Yhdistettyjen funktioiden derivointi

Tehtävät:

1. Olkoon $f(x) = 3x^2$ ja $g(x) = 4 - 5x$. Määritä

$$\text{a)} \quad (f \circ g)(1), \qquad \text{b)} \quad (g \circ f)(1).$$

2. Muodosta funktiot $f \circ g$ ja $g \circ f$, kun

$$\text{a)} \quad f(x) = x^2 + x - 9 \quad \text{ja} \quad g(x) = 7x$$
$$\text{b)} \quad f(x) = 2x + 1 \quad \text{ja} \quad g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

3. Ilmoita yhdistetyn funktion

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

a) sisäfunktio, kun ulkofunktio on

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

b) ulkofunktio, kun sisäfunktio on

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

4. Tulkitse funktio $h(x) = (x+2)^2 + (x+2)^4$ yhdistetyksi funktioksi ainakin kahdella eri tavalla.

5. Muodosta yhdistetty funktio $g \circ f$ ja derivoi se.

$$\text{a)} \quad f(x) = x - 1 \quad \text{ja} \quad g(x) = \sqrt{x}$$
$$\text{b)} \quad f(x) = 1 - x \quad \text{ja} \quad g(x) = \sqrt{x}$$
$$\text{c)} \quad f(x) = x^2 + 1 \quad \text{ja} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

6. Muodosta yhdistetty funktio $g \circ f$ ja derivoi se.

$$\text{a)} \quad f(x) = 2x \quad \text{ja} \quad g(x) = \frac{1}{x}$$
$$\text{b)} \quad f(x) = x^2 \quad \text{ja} \quad g(x) = \frac{1}{x}$$
$$\text{c)} \quad f(x) = 1 - x \quad \text{ja} \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

7. Derivoi yhdistetty funktio.

a) $(5x+10)^{10}$ b) $\left(\frac{x}{5}+10\right)^{10}$ c) $\left(10-\frac{5}{x}\right)^{10}$

8. Derivoi yhdistetty funktio.

a) $\sqrt{x^2+1}$ b) $x+\sqrt{x^2+1}$ c) $x\sqrt{x^2+1}$

9. Derivoi yhdistetty funktio.

a) $(\sqrt{2x}+1)^4$ b) $(3+\sqrt{3x})^3$ c) $(\sqrt{x^2+1}+1)^3$

10. Muodosta funktion a) $f\circ f$, b) $g\circ f$ derivaattafunktio, kun $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ ja $g(x)=x^3$.

Ratkaisut:

1. a) $g(1) = 4 - 5 \cdot 1 = -1$, $f(-1) = 3(-1)^2 = 3$. Siis $(f \circ g)(1) = 3$.

   b) $f(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$, $g(3) = 4 - 5 \cdot 3 = -11$. Siis $(g \circ f)(1) = -11$.

2.

   a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(7x) = (7x)^2 + (7x) - 9 = 49x^2 + 7x - 9,$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x - 9) = 7(x^2 + x - 9) = 7x^2 + 7x - 63.$

   b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) + 1$
   $= x - 1 + 1 = x,$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = \frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = x.$

3. a) Koska $g(x) = 1/\sqrt{x}$, niin

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}.$$

   Jotta pätisi $(g \circ f)(x) = 1/\sqrt{x+1}$, täytyy olla $f(x) = x + 1$.

   b) Koska $f(x) = \sqrt{x+1}$, niin

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}).$$

   Jotta pätisi $(g \circ f)(x) = 1/\sqrt{x+1}$, täytyy olla $g(x) = 1/x$.

4. Ensinnäkin voidaan ottaa sulkujen sisällä oleva lauseke sisäfunktion lausekkeeksi, eli määritellä sisäfunktioksi $g_1(x) = x + 2$. Tällöin ulkofunktioksi jää $f_1(x) = x^2 + x^4$. Nyt

$$(f_1 \circ g_1)(x) = f_1(g_1(x)) = f_1(x+2) = (x+1)^2 + (x+1)^4.$$

   Toisaalta voidaan myös sulkujen sisällä olevan lausekkeen neliö sisäfunktioksi, eli määritellä $g_2(x) = (x+2)^2$. Tämän jälkeen ulkofunktioksi jää $f_2(x) = x + x^2$. Nimittäin

$$\begin{aligned}(f_2 \circ g_2)(x) = f_2(g_2(x)) = f_2((x+2)^2) &= (x+1)^2 + ((x+1)^2)^2 \\ &= (x+1)^2 + (x+1)^4.\end{aligned}$$

5. a) Yhdistetyn funktion lauseke on

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-1) = \sqrt{x-1}.$$

Sisäfunktion derivaatta on $f'(x) = 1$ ja ulkofunktion

$$g'(x) = D\ x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

joten

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

b) Yhdistetyn funktion lauseke on

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1-x) = \sqrt{1-x}.$$

Sisäfunktion derivaatta on tällä kertaa $f'(x) = -1$, joten

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (-1) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}.$$

c) Yhdistetyn funktion lauseke on

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}.$$

Sisäfunktion derivaatta on $f'(x) = 2x$, joten

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (2x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

6. a) Yhdistetyn funktion lauseke on

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = \frac{1}{2x}.$$

Sisäfunktion derivaatta on $f'(x) = 2$ ja ulkofunktion

$$g'(x) = D\ x^{-1} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$

joten

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = -\frac{1}{(2x)^2} \cdot 2 = -\frac{2}{4x^2} = -\frac{1}{2x^2}.$$

b) Yhdistetyn funktion lauseke on

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \frac{1}{x^2}.$$

Sisäfunktion derivaatta on tällä kertaa $f'(x) = 2x$, joten

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = -\frac{1}{(x^2)^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}.$$

c) Yhdistetyn funktion lauseke on

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1-x) = \frac{1}{1-x}.$$

Sisäfunktion derivaatta on tällä kertaa $f'(x) = -1$, joten

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

7. Derivoidaan suoraan yhdistetyt funktiot.

a) $D(5x+10)^{10} = 10(5x+10)^9 \cdot D(5x+10) = 10(5x+10)^9 \cdot 5$
$= 50(5x+10)^9$

b) $D\left(\frac{x}{5}+10\right)^{10} = 10\left(\frac{x}{5}+10\right)^9 \cdot D\left(\frac{x}{5}+10\right) = 10\left(\frac{x}{5}+10\right)^9 \cdot \frac{1}{5}$
$= 2\left(\frac{x}{5}+10\right)^9$

c) $D\left(10-\frac{5}{x}\right)^{10} = 10\left(10-\frac{5}{x}\right)^9 \cdot D(10-5x^{-1}) = 10\left(10-\frac{5}{x}\right)^9 \cdot 5x^{-2}$
$= \frac{50}{x^2}\left(10-\frac{5}{x}\right)^9$

8. Derivoidaan (a)-kohdassa yhdistetty funktio ja käytetään sitten (b)- ja

(c)-kohdissa (a)-kohdan tulosta hyväksi.

a) $D(\sqrt{x^2+1}) = D(x^2+1)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} \cdot D(x^2+1)$

$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

b) $D(x+\sqrt{x^2+1}) = Dx + D(\sqrt{x^2+1}) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

c) $D(x\sqrt{x^2+1}) = Dx \cdot \sqrt{x^2+1} + x \cdot D(\sqrt{x^2+1})$

$= 1 \cdot \sqrt{x^2+1} + x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

$= \frac{(\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

9. a) Sisäfunktion derivaatta on

$$D(\sqrt{2x}+1) = D((2x)^{1/2}+1) = \frac{1}{2}(2x)^{-1/2} \cdot 2 + 0 = (2x)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2x}},$$

joten

$$\begin{aligned} D(\sqrt{2x}+1)^4 &= 4(\sqrt{2x}+1)^3 \cdot D(\sqrt{2x}+1) = 4(\sqrt{2x}+1)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} \\ &= \frac{4(\sqrt{2x}+1)^3}{\sqrt{2x}}. \end{aligned}$$

b) Sisäfunktion derivaatta on

$$D(3+\sqrt{3x}) = D(3+(3x)^{1/2}) = 0 + \frac{1}{2}(3x)^{-1/2} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x}},$$

joten

$$\begin{aligned} D(3+\sqrt{3x})^3 &= 3(3+\sqrt{3x})^2 \cdot D(3+\sqrt{3x}) = 3(3+\sqrt{3x})^2 \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x}} \\ &= \frac{9(3+\sqrt{3x})^2}{2\sqrt{3x}}. \end{aligned}$$

c) Sisäfunktion derivaatta on

$$D(\sqrt{x^2+1}+1) = D((x^2+1)^{1/2}+1) = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x + 0 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

joten

$$
\begin{aligned}
D(\sqrt{x^2+1}+1)^3 &= 3(\sqrt{x^2+1}+1)^2 \cdot D(\sqrt{x^2+1}+1) \\
&= 3(\sqrt{x^2+1}+1)^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{3x(\sqrt{x^2+1}+1)^2}{\sqrt{x^2+1}}.
\end{aligned}
$$

10. a) Lasketaan ensin yhdistetyn funktion lauseke:

$$
\begin{aligned}
(f \circ f)(x) &= f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x}{1-x}-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\left(-\frac{x}{1-x}\right)} = -\frac{1-x}{x} \\
&= -\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x}\right) = 1-\frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

Yhdistetyn funktion derivaatta on siis

$$
(f \circ f)'(x) = D\left(1-\frac{1}{x}\right) = D(1-x^{-1}) = 0-(-1)\cdot x^{-2} = \frac{1}{x^2}.
$$

b) Yhdistetyn funktion lauseke on

$$
(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{1-x}\right) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = \frac{1}{(1-x)^3}.
$$

Yhdistetyn funktion derivaatta on siis

$$
D\frac{1}{(1-x)^3} = D(1-x)^{-3} = -3(1-x)^{-4}\cdot(-1) = \frac{3}{(1-x)^4}.
$$