Integrointi ja sovellukset

Tehtävät:

1. Muodosta ja laske yläsumma funktiolle $f(x) = 2x - 5$ välillä $[0, 4]$, kun väli on jaettu neljään yhtä suureen osaan.

2. Määritä integraalin $\int_{-2}^{2}(x^2 + 1)\,dx$ likiarvo laskemalla alasumma, kun integroimisväli on jaettu neljään yhtä suureen osaan.

3. Laske määrätyn integraalin arvo käyttämällä pinta-alatulkintaa.

   a) $\displaystyle\int_{-2}^{5} 3\,dx$ b) $\displaystyle\int_{1}^{4} 4-x\,dx$ c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} |x|\,dx$ d) $\displaystyle\int_{-4}^{-1} (x+5)\,dx$

4. Laske määrätyt integraalit.

   a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} 2\,dx$ b) $\displaystyle\int_{0}^{2} 2x\,dx$ c) $\displaystyle\int_{-2}^{0} x^2\,dx$

5. Laske määrätyt integraalit.

   a) $\displaystyle\int_{0}^{2} (x-1)\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2-1)\,dx$ c) $\displaystyle\int_{1}^{4} \left(1-\frac{x^2}{3}\right)dx$

6. Laske määrätyt integraalit.

   a) $\displaystyle\int_{0}^{1} e^{x+1}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{1}^{2} e^{-2x}\,dx$ c) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 5} e^{x}(3-4e^{x})\,dx$

7. Laske määrätyt integraalit.

   a) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx$ b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos x\,dx$ c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \cos 2x\,dx$

8. Laske funktion f kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä alue tietyllä välillä, kun

   a) $f(x) = 4 - x^2$ ja väli f:n nollakohtien väli

   b) $f(x) = 2+3x-x^3$ ja väli on f:n ainoiden nollakohtien -1 ja 2 välissä

   c) $f(x) = \dfrac{3}{x}$ ja väli on $[1, 3]$

9. Suoraviivaisesti etenevän kappaleen nopeus v (m/s) riippuu ajasta $t(s)$ yhtälön $v(t) = 12 + 10t$ mukaisesti. Laske kappaleen kulkema matka kolmannen sekunnin aikana.

10. Vettä aletaan pumputa tyhjään säiliöön nopeudella $400-2t$ litraa minuutissa. Lausekkeessa t tarkoittaa aikaa minuutteina pumppuamisen alusta laskettuna. Kuinka paljon säiliössä on vettä puolen tunnin pumppuamisen jälkeen?

Ratkaisut:

1. Kun väli $[0,4]$ jaetaan neljään yhtä suureen osaan, osaväleiksi tulevat välit $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$ ja $[3,4]$. Funktion $f(x) = 2x - 5$ kuvaaja on nouseva suora, joten jokaisella osavälillä funktion suurin arvo saavutetaan osavälin oikeanpuoleisessa päätepisteessä. Nämä maksimiarvot ovat siis:

$$\begin{aligned} &\text{väli } [0,1]: \quad f(1) = 2 \cdot 1 - 5 = 2 - 5 = -3, \\ &\text{väli } [1,2]: \quad f(2) = 2 \cdot 2 - 5 = 4 - 5 = -1, \\ &\text{väli } [2,3]: \quad f(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 6 - 5 = 1, \\ &\text{väli } [3,4]: \quad f(4) = 2 \cdot 4 - 5 = 8 - 5 = 3. \end{aligned}$$

   Yläsumma saadaan laskemalla yhteen kullakin välillä saavutettu maksimiarvo kerrottuna välin pituudella:

$$S = -3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 0.$$

2. Kun väli $[-2,2]$ jaetaan neljään yhtä suureen osaan, osaväleiksi tulevat välit $[-2,-1]$, $[-1,0]$, $[0,1]$ ja $[1,2]$. Funktion $f(x) = x^2 + 1$ kuvaaja on y-akselin suhteen symmetrinen ylöspäin aukeava paraabeli. Negatiivisilla osaväleillä funktio on siis laskeva, jolloin pienin arvo saavutetaan kunkin osavälin oikeanpuoleisessa päätepisteessä. Positiivisilla osaväleillä funktio on puolestaan nouseva, jolloin pienin arvo saavutetaan välin vasemmanpuoleisessa päätepisteessä. Nämä minimiarvot ovat siis:

$$\begin{aligned} &\text{väli } [-2,-1]: \quad f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2, \\ &\text{väli } [-1,0]: \quad f(0) = 0^2 + 1 = 0 + 1 = 1, \\ &\text{väli } [0,1]: \quad f(0) = 0^2 + 1 = 0 + 1 = 1, \\ &\text{väli } [1,2]: \quad f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

   Alasumma saadaan laskemalla yhteen kullakin välillä saavutettu minimiarvo kerrottuna välin pituudella:

$$s = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 6.$$

3. a) Funktion $f(x) = 3$ kuvaaja on vaakasuora suora. Tämän kuvaajan alle välillä $[-2,5]$ jäävä alue on muodoltaan suorakulmio, jonka kannan pituus on $5 - (-2) = 7$ ja korkeus 3. Täten sen pinta-ala — ja samalla tehtävän integraalin arvo — on $7 \cdot 3 = 21$.

   b) Funktion $f(x) = 4 - x$ kuvaaja on laskeva suora. Tämä kuvaaja kulkee välillä $[1,4]$ koko ajan x-akselin yläpuolella, ja oikeassa päätepisteessä kuvaaja koskettaa x-akselia. Kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä alue on siis muodoltaan kolmio. Kolmion kannan pituus on $4 - 1 = 3$ ja korkeus $f(1) = 4 - 1 = 3$. Täten sen pinta-ala — ja samalla tehtävän integraalin arvo — on $1/2 \cdot 3 \cdot 3 = 9/2 = 4\ 1/2$.

c) Funktion $f(x) = |x|$ kuvaaja on origoon päätyvä laskeva suora, kun x on negatiivinen, ja origosta lähtevä nouseva suora, kun x on positiivinen. Kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä alue koostuu kahdesta kolmiosta, joista toinen on y-akselin vasemmalla puolella ja toinen oikealla. Kolmiot ovat samanmuotoiset ja -kokoiset: niiden kannan pituus on 2 ja korkeus $f(2) = f(-2) = |\pm 2| = 2$. Täten molempien pinta-ala on $1/2 \cdot 2 \cdot 2 = 2$. Integraalin arvo on kolmioiden yhteenlaskettu pinta-ala, joka on 4.

d) Funktion $f(x) = x + 5$ kuvaaja on nouseva suora. Tämä kuvaaja kulkee välillä $[-4, -1]$ koko ajan x-akselin yläpuolella, ja funktion pienin arvo tuolla välillä on $f(-4) = -4 + 5 = 1$. Kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä alue on siis puolisuunnikas, jonka toisen pystysuoran sivun pituus on $f(-4) = 1$ ja toisen $f(-1) = -1 + 5 = 4$. Vaakasuoran sivun pituus on integroimisvälin pituus $-1-(-4) = 3$. Puolisuunnikkaan alan kaavan mukaan kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala — tehtävän integraalin arvo — on $3 \cdot (1 + 4)/2 = 15/2 = 7\ 1/2$. (Alan voi laskea myös jakamalla puolisuunnikkaan kolmioksi, jonka pinta-ala on $1/2 \cdot 3 \cdot 3 = 9/2 = 4\ 1/2$, ja suorakulmioksi, jonka pinta-ala on $3 \cdot 1 = 3$.)

4.

a) $$\int_{-1}^{2} 2\,dx = \Big/_{\!\!-1}^{\,2}\, 2x = 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 4 + 2 = 6$$

b) $$\int_{0}^{2} 2x\,dx = \Big/_{\!\!0}^{\,2}\, x^2 = 2^2 - 0^2 = 4 - 0 = 4$$

c) $$\int_{-2}^{0} x^2\,dx = \Big/_{\!\!-2}^{\,0}\, \frac{x^3}{3} = \frac{0^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = 0 - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

5.

$$\text{a)}\quad \int_0^2 (x-1)\,dx = \Big/_{0}^{2} \left(\frac{x^2}{2} - x\right) = \left(\frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{0^2}{2} - 0\right)$$
$$= (2-2) - (0-0) = 0$$

$$\text{b)}\quad \int_{-1}^1 (x^2-1)\,dx = \Big/_{-1}^{1} \left(\frac{x^3}{3} - x\right) = \left(\frac{1^3}{3} - 1\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1)\right)$$
$$= \left(\frac{1}{3} - 1\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{c)}\quad \int_1^4 \left(1 - \frac{x^2}{3}\right)\,dx = \Big/_{1}^{4} \left(x - \frac{x^3}{3\cdot 3}\right) = \left(4 - \frac{4^3}{9}\right) - \left(1 - \frac{1^3}{9}\right)$$
$$= \left(4 - \frac{64}{9}\right) - \left(1 - \frac{1}{9}\right) = -\frac{28}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{36}{9} = -4$$

6.

$$\text{a)}\quad \int_0^1 e^{x+1}\,dx = \Big/_{0}^{1} e^{x+1} = e^{1+1} - e^{0+1} = e^2 - e$$

$$\text{b)}\quad \int_1^2 e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_1^2 e^{-2x}\cdot(-2)\,dx = \Big/_{1}^{2} -\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-2\cdot 2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-2\cdot 1}\right) = -\frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2}e^{-2} = \frac{1}{2}(e^{-2} - e^{-4})$$

$$\text{c)}\quad \int_0^{\ln 5} e^x(3 - 4e^x)\,dx = \int_0^{\ln 5} 3e^x - 4e^{2x}\,dx$$
$$= \int_0^{\ln 5} 3e^x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\ln 5} 4e^{2x}\cdot 2\,dx = \Big/_{0}^{\ln 5} 3e^x - \frac{1}{2}\Big/_{0}^{\ln 5} 4e^{2x}$$
$$= 3e^{\ln 5} - 3e^0 - \frac{1}{2}(4e^{2\ln 5} - 4e^{2\cdot 0}) = 3\cdot 5 - 3\cdot 1 - \frac{1}{2}(4(e^{\ln 5})^2 - 4\cdot 1)$$
$$= 15 - 3 - \frac{1}{2}(4\cdot 5^2 - 4) = 12 - \frac{1}{2}(100 - 4) = 12 - 48 = -36$$

7.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \Big/_{0}^{\pi} -\cos x = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \Big/_{0}^{\pi} \sin x = \sin\pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 2x \cdot 2\,dx = \frac{1}{2}\Big/_{0}^{\frac{\pi}{8}} \sin 2x = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} - \sin 0\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

8. a) Määritetään ensin funktion f nollakohdat:

$$4 - x^2 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2.$$

Koska f:n kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, funktio on positiivinen juurtensa välissä. Siispä kysytty pinta-ala on integraali

$$\int_{-2}^{2} 4 - x^2\,dx = \Big/_{-2}^{2}\left(4x - \frac{x^3}{3}\right) = \left(4\cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4\cdot(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right)$$
$$= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

b) Välillä $]-1, 2[$ funktiolla f ei tehtävänasettelun mukaan ole nollakohtia. Koska esimerkiksi $f(0) = 2 > 0$, täytyy f:n siis olla positiivinen koko kyseisellä välillä. Kysytty pinta-ala on siis integraali

$$\int_{-1}^{2} 2 + 3x - x^3\,dx = \Big/_{-1}^{2}\left(2x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)$$
$$= \left(2\cdot 2 + \frac{3\cdot 2^2}{2} - \frac{2^4}{4}\right) - \left(2\cdot(-1) + \frac{3\cdot(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^4}{4}\right)$$
$$= (4 + 6 - 4) - \left(-2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right) = 6 - \left(-\frac{3}{4}\right) = 6\frac{3}{4}.$$

c) Funktio f on positiivinen, kun $x > 0$. Siispä kysytty ala on integraali

$$\int_1^3 \frac{3}{x}\,dx = \int_1^3 3 \cdot \frac{1}{x}\,dx = \mathop{/}_1^3 3\ln x = 3\ln 3 - 3\ln 1 = 3\ln 3 - 3 \cdot 0 = 3\ln 3.$$

9. Kappaleen kulkema matka tietyllä aikavälillä on nopeuden kertymä. Se saadaan integroimalla nopeuden funktiota kyseisellä välillä. Koska haluttiin tietää kuljettu matka kolmannen sekunnin aikana nollasta lähtien, integroidaan siis nopeuden lauseketta välillä $[2, 3]$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\int_2^3 12 + 10t\,dt &= \mathop{/}_2^3 (12t + 5t^2) = (12 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2) - (12 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2)\\ &= (36 + 45) - (24 + 20) = 81 - 44 = 37.\end{aligned}$$

Kappaleen kulkema matka oli siis 37 m.

10. Veden kertymä säiliöön voidaan laskea virtausnopeuden integraalina. Näin saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^{30} 400 - 2t\,dt &= \mathop{/}_0^{30} (400t - t^2) = (400 \cdot 30 - 30^2) - (400 \cdot 0 - 0^2)\\ &= 12000 - 900 = 11100.\end{aligned}$$

Vettä kertyy säiliöön 11100 litraa.