ei ole ensimmäisenä millään rivillä. Tämä on vapaa muuttuja, ja yhtälöryhmän ratkaisu riippuu sen arvosta. Ratkaisuja on ääretön määrä.

- Jostakin yhtälöstä häviävät kaikki tuntemattomat, mutta oikealle puolelle jää nollasta poikkeava luku. Tällöin yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

## 8.2 Matriisien laskutoimitukset

Paitsi että matriiseja voi käyttää näppärästi apuna yhtälöryhmän merkitsemisessä, niillä on myös kokonaan oma elämänsä. Matriiseja voidaan muun muassa laskea yhteen ja kertoa toisillaan, ja kullakin näistä operaatioista on oma merkityksensä myös sellaisten yhtälöryhmien kannalta, jota kyseiset matriisit kuvaavat. Toisaalta matriisien laskutoimituksilla on tiettyjä rajoituksia: mitä tahansa matriiseja ei esimerkiksi voi laskea yhteen.

**Määritelmä 8.12. Matriisien yhteen- ja vähennyslasku.** Olkoot $A$ ja $B$ $m \times n$-matriiseja. Yhteenlasketun matriisin $A + B$ alkiot saadaan laskemalla $A$:n ja $B$:n alkiot yhteen kohdakkain. Sama pätee vähennyslaskulle $A - B$. Siis

$$(A \pm B)_{ij} = A_{ij} \pm B_{ij}.$$

**Huom!** Vain matriiseja, joilla on sama tyyppi, voidaan laskea yhteen tai vähentää toisistaan.

**Esimerkki 8.13.** Kahden $3 \times 2$-matriisin yhteenlasku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+(-1) \\ 3+0 & 4+1 \\ 5+3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

**Määritelmä 8.14. Skalaarikertolasku.** Minkä tahansa matriisin $A$ voi kertoa reaaliluvulla $c$. Tätä toimitusta kutsutaan *skalaarikertolaskuksi* ja merkitään $cA$ (ilman kertomerkkiä). Tässä operaatiossa jokainen matriisin alkio yksinkertaisesti kerrotaan kyseisellä luvulla, eli

$$(cA)_{ij} = c \cdot A_{ij}.$$

**Esimerkki 8.15.** Erään $3 \times 2$-matriisin kertominen luvulla:

$$2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot(-1) \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriisin kertominen luvulla on helppo toimitus ja se voidaan aina suorittaa. Kahden matriisin välinen kertolasku on hieman monimutkaisempi ja myös rajoitetumpi operaatio.

**Määritelmä 8.16. Matriisikertolasku.** Kaksi matriisia voidaan kertoa toisillaan vain, jos *ensimmäisessä on yhtä paljon sarakkeita kuin toisessa on rivejä.* Olkoon siis $A$ $m \times n$-matriisi ja $B$ $n \times p$-matriisi. Tällöin matriisi $AB$ on määritelty. Sen alkio $(AB)_{ij}$ saadaan kertomalla $A$:n $i$:nnen rivin alkiot yksitellen $B$:n $j$:nnen sarakkeen alkioilla ja laskemalla saadut tulot yhteen. Siis

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj} \left( = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} \right).$$

Tuloksena on $m \times p$-matriisi.

**Esimerkki 8.17.** Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Koska $A$:ssa on kolme saraketta (tyyppi $2 \times \mathbf{3}$) ja $B$:ssä on vastaavasti kolme riviä (tyyppi $\mathbf{3} \times 2$), matriisit voidaan kertoa keskenään. Tulosmatriisi on tyyppiä $2 \times 2$.

Katsotaan aluksi, miten saadaan tulomatriisin ensimmäisen rivin ensimmäisen alkion arvo. Määritelmän mukaan on otettava matriisista $A$ ensimmäinen rivi ja matriisista $B$ ensimmäinen sarake, kerrottava näillä olevat alkiot keskenään, ja laskettava yhteen. Siis

$$\begin{aligned}(AB)_{11} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} \\ &= 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) + 0\cdot 0 = 4.\end{aligned}$$

Lasketaan tämän jälkeen ensimmäisen rivin toinen alkio kertomalla matriisin $A$ ensimmäisen rivin alkiot matriisin $B$ toisen sarakkeen alkioilla:

$$\begin{aligned}(AB)_{12} &= A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} \\ &= 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 5.\end{aligned}$$

Samaan tapaan lasketaan muutkin alkiot:

$$\begin{aligned}AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Tulos on $2 \times 2$-matriisi, niin kuin pitääkin.

Matriisia, jossa on yhtä monta riviä kuin saraketta, kutsutaan *neliömatriisiksi*. Neliömatriiseja voidaan kertoa toisillaan kummin päin tahansa, mutta tulos ei silti välttämättä ole sama.

**Esimerkki 8.18.** Olkoot $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ ja $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Tällöin

$$AB = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -8 & 5 \end{bmatrix},$$

mutta

$$BA = \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ -4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & -4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}.$$

Aina ei siis päde $AB = BA$. Kuitenkin seuraavat säännöt pätevät matriisien kertolaskulle silloin, kun se voidaan suorittaa:

1. $A(BC) = (AB)C$,
2. $A(B + C) = AB + AC$,
3. $(A + B)C = AC + BC$.

## 8.3 Käänteismatriisi

Olkoon $A$ $n \times n$-neliömatriisi, alkioinaan $a_{11}, \dots, a_{nn}$, ja olkoot $X$ ja $B$ $n \times 1$-matriiseja (vain yksi sarake), alkiot vastaavasti $x_1, \dots, x_n$ ja $b_1, \dots, b_n$. Tarkastellaan *matriisiyhtälöä*

$$AX = B.$$

Yhtälön vasemmalla puolella oleva kertolasku antaa tulokseksi

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}.$$

Tämä on $n \times 1$-matriisi, samoin kuin alkuperäisen yhtälön oikealla puolella oleva matriisi $B$. Yhtälö pätee, jos ja vain jos vasemmanpuoleisen matriisin alkiot ovat samat kuin oikeanpuoleisen, eli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \qquad\vdots & \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}.$$

Nähdään, että matriisiyhtälö $AX = B$ vastaa erästä lineaarista yhtälöryhmää.

**Lause 8.19.** *Lineaarista yhtälöryhmää, jossa on $n$ yhtälöä ja $n$ tuntematonta, vastaa matriisiyhtälö $AX = B$, missä $A$ on $n \times n$-matriisi, joka sisältää yhtälöryhmän kertoimet, $X$ on $n \times 1$-matriisi, joka sisältää tuntemattomat, ja $B$ on $n \times 1$-matriisi, joka sisältää yhtälöiden oikealla puolella olevat vakioarvot.*

Vaikka mikä tahansa yhtälöryhmä voidaankin kirjoittaa vastaavana matriisiyhtälönä, tässä yhteydessä tarkastellaan kuitenkin vain sellaisia yhtälöryhmiä, joissa on yhtä monta yhtälöä kuin tuntematonta. Yhtälöryhmä voidaan nimittäin aina muuttaa tällaiseen muotoon niin, että ratkaisut pysyvät edelleen samoina. Yhtälöihin voidaan aina lisätä tuntemattomia, jos niiden kertoimeksi vain asetetaan nolla, ja toisaalta sama yhtälö voidaan toistaa ryhmässä useamman kerran, jolloin yhtälöiden määrä kasvaa, vaikka ratkaisut eivät muutu.

Matriisiyhtälössä on kaikkien yhtälöiden kertoimet ikään kuin korvattu yhdellä "superkertoimella" $A$. Vastaavasti muuttujat on korvattu "supermuuttujalla" $X$ ja oikean puolen vakiot "supervakiolla" $B$. Matriisimuodon käyttämisestä olisi todellista hyötyä, jos tämä "superyhtälö" voitaisiin ratkaista kerralla ikään kuin tavallinen yhtälö. Tähän pyrittäessä otetaan ensin mallia tavallisen yhtälön ratkaisemisesta.

Ensimmäisen asteen yhtälö on muotoa $ax = b$. Jos $a \neq 0$, voidaan yhtälö ratkaista jakamalla sen molemmat puolet $a$:lla, eli kertomalla molemmat puolet $a$:n käänteisluvulla $1/a = a^{-1}$:

$$\begin{aligned} ax &= b \qquad \| \ a^{-1}\cdot \\ a^{-1}(ax) &= a^{-1}b \\ (a^{-1}a)x &= a^{-1}b \\ 1 \cdot x &= a^{-1}b \\ x &= a^{-1}b. \end{aligned}$$

Näin löydetään yhtälön ratkaisu $x = a^{-1}b = b/a$. Ratkaiseminen perustui tiettyihin lukujen ominaisuuksiin. Ensinnäkin kaikilla luvuilla pätee $a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)x$. Toisaalta käänteisluvulla pätee $a^{-1}a = 1$ ja lopulta ykkösellä kertominen antaa $1 \cdot x = x$. Ensimmäinen ominaisuus pätee matriiseillakin, sillä $A(BC) = (AB)C$, jos kertolasku vain voidaan suorittaa. Jos matriiseilta löydettäisiin muutkin kuvaillut ominaisuudet, voitaisiin matriisiyhtälö ratkaista samalla tavalla kuin lukuyhtälökin. Näistä ominaisuuksista viimeksi mainittu, eli $1 \cdot x = x$, voidaankin itse asiassa muotoilla helposti myös matriisella.

**Määritelmä 8.20.** Neliömatriisia, joka sisältää vasemmalta ylhäältä oikealle alas kulkevalla lävistäjällään pelkkiä ykkösiä ja muuten pelkkiä nollia, kutsutaan *ykkösmatriisiksi* ja merkitään

$$\mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

missä $n$ on rivien (ja sarakkeiden) lukumäärä. Jokaista rivimäärää $n$ vastaa oma ykkösmatriisi $\mathrm{I}_n$. Ykkösmatriisille pätee

$$\mathrm{I}_n X = X,$$

olipa $X$ mikä tahansa $n \times p$-matriisi. (Siinä täytyy siis olla $n$ riviä, jotta kertolasku olisi mahdollinen.)

Ykkösmatriisilla kertominen vastaa siis ykkösellä kertomista: se ei muuta kerrottavaa matriisia mitenkään. Täytyisi vielä löytää käänteislukua vastaava matriisi. Luvun $a$ käänteisluvulla $a^{-1}$ on se tärkeä ominaisuus, että $a^{-1} \cdot a = 1$. Tarvittaisiin siis sellainen matriisia $A$ vastaava matriisi $A^{-1}$, että $A^{-1}A = \mathrm{I}_n$. Kaikilla luvuilla ei kuitenkaan ole käänteislukua (nimittäin nollalla), eikä kaikilla matriiseillakaan ole käänteismatriisia.

**Määritelmä 8.21.** Olkoon $A$ $n \times n$-neliömatriisi. Jos on olemassa jokin matriisi $B$, jolle pätee $BA = \mathrm{I}_n$, niin sanotaan, että $A$ on *säännöllinen* eli *kääntyvä*, ja $B$ on $A$:n *käänteismatriisi*. Käänteismatriisi on yksikäsitteinen, ja sitä merkitään $B = A^{-1}$. Lisäksi, jos $A$ on säännöllinen, niin myös $A^{-1}$ on säännöllinen ja sen käänteismatriisi on $A$ (eli $(A^{-1})^{-1} = A$ ja $AA^{-1} = \mathrm{I}_n$).

**Esimerkki 8.22.** Olkoot $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ ja $B = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Tällöin

$$BA = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + (-5) \cdot 1 & 3 \cdot 5 + (-5) \cdot 3 \\ -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}_2.$$

Siispä $B$ on $A$:n käänteismatriisi eli $B = A^{-1}$.

Jos neliömatriisille $A$ sovelletaan eliminointimenetelmää, voi tuloksena olla ykkösmatriisi, kuten esimerkissä 8.6. Jos eliminoinnissa käytetyt operaatiot suoritetaan samassa järjestyksessä ykkösmatriisille, tuloksena onkin $A$:n käänteismatriisi.

**Lause 8.23 (Käänteismatriisin olemassaolo ja löytäminen).** *Olkoon $A$ $n \times n$-matriisi. Sovelletaan matriisiin $A$ eliminointimenetelmää, jolloin saadaan jokin matriisi $B$. Jos $B$ on ykkösmatriisi, niin $A$ on säännöllinen, ja $A$:n käänteismatriisi löydetään suorittamalla eliminoinnissa läpikäydyt operaatiot uudestaan ykkösmatriisille. Jos taas $B \neq \mathrm{I}_n$, niin $A$ ei ole säännöllinen.*

Käytännössä kannattaa suorittaa eliminointi samanaikaisesti sekä matriisille $A$ että ykkösmatriisille kokoamalla nämä vierekkäin samaan matriisiin $[A|I_n]$.

**Esimerkki 8.24.** Tarkastellaan esimerkin 8.22 matriisia $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$. Sovelletaan eliminointimenetelmää yhdistettyyn matriisiin $[A|\mathrm{I}_2]$:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 2 & 5 & | & 1 & 0 \\ 1 & 3 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} :2 \\ \phantom{x} \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 5/2 & | & 1/2 & 0 \\ 1 & 3 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \leftarrow \end{matrix} \\
\rightsquigarrow &\begin{bmatrix} 1 & 5/2 & | & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & | & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \phantom{x} \\ :1/2 \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 5/2 & | & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & | & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \cdot(-5/2) \end{matrix} \\
\rightsquigarrow &\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3 & -5 \\ 0 & 1 & | & -1 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Vasemmalle puolelle muodostui ykkösmatriisi, joten oikealle puolelle muodoustui vastaavasti $A$:n käänteismatriisi $A^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Tämä vastaa aikaisempaa tulosta.

**Esimerkki 8.25.** Tarkastellaan vielä matriisia $S = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{smallmatrix}\right]$. Eliminoimalla yhdistettyä matriisia $[S|\mathrm{I}_2]$ saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ -3 & 6 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vasemmanpuoleisen matriisin toiselta riviltä hävisivät kaikki alkiot, joten eliminointia ei voida jatkaa. Matriisia $S$ ei saatu eliminoimalla ykkösmatriisiksi, joten sillä ei ole käänteismatriisia.

Palataan nyt jälleen matriisiyhtälöön $AX = B$. Jos $A$:lla on käänteismatriisi, voimme ratkaista tämän yhtälön aivan kuten tavallisen ensimmäisen asteen yhtälön kertomalla molemmat puolet *vasemmalta* $A$:n käänteismatriisilla. (Oikealta kertominen ei tuota samaa tulosta, koska matriisien kertolaskulle ei välttämättä päde $AB = BA$.) Tämä käy seuraavasti:

$$\begin{aligned}
AX &= B \qquad \| \ A^{-1}\cdot \\
A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\
(A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\
\mathrm{I}_n X &= A^{-1}B \\
X &= A^{-1}B.
\end{aligned}$$

Koska tämä matriisiyhtälö vastasi tiettyä yhtälöryhmää, voidaan kyseinen yhtälöryhmä siis ratkaista käänteismatriisin avulla. Koska käänteismatriisin olemassaolo riippuu vain kerroinmatriisista $A$, riippuu myös *ratkaisun onnistuminen* vain matriisista $A$, ei siis tuntemattomista eikä vakiot sisältävästä matriisista $B$.

**Lause 8.26.** *Olkoon ratkaistavana yhtälöryhmä $AX = B$. Jos kerroinmatriisi $A$ on säännöllinen, yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu $X = A^{-1}B$. Jos $A$ ei ole säännöllinen, yhtälöryhmä on huonosti ratkeava.*

Käänteismatriisi soveltuu käytettäväksi erityisesti silloin, kun ratkaistavana on monta yhtälöryhmää, joissa on samat kertoimet. Tällöin näet ratkaisemisessa tarvittava eliminointi tarvitsee suorittaa vain kerran käänteismatriisin löytämiseksi.

**Esimerkki 8.27.** Ratkaistaan sellaisen paraabelin yhtälö, joka kulkee pisteiden $(-1,6)$, $(1,2)$ ja $(2,3)$ kautta. Paraabelin yleinen yhtälö on $y = ax^2 + bx + c$. Kun ensimmäisen pisteen koordinaatit sijoitetaan tähän yhtälöön, saadaan yhtälö

$$1 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \iff a - b + c = 0.$$

Sijoitetaan yhtälöön sitten vastaavasti muidenkin annettujen pisteiden koordinaatit, jotta saadaan seuraava yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} a - b + c &= 6 \\ a + b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= 3 \end{cases}.$$

Tätä yhtälöryhmää vastaa matriisiyhtälö $AX = B$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan matriisiyhtälö käänteismatriisin avulla. Sen löytämiseksi eliminoidaan yhdistettyä matriisia $[A|I_3]$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{ll} \cdot(-1) & | \cdot (-4) \\ \leftarrow & | \\ & | \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & | & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ :2 \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & | & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{ll} \leftarrow & \\ \cdot 1 & | \cdot (-6) \\ & | \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ :(-3) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/3 & 1 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/3 & 1 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

Matriisi $A$ on näemmä säännöllinen, ja sen käänteismatriisi on

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on täten

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \begin{bmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \cdot 6 - 1/2 \cdot 2 + 1/3 \cdot 3 \\ -1/2 \cdot 6 + 1/2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ 1/3 \cdot 6 + 1 \cdot 2 - 1/3 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 1 + 1 \\ -3 + 1 + 0 \\ 2 + 2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Siispä $a = 1$, $b = -2$ ja $c = 3$, joten paraabelin yhtälö on $y = x^2 - 2x + 3$.

Jos nyt haluttaisiin selvittää sellaisen paraabelin yhtälö, joka kulkeekin pisteiden $(-1,-3)$, $(1,1)$ ja $(2,0)$ kautta, olisi ratkaistavana yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a-b+c &= -3 \\ a+b+c &= 1 \\ 4a+2b+c &= 0 \end{cases}.$$

Tässä on samat kertoimet kuin edellä (koska pisteiden x-koordinaatit olivat samat), joten kerroinmatriisi $A$ on sama kuin edellä, ja ratkaisu saadaan jälleen samaa käänteismatriisia käyttämällä. Tällä kertaa $B$ sisältää y-koordinaattien arvot $-3$, 1 ja 0:

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \begin{bmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6\cdot(-3) - 1/2\cdot 1 + 1/3\cdot 0 \\ -1/2\cdot(-3) + 1/2\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 1/3\cdot(-3) + 1\cdot 1 - 1/3\cdot 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1/2 - 1/2 + 0 \\ 3/2 + 1/2 + 0 \\ -1 + 1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uuden paraabelin yhtälö on siis $y = -x^2 + 2x$.

Jos yhtälöryhmä on huonosti ratkeava, käänteismatriisisista ei ole hyötyä. Sen avulla ei esimerkiksi voida sanoa, onko yhtälöryhmä ristiriitainen vai onko ratkaisuja mahdollisesti äärettömän monta.

## 8.4 Stokastiset prosessit

Stokastisella prosessilla tarkoitetaan prosessia, jossa systeemin tila kullakin ajanhetkellä ei ole täysin riippuvainen menneisyyden tiloista (kuten esimerkiksi aiemmin käsittellyissä eksponentiaalisen tai logistisen kasvun malleissa), vaan mukana on tiettyä satunnaisuutta. Vaikka systeemin alkutila siis tunnettaisiin, ei voida tarkasti ennustaa, mihin tilaan systeemi tulevaisuudessa siirtyy, vaan eri vaihtoehtoja on monia. Kun tunnetaan todennäköisyydet, joilla tiloista toisiin siirtyminen tapahtuu, voidaan kuitenkin päätellä tilastollisesti, kuinka suuri osa havaintoaineistosta esimerkiksi päätyy mihinkin tilaan tietyn ajan kuluessa.

Jos erilaisia mahdollisia tiloja on äärellinen määrä, niiden suhteellisia todennäköisyyksiä kullakin ajanhetkellä $t$ voidaan merkitä tuntemattomilla $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. Jos prosessi on lisäksi *diskreettiaikainen* eli tilasta toiseen siirrytään vain tietyin kiintein aikavälein, niin ajanhetkiä voidaan merkitä luonnollisilla luvuilla 0,1,2,3 jne. Tällöin esimerkiksi viidennen tilan todennäköisyyttä ajanhetkellä 13 merkittäisiin $x_5(13)$. Kullakin ajanhetkellä kaikkien todennäköisyyksien summan on oltava yksi, eli

$$x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_n(t) = 1.$$

Tilasta toiseen siirtymisen todennäköisyyttä kuvaavat luvut $a_{ji}(t)$, missä $i$ on lähtötilan indeksi, $j$ tulostilan indeksi ja $t$ ajanhetki. Luku $a_{ji}(t)$ on siis todennäköisyys, jolla tilaan $j$ siirrytään tilasta $i$ ajanhetkellä $t$. Jos siirtymisen todennäköisyys ei riipu ajanhetkestä vaan ainoastaan alkutilasta (eli prosessi on niin sanotusti *stationaarinen*), niin todennäköisyyksiä voidaan merkitä yksinkertaisesti $a_{ji}$. Jatkossa tarkastellaan vain tällaisia prosesseja.

Kullakin ajanhetkellä $t$ voidaan tulostilaan $j$ siis siirtyä kustakin lähtötilasta $i$ todennäköisyydellä $a_{ji}$. Kun $x_i(t)$ on tilan $i$ todennäköisyys hetkellä $t$, niin $a_{ji}x_i(t)$ on tulosäännön mukaan se todennäköisyys, jolla hetkellä $t$ oltiin tilassa $i$ ja sitten siirryttiin tilaan $j$. Tulostilan kokonaistodennäköisyys seuraavalla ajanhetkellä määräytyy kaikkien mahdollisten lähtötilojen todennäköisyyksistä edellisellä ajanhetkellä seuraavan yhtälön mukaisesti:

$$x_j(t+1) = a_{j1}x_1(t) + a_{j2}x_2(t) + \cdots + a_{jn}x_n(t).$$

Koska jokaisesta lähtötilasta $i$ joko siirrytään johonkin toiseen tai pysytään paikallaan, pätee siirtymätodennäköisyyksille lisäksi aina yhtälö

$$a_{1i} + a_{2i} + a_{3i} + \cdots + a_{ni} = 1.$$

Siirtymistä kuvaavia yhtälöitä saadaan jokaista tulostilaa kohti omansa, ja näistä voidaan muodostaa yhtälöryhmä

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) & = & x_1(t+1) \\ a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) & = & x_2(t+1) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) & = & x_n(t+1) \end{array}\right. .$$

Kuten tiedetään, tällainen yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa matriisiyhtälönä

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ \vdots \\ x_n(t+1) \end{bmatrix}.$$

Kerroinmatriisia

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kutsutaan *siirtymätodennäköisyysmatriisiksi*. Yhtälön (8.4) nojalla tämän matriisin kunkin sarakkeen todennäköisyyksien summan on oltava 1.

Siirtymätodennäköisyysmatriisin merkitys on siinä, että jos sillä kerrotaan sarakematriisia $X(t)$, joka sisältää kaikkien tilojen todennäköisyydet ajanhetkellä $t$, saadaan tuloksena kaikkien tilojen todennäköisyydet ajanhetkellä $t+1$. Näin voidaan laskea mistä tahansa lähtötilasta $X(0)$ alkaen tilanteen kehittyminen kuinka pitkälle hyvänsä, esim. $AX(0) = X(1)$, $AX(1) = A^2X(0) = X(2)$, jne.

Itse asiassa on usein tulkinnanvaraista, onko jokin monitilaprosessi stokastinen vai ei. Esimerkiksi radioaktiivista hajoamista voidaan ajatella prosessina, jossa tietty määrä ainetta hajoaa aina tietyn ajan kuluessa (deterministinen tulkinta). Toisaalta kullakin atomiytimellä on tietty todennäköisyys hajota (eli siirtyä alkutilasta hajonneeseen tilaan), joten hajoamisprosessia voidaan ajatella myös stokastisena prosessina. Kun tarkastellaan suuria määriä ainetta, molemmat tulkinnat johtavat samoihin laskuihin. Toisinaan on kuitenkin hyvä pitää mielessä, kummalta kannalta asiaa on alunperin lähdetty tarkastelemaan.

**Esimerkki 8.28.** Tarkastellaan metsän pintakasvillisuuden sukkessiota eli sitä, miten erilaiset lajit vähitellen korvaavat toisensa metsän kehittyessä. Pintakasvillisuuden lajit voidaan jakaa pioneereihin, välilajeihin sekä kliimaks-lajeihin. Lisäksi osa metsäalueesta voi olla tyhjää. Kuvataan nyt tilannetta stokastisena prosessina, jossa eri tilat vastaavat eri lajityyppejä. Näitä tiloja on neljä, kun tyhjä tila lasketaan mukaan: 1 = tyhjä tila, 2 = pioneerilaji, 3 = välilaji, 4 = kliimaks-laji. Tilan $i$ todennäköisyys $x_i(t)$ kuvaa nyt sitä tilastollista osuutta havainnoitavan alueen pinta-alasta, jonka kasvillisuus on ajanhetkellä $t$ kyseisessä tilassa. Käytetään ajanyksikkönä vuotta ja tarkastellaan tilannetta aina joka vuoden alussa, jolloin $t$ saa vain kokonaislukuarvoja 0,1,2,3 jne.

Sukkessio on yleensä etenevää, eli kustakin tilasta voidaan siirtyä vain korkeampaan tilaan. Kuitenkin jokin häiriö voi palauttaa osan metsästä aikaisempaan tilaan. Kuten tilojen todennäköisyydet, myös siirtymätodennäköisyydet $a_{ji}$ on ymmärrettävä tilastollisesti, eli ne kuvaavat sitä suhteellista osuutta metsästä, jonka lajisto kunakin vuonna siirtyy tilasta $i$ tilaan $j$. Tarkastellaan seuraavassa esimerkkiä, jossa etenevän sukkession siirtymätodennäköisyydet ovat

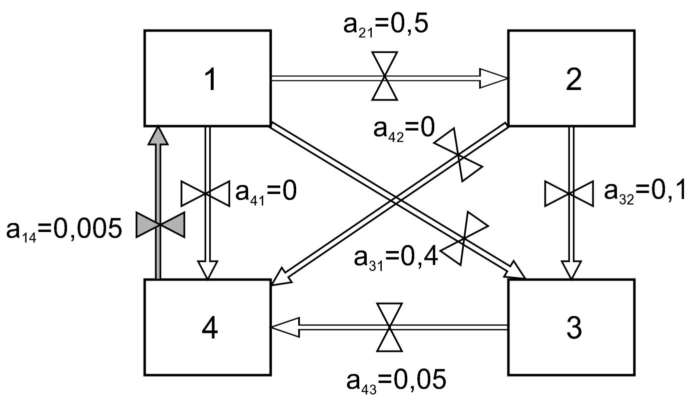
$$
\begin{aligned}
a_{21} &= 0{,}5, & a_{31} &= 0{,}4, & a_{32} &= 0{,}1, \\
a_{41} &= 0, & a_{42} &= 0, & a_{43} &= 0{,}05.
\end{aligned}
$$

Lisäksi asetetaan pieni todennäköisyys, jolla kliimaks-lajeja tuhoutuu jonkin häiriön (esimerkiksi metsäpalon tai hakkuun vuoksi) ja metsää palautuu tyhjään tilaan:

$$a_{14} = 0{,}005.$$

Kaikki muut takautuvat siirtymät oletetaan mahdottomiksi. Häiriösiirtymä voi olla eri luonteinen kuin muut siirtymät, koska nuo muut tapahtuvat enemmän tai vähemmän jatkuvasti, mutta häiriö on yleensä lyhytaikainen ja kertaluonteinen. Voitaisiin jopa sanoa, että häiriösiirtymä on luonteeltaan "enemmän stokastinen". Pitkän aikavälin tarkastelussa tämä ero voidaan kuitenkin unohtaa.

Sukkessiota voidaan kuvata seuraavanlaisella virtauskaaviolla.




Kussakin tilassa $i$ pysymistä kuvaavat siirtymätodennäköisyydet lasketaan vähentämällä kokonaistodennäköisyydestä 1 kaikki todennäköisyydet, joilla tilasta $i$ siirrytään pois, esimerkiksi $a_{22} = 1 - a_{32} - a_{42} = 1 - 0{,}1 - 0 = 0{,}9$. Siirtymätodennäköisyysmatriisiksi saadaan näin

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}005 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}95 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}995 \end{bmatrix}.$$

Tarkastellaan alkutilaa, jossa metsä on jakautunut eri tiloihin seuraavasti: $x_1(0) = 0{,}5$, $x_2(0) = 0{,}4$, $x_3(0) = 0{,}1$ ja $x_4(0) = 0$. Näistä voidaan muodostaa tilamatriisi

$$X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}4 \\ 0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tilanne vuoden kuluttua saadaan kertomalla tämä tilamatriisi siirtymätodennäköisyysmatriisilla:

$$X(1) = AX(0) = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}005 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}95 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}995 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}4 \\ 0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}61 \\ 0{,}335 \\ 0{,}005 \end{bmatrix}.$$

Toisen vuoden kuluttua metsäosuudet olisivat vastaavasti

$$X(2) = AX(1) = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}005 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}95 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}995 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}61 \\ 0{,}335 \\ 0{,}005 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}005025 \\ 0{,}574 \\ 0{,}39925 \\ 0{,}021725 \end{bmatrix}.$$

Kuten nähdään, sukkessio on pääasiassa etenevää, eli korkeampien tilojen osuudet kasvavat. Toisaalta osa kliimaks-vaiheen metsästä putoaa myös takaisin tyhjään tilaan. On kuitenkin muistettava, että näissä laskuissa on koko ajan kyse todennäköisyyksistä, eikä esimerkiksi voida olettaa, että joka vuosi metsäosuudet kehittyisivät täsmälleen samalla tavalla. Tilastollisesti kehitys pitää paikkansa sitä tarkemmin, mitä suurempaa metsäaluetta havainnoidaan ja mitä pidemmällä aikavälillä tilannetta seurataan.

Siirtymätodennäköisyysmatriisin avulla voidaan myös tutkia systeemin *tasapainotiloja.* Nämä ovat sellaisia tiloja, joissa systeemi ei enää kokonaisuudessaan muutu eli jokaisen tilan todennäköisyys pysyy vakiona ajanhetkestä toiseen. Jos merkitään tilojen todennäköisyydet sisältävää matriisia $X(t)$, niin tällainen tila toteuttaa *tasapainoyhtälön* $X(t+1) = X(t)$, joka on siirtymätodennäköisyysmatriisin avulla kirjoitettuna

$$AX(t) = X(t).$$

Kun kerrotaan tämän yhtälön oikea puoli ykkösmatriisilla (mikä ei tietenkään muuta oikean puolen matriisia mitenkään) ja siirretään tuloksena saatava matriisi vasemalle puolelle, päädytään yhtälöön $AX(t) - \mathrm{I}_n X(t) = 0_n$, missä $0_n$ on pelkkiä nollia sisältävä *nollamatriisi.* Nyt voidaan ottaa vasemmalla puolella matriisi $X(t)$ yhteiseksi tekijäksi, jolloin saadaan lopulta yhtälö

$$(A - \mathrm{I}_n)X(t) = 0_n.$$

Tämä yhtälö vastaa erästä yhtälöryhmää, jonka ratkaisut siis määrittävät tasapainotilan. Eräs ratkaisu on aina se, missä kaikki todennäköisyydet $x_i(t)$ ovat nollia, mutta tämä on hylättävä, sillä kullakin ajanhetkellä tilojen todennäköisyyksien summan on oltava 1. Jos muita ratkaisuja kuin nollaratkaisu ei löydy (eli yhtälöryhmä ei ole huonosti ratkeava), niin systeemillä ei ole tasapainotiloja.

**Esimerkki 8.29.** Ratkaistaan edellisen esimerkin sukkessiota kuvaavan systeemin tasapainotilat. Muodostetaan ensin ratkaistavan yhtälöryhmän kerroinmatriisi

$$A - \mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}005 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}95 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}995 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}005 \\ 0{,}5 & -0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & -0{,}05 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & -0{,}005 \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan sitten matriisiyhtälöä $(A - \mathrm{I}_n)X(t) = 0_n$ vastaava yhtälöryhmä eliminointimenetelmällä:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}005 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & -0{,}05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & -0{,}005 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} :(-0{,}9) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -0{,}005556 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & -0{,}05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & -0{,}005 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{ll} \cdot(-0{,}5) & |\cdot(-0{,}4) \\ \leftarrow & | \\ & |\leftarrow \\ & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -0{,}005556 & 0 \\ 0 & -0{,}1 & 0 & 0{,}002778 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & -0{,}05 & 0{,}002222 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & -0{,}005 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ :(-0{,}1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -0{,}005556 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}02778 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & -0{,}05 & 0{,}002222 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & -0{,}005 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(-0{,}1) \\ \leftarrow \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -0{,}005556 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}02778 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}05 & 0{,}005 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & -0{,}005 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ :(-0{,}05) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -0{,}005556 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}02778 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & -0{,}005 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-0{,}05) \\ \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -0{,}005556 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}02778 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Viimeiseltä riviltä katosivat kaikki muuttujat ennen kuin viimeisen sarakkeen kertoimia pystyttiin eliminoimaan. Viimeistä saraketta vastaa siis vapaa muuttuja $x_4(t)$. Muiden muuttujien arvot riippuvat vapaan muuttujan arvosta, ja kerroinmatriisin eliminoidusta muodosta nähdäänkin, että

$$X(t) = \begin{bmatrix} 0{,}005556 \cdot x_4(t) \\ 0{,}02778 \cdot x_4(t) \\ 0{,}1 \cdot x_4(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = x_4(t) \begin{bmatrix} 0{,}005556 \\ 0{,}02778 \\ 0{,}1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vapaan muuttujan arvo täytyy kuitenkin vielä valita niin, että eri tiloissa olevien metsäosuuksien summaksi tulee 1. Tämän vuoksi valitaan

$$x_4(t) = \frac{1}{0{,}005556 + 0{,}02778 + 0{,}1 + 1} \approx 0{,}88235,$$

jolloin tasapainotilaksi saadaan lopulta

$$X(t) = 0{,}88235 \begin{bmatrix} 0{,}005556 \\ 0{,}02778 \\ 0{,}1 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}0049 \\ 0{,}0245 \\ 0{,}0882 \\ 0{,}8824 \end{bmatrix}.$$

Tasapainotilassa siis pieni osa metsästä on tyhjässä tilassa, koska osa kliimaks-metsästä palautuu jatkuvasti tyhjään tilaan (tietyllä todennäköisyydellä). Samaten osa lajeista on pioneeri- ja välitiloissa, koska syntynyt tyhjässä tilassa oleva metsäosuus kehittyy puolestaan tietyllä nopeudella eteenpäin.

LOPPU