Integraalifunktio

Tehtävät:

1. Määritä integraalifunktiot.

   a) $f(x) = x^2 + x$ b) $f(x) = 5x^5 - 1$ c) $f(x) = 2x^3 + 1$

2. Määritä integraalifunktiot.

   a) $f(x) = x^{-2}$ b) $f(x) = \dfrac{3}{x^3}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

3. Määritä integraalifunktiot.

   a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = x^{2/3}$ c) $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x}}$

4. Laske $g(6) - g(3)$, kun $g'(x) = x^2 + 1$.

5. Muodosta annetut ehdot täyttävä funktio f.

   a) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$ ja $f(0) = -10$
   b) $f'(x) = 3(2-x)^2$ ja $f(0) = 0$

6. Määritä integraalifunktiot.

   a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{2}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$

7. Määritä integraalifunktiot.

   a) $f(x) = 2e^x$ b) $f(x) = \dfrac{e^x}{2}$ c) $f(x) = x^e$

8. Määritä integraalifunktiot.

   a) $f(x) = x + \sin x$ b) $f(x) = \dfrac{3\cos x}{2}$ c) $f(x) = \cos x - \sin x$

9. Määritä se funktion $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3}{x} + 2x - 1$ integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(1, 3)$ kautta.

10. Osoita, että funktion $f(x) = a^x$ integraalifunktio on $F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, kun $a > 0$ ja $a \neq 1$.

Ratkaisut:

1.

$$\text{a)}\quad \int x^2 + x\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$\text{b)}\quad \int 5x^5 - 1\,dx = 5 \cdot \frac{x^6}{5} - \frac{x}{1} + C = \frac{5x^6}{5} - x + C$$

$$\text{c)}\quad \int 2x^3 + 1\,dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x}{1} + C = \frac{x^4}{2} + x + C$$

2.

$$\text{a)}\quad \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -x^{-1} + C$$

$$\text{b)}\quad \int \frac{3}{x^3}\,dx = \int 3x^{-3}\,dx = 3 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{3x^{-2}}{2} + C$$

$$= -\frac{3}{2x^2} + C$$

$$\text{c)}\quad \int \frac{1}{x^4}\,dx = \int x^{-4}\,dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$$

3. Määritä integraalifunktiot.

$$\text{a)}\quad \int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

$$\text{b)}\quad \int x^{2/3}\,dx = \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} + C = \frac{x^{5/3}}{5/3} + C = \frac{3}{5}x^{5/3} + C$$

$$\text{c)}\quad \int \frac{7}{\sqrt{x}}\,dx = \int 7x^{-1/2}\,dx = 7 \cdot \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = 7 \cdot \frac{x^{1/2}}{1/2}$$

$$= 14\sqrt{x} + C$$

4. Funktio g on funktion g' integraalifunktio, eli

$$g(x) = \int x^2 + 1\,dx = \frac{x^3}{3} + x + C.$$

Eri vakion C arvoilla saadaan eri funktio g. Vastaus ei kuitenkaan riipu C:stä, sillä

$$\begin{aligned} g(6) - g(3) &= \left(\frac{6^3}{3} + 6 + C\right) - \left(\frac{3^3}{3} + 3 + C\right) \\ &= (72 + 6 + C) - (9 + 3 + C) = 78 + C - 12 - C = 66. \end{aligned}$$

5. a) Funktio f on funktion f' integraalifunktio, eli

$$f(x) = \int 3x^2 - 6x + 1\,dx = x^3 - 3x^2 + x + C.$$

Eri vakion C arvoilla saadaan eri funktio f. Halutaan kuitenkin, että $f(0) = -10$, jolloin

$$0^3 - 3 \cdot 0^2 + 0 + C = -10 \iff C = -10.$$

Siispä kysytty funktio on $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 10$.

b) Funktio f on funktion f' integraalifunktio, eli

$$\begin{aligned} f(x) &= \int 3(2-x)^2\,dx = 3\int (4 - 4x + x^2)\,dx \\ &= 3\left(4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right) + C = 12x - 6x^2 + x^3 + C. \end{aligned}$$

Eri vakion C arvoilla saadaan eri funktio f. Halutaan kuitenkin, että $f(0) = 0$, jolloin

$$12 \cdot 0 - 6 \cdot 0^2 + \cdot 0^3 + C = 0 \iff C = 0.$$

Siispä kysytty funktio on $f(x) = 12x - 6x^2 + x^3$.

6. Määritä integraalifunktiot.

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \int \frac{2}{x}\,dx = \int 2x^{-1}\,dx = 2\ln|x| + C \\ &\text{b)} \quad \int \frac{x}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{4} + C \\ &\text{c)} \quad \int \frac{1}{2x}\,dx = \int \frac{1}{2}x^{-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| + C \end{aligned}$$

7. Määritä integraalifunktiot.

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \int 2e^x\,dx = 2e^x + C \\ &\text{b)} \quad \int \frac{e^x}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}e^x\,dx = \frac{1}{2}e^x + C \\ &\text{c)} \quad \int x^e\,dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C \end{aligned}$$

8. Määritä integraalifunktiot.

a) $\int x + \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} - \cos x + C$

b) $\int \frac{3\cos x}{2} \, dx = \int \frac{3}{2} \cos x \, dx = \frac{3}{2} \sin x + C$

c) $\int \cos x - \sin x \, dx = \sin x - (-\cos x) + C = \sin x + \cos x + C$

9. Funktion f integraalifunktio on

$$F(x) = \int \frac{3}{x} + 2x - 1 \, dx = 3 \ln |x| + x^2 - x + C.$$

Koska funktion f määrittelyjoukkoon kuuluu vain positiivisia lukuja, on integraalifunktiossa aina $|x| = x$. Eri vakion C arvoilla saadaan eri integraalifunktio F. Sille, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(1, 3)$ kautta, pätee kuitenkin $F(1) = 3$, eli

$$3 \ln 1 + 1^2 - 1 + C = 3 \iff 3 \cdot 0 + 0 + C = 3 \iff C = 3.$$

Siispä etsitty funktio on $F :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $F(x) = 3 \ln x + x^2 - x + 3$.

10. Funktio F on funktion f integraalifunktio täsmälleen silloin, kun $F' = f$. Tarkistetaan asia derivoimalla funktio F. Derivoidaan aluksi erikseen lauseke a^x. Se onnistuu parhaiten eksponenttifunktion muunnoskaavan ja yhdistetyn funktion derivointisäännön avulla:

$$D\ a^x = D\ e^{\ln a \cdot x} = e^{\ln a \cdot x} \cdot D(\ln a \cdot x) = a^x \ln a.$$

Nyt voidaan derivoida F:

$$F'(x) = D\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right) = \frac{1}{\ln a} \cdot D\ a^x + 0 = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \ln a = a^x.$$

Täten $F' = f$, eli F on f:n integraalifunktio.