Derivaatan sovellukset (ääriarvotehtävät ym.)

Tehtävät:

1. Tutki derivaatan avulla funktion f kulkua.

   a) $f(x) = x^2 - 4x$ b) $f(x) = -x^2 + 6x + 11$

   c) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 + 4$ d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 3$

2. Määritä rationaalifunktion f ääriarvot.

   a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$

   c) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+2}$

   e) $f(x) = -\dfrac{8}{x^2+4}$ f) $f(x) = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{2}{x}$

3. Määritä funktion

   a) $f(x) = 12x^2 - 4x^3 - 3x^4$
   b) $g(x) = x^3 + 3x$

   suurin ja pienin arvo välillä $-1 \leq x \leq 2$.

4. Kolmion kannan ja sitä vastaavan korkeuden summa on 18 cm. Laske kolmion alan suurin mahdollinen arvo.

5. Kalankasvattaja haluaa aidata suorakulmion muotoisen alktaan ja jakaa sen kolmeen osaan yhden sivun suuntaisilla väliaikoilla. Käytettävissä on 200 m aitaverkkoa. Laske altaan mitat, kun altaan kokonaispinta-alan tulee olla mahdollisimman suuri.

6. Puoliympyrään on piirretty suorakulmio siten, että yksi sen sivuista on puoliympyrän suoralla reunalla ja tälle sivulle vastakkaiset kulmat ovat ympyrän kehällä. Kuinka suuri on suorakulmion kannan ja korkeuden suhde, kun sen piiri on pisin mahdollinen?

7. Millä x:n arvoilla funktio $f(x) = 3x - x \ln x$ on aidosti kasvava?

8. Olkoon $f(x) = 80(e^{-x} - e^{-2x})$, kun $x \geq 0$. Määritä funktion ääriarvokohdat ja ääriarvot.

9. Määritä funktion $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ suurin arvo.

10. Määritä funktion $f(x) = \cos^2 x + \sin x$ pienin arvo.

Ratkaisut:

1. a) Derivoidaan funktio:

$$f'(x) = D(x^2 - 4x) = 2x - 4.$$

Derivaatan ainoa nollakohta on $x = 2$. Derivaatta voi vaihtaa merkkiä vain nollakohdassaan. Siis, koska esimerkiksi $f'(0) = -4 < 0$ ja $f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = -2 > 0$, voidaan päätellä, että derivaatta on negatiivinen, kun $x < 2$, ja positiivinen, kun $x > 2$. Täten funktio f on aidosti vähenevä, kun $x \leq 2$, ja aidosti kasvava, kun $x \geq 2$. Kohdassa, jossa $x = 2$, on funktion minimikohta.

b) Derivaatta on

$$f'(x) = D(-x^2 + 6x + 11) = -2x + 6.$$

Derivaatan ainoa nollakohta on $x = 3$. Derivaatta voi vaihtaa merkkiä vain nollakohdassaan. Koska esimerkiksi $f'(0) = 6 > 0$ ja $f'(4) = -2 \cdot 4 + 6 = -2 < 0$, voidaan päätellä, että derivaatta on positiivinen, kun $x < 3$, ja negatiivinen, kun $x > 3$. Täten funktio f on aidosti kasvava, kun $x \leq 3$, ja aidosti vähenevä, kun $x \geq 3$. Kohdassa, jossa $x = 3$, on funktion maksimikohta.

c) Derivaatta on

$$f'(x) = D\left(\frac{x^4}{4} - x^3 + 4\right) = \frac{4 \cdot x^3}{4} - 3x^2 + 0 = x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3).$$

Derivaatta on tulon nollasäännön perusteella nolla vain, jos $x = 0$ tai $x = 3$. Tekijä x^2 ei ole koskaan negatiivinen, joten derivaatan etumerkki riippuu vain tekijästä $x - 3$. Tämä puolestaan on positiivinen täsmälleen silloin, kun $x > 3$. Näin voidaan päätellä, että derivaatta on negatiivinen, kun $x < 3$ (paitsi pisteessä $x = 0$, ja positiivinen, kun $x > 3$. Siispä funktio f on aidosti vähenevä, kun $x \leq 3$, ja aidosti kasvava, kun $x \geq 3$. Kohdassa, jossa $x = 3$, on funktion minimikohta.

d) Derivaatta on

$$f'(x) = D(x^3 - 6x^2 + 12x + 3) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4).$$

Derivaatta on nolla silloin kun $x^2 - 4x + 4 = 0$. Ratkaistaan nollakohdat toisen asteen ratkaisukaavalla:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Nollakohtia löytyi vain yksi: $x = 2$. Koska derivaatan lauseke vastaa ylöspäin aukeavaa paraabelia, voidaan kuvan perusteella päätellä, että se ei ole koskaan negatiivinen. (Muuten sillä olisi vähintään kaksi nollakohtaa.) Siispä funktio on kaikkialla aidosti kasvava.

2. a) Derivoidaan funktio ja sievennetään derivaatta yhdeksi murtolausekkeeksi:

$$f'(x) = 1 + \frac{D\,1 \cdot x - 1 \cdot D\,x}{x^2} = 1 + \frac{0-1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}.$$

Derivaatta ei ole määritelty, kun $x = 0$. Murtolausekkeen nollakohdat ovat samat kuin sen osoittajan nollakohdat. Derivaatta on siis nolla täsmälleen silloin, kun $x^2 - 1 = 0$, eli silloin, kun $x = \pm 1$.

Derivaatan nimittäjä x^2 ei ole koskaan negatiivinen, joten derivaatan etumerkki riippuu vain osoittajasta. Osoittaja puolestaan vastaa ylöspäin aukeavaa paraabelia, joten se on negatiivinen nollakohtiensa välissä. Siispä derivaatta on negatiivinen välillä $]-1,1[$ (paitsi kohdassa $x = 0$), muualla ei. Edelleen f funktio on aidosti vähenevä väleillä $[-1,0[$ ja $]0,1]$, ja aidosti kasvava, kun $x \leq -1$ ja kun $x \geq 1$. Lopulta voidaan päätellä, että funktiolla on kohdassa $x = -1$ maksimi, ja kohdassa $x = 1$ minimi. Maksimiarvo on $f(-1) = -2$ ja minimiarvo $f(1) = 2$.

b) Derivoidaan funktio ja sievennetään derivaatta yhdeksi murtolausekkeeksi:

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{D\,2 \cdot x - 2 \cdot D\,x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{0-2}{x^2} = \frac{x^2}{2x^2} - \frac{4}{2x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2}.$$

Derivaatta ei ole määritelty, kun $x = 0$. Murtolausekkeen nollakohdat ovat samat kuin sen osoittajan nollakohdat. Derivaatta on siis nolla täsmälleen silloin, kun $x^2 - 4 = 0$, eli silloin, kun $x = \pm 2$.

Derivaatan nimittäjä x^2 ei ole koskaan negatiivinen, joten derivaatan etumerkki riippuu vain osoittajasta. Osoittaja puolestaan vastaa ylöspäin aukeavaa paraabelia, joten se on negatiivinen nollakohtiensa välissä. Siispä derivaatta on negatiivinen välillä $]-2,2[$ (paitsi kohdassa $x = 0$), muualla ei. Edelleen funktio f on aidosti vähenevä väleillä $[-2,0[$ ja $]0,2]$, ja aidosti kasvava, kun $x \leq -2$ ja kun $x \geq 2$. Lopulta voidaan päätellä, että funktiolla on kohdassa $x = -2$ maksimi ja kohdassa $x = 2$ minimi. Maksimiarvo on $f(-2) = -2$ ja minimiarvo $f(2) = 2$.

c) Derivoidaan funktio:

$$f'(x) = \frac{D\ x \cdot (x-1) - x \cdot D(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{1 \cdot (x-1) - x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2}$$
$$= -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Derivaatta ei ole määritelty, kun $x = 1$. Derivaatalla ei ole nollakohtia, koska sen osoittaja on vakio (ja eri kuin nolla).

Sekä derivaatan osoittaja että nimittäjä ovat aina epänegatiivisia. Siispä derivaatta ei ole koskaan positiivinen (huomaa miinusmerkki murtolausekkeen edessä). Edelleen funktio f aidosti vähenevä niillä väleillä, missä se on määritelty, eli kun $x < 1$ tai kun $x > 1$. Funktiolla ei ole ääriarvoja.

d) Derivoidaan funktio:

$$f'(x) = \frac{D\ x^2 \cdot (2x+2) - x^2 \cdot D(2x+2)}{(2x+2)^2} = \frac{2x \cdot (2x+2) - x^2 \cdot 2}{(2x+2)^2}$$
$$= \frac{4x^2 + 4x - 2x^2}{(2x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x}{(2x+2)^2} = \frac{2x(x+2)}{(2x+2)^2}.$$

Derivaatta ei ole määritelty, kun $x = -1$. Derivaatta on nolla, kun $2x(x+2) = 0$, eli kun $x = 0$ tai $x = -2$.

Derivaatan nimittäjä ei ole koskaan negatiivinen, joten etumerkki riippuu vain osoittajasta. Osoittaja vastaa ylöspäin aukeavaa paraabelia, joten se on negatiivinen nollakohtiensa välissä, eli välillä $]-2, 0[$. Voidaan päätellä, että funktio f on aidosti vähenevä väleillä $[-2, -1[$ ja $]-1, 0]$, sekä aidosti kasvava, kun $x \leq -2$ ja kun $x \geq 0$. Kohdassa $x = -2$ on täten maksimi ja kohdassa $x = 0$ minimi. Maksimiarvo on $f(-2) = -2$ ja minimiarvo $f(0) = 0$.

e) Derivoidaan funktio:

$$f'(x) = -\frac{D\ 8 \cdot (x^2+4) - 8 \cdot D(x^2+4)}{(x^2+4)^2} = -\frac{0 - 8 \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{16x}{(x^2+4)^2}.$$

Derivaatta on määritelty kaikkialla, sillä nimittäjä ei ole koskaan nolla. Derivaatta on nolla, kun osoittaja on nolla, eli kun $x = 0$.

Derivaatan nimittäjä on aina positiivinen, joten etumerkki riippuu vain osoittajasta. Osoittaja puolestaan on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$. Voidaan päätellä, että funktio f on aidosti vähenevä, kun

$x \leq 0$, ja aidosti kasvava, kun $x \geq 0$. Kohdassa $x = 0$ on täten minimi. Minimiarvo on $f(0) = -2$.

f) Derivoidaan funktio ja sievennetään se yhdeksi murtolausekkeeksi:

$$f'(x) = \frac{2x}{8} + \frac{D\ 2 \cdot x - 2 \cdot D\ x}{x^2} = \frac{x}{4} + \frac{0-2}{x^2} = \frac{x^3}{4x^2} - \frac{8}{4x^2} = \frac{x^3-8}{4x^2}.$$

Derivaatta ei ole määritelty, kun $x = 0$. Derivaatta on nolla, kun $x^3 - 8 = 0$, eli kun $x = 2$.

Derivaatan nimittäjä ei ole koskaan negatiivinen, joten etumerkki riippuu vain osoittajasta. Osoittaja voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdassaan. Koska esimerkiksi $0^3 - 8 = -8 < 0$ ja $3^3 - 8 = 19 > 0$, voidaan täten päätellä, että osoittaja on negatiivinen, kun $x < 2$ ja positiivinen kun $x > 2$. Sama pätee myös koko derivaatalle. Edelleen funktio f on aidosti vähenevä, kun $x < 0$ ja kun $0 \leq x \leq 2$, ja aidosti kasvava kun $x \geq 2$. Kohdassa $x = 2$ on täten minimi. Minimiarvo on $f(2) = 3/2 = 1\ 1/2$.

3. a) Funktio f on jatkuva, joten sen suurin ja pienin arvo suljetulla välillä löytyvät joko välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista. Derivaatta on

$$f'(x) = 24x - 12x^2 - 12x^3 = 12x(2 - x - x^2).$$

Tulon nollasäännön perusteella derivaatta on nolla vain, jos $x = 0$ tai $2 - x - x^2 = 0$. Tutkitaan jälkimmäistä tapausta toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2}.$$

Nollakohdiksi saadaan siis nollan lisäksi $x = -1$ ja $x = 2$. Nämä ovat samalla välin päätepisteet. Lasketaan funktion arvot näissä pisteissä sekä nollassa:

$$f(0) = 12 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^4 = 0,$$
$$f(-1) = 12 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^4 = 12 + 4 - 3 = 13,$$
$$f(2) = 12 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^4 = 12 \cdot 4 - 4 \cdot 8 - \cdot 16 = 48 - 32 - 48 = -32.$$

Näiden tulosten valossa funktion pienin arvo on -32 ja suurin 13.

b) Funktio g on jatkuva, joten sen suurin ja pienin arvo suljetulla välillä löytyvät joko välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista. Derivaatta on

$$g'(x) = 3x^2 + 3.$$

Derivaatta on aina positiivinen, eikä sillä ole lainkaan nollakohtia. Funktio saa siis suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä. Koska derivaatta on positiivinen, funktio on kasvava, ja näin voidaan lisäksi päätellä, että suurin arvo tulee välin oikeassa päätepisteessä, pienin vasemmassa. Lasketaan vielä nämä arvot:

$$\begin{aligned} g(-1) &= (-1)^3 + 3 \cdot (-1) = -1 - 3 = -4, \\ g(2) &= 2^3 + 3 \cdot 2 = 8 + 6 = 14. \end{aligned}$$

Suurin arvo on siis 14 ja pienin 4.

4. Merkitään kolmion kannan pituutta x. Koska kannan ja korkeuden summa on 18 cm, täytyy korkeuden olla tällöin $18 - x$. Kolmion pinta-alan lausekkeeksi saadaan tällöin

$$A(x) = \frac{1}{2}x(18 - x) = 9x - \frac{1}{2}x^2.$$

Kannan täytyy olla vähintään 0 cm pitkä, ja toisaalta se voi olla korkeintaan 18 cm, koska muuten korkeus olisi negatiivinen. Funktio A on siis määritelty suljetulla välillä $[0, 18]$.

Koska funktio A se on jatkuva, se saa suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai derivaatan nollakohdassa. Derivaatta on

$$A'(x) = 9 - \frac{1}{2} \cdot 2x = 9 - x.$$

Derivaatan nollakohta on $x = 9$. Lasketaan nyt funktion arvot välin päätepisteissä sekä derivaatan nollakohdassa:

$$\begin{aligned} A(0) &= 9 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = 0, \\ A(18) &= 9 \cdot 18 - \frac{1}{2} \cdot 18^2 = 162 - 162 = 0, \\ A(9) &= 9 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 9^2 = 81 - 40{,}5 = 40{,}5. \end{aligned}$$

Pinta-alan suurin mahdollinen arvo on siis 40,5 cm.

5. Merkitään sen sivun pituutta x, jonka suuntaisia väliaidat ovat. Näitä väliaitoja on kaksi kappaletta, joten altaan reunat mukaanlukien samansuuntaisiin sivuihin verkkoa kuluu verkkoa $4x$ metriä. Toisen suuntaisia sivuja varten jää siis jäljelle $200 - 4x$ metriä verkkoaitaa. Yhden tällaisen

sivun pituudeksi tulee siis $(200-4x)/2 = 100-2x$. Koko altaan pinta-alan riippuvuutta x:stä kuvaa siis funktio

$$A(x) = x \cdot (100 - 2x) = 100x - 2x^2. \tag{0.1}$$

Väliaidan suuntainen sivu on vähintään 0 metriä pitkä ja enintään 50 metriä, koska tällöin kaikki aita kuluu väliaidan suuntaisiin sivuihin. Funktio A on siis määritelty välillä $[0, 50]$. Se on derivoituva ja saa siksi suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai derivaatan nollakohdassa.

Funktion A derivaatta on

$$A'(x) = D(100x - 2x^2) = 100 - 4x.$$

Tämän ainoa nollakohta on $x = 25$. Lasketaan funktion arvot määrittelyvälin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \cdot (100 - 2 \cdot 0) = 0, \\ f(50) &= 50 \cdot (100 - 2 \cdot 50) = 50 \cdot 0 = 0, \\ f(25) &= 25 \cdot (100 - 2 \cdot 25) = 25 \cdot 50 = 1250. \end{aligned}$$

Suurin pinta-ala saavutetaan siis silloin, kun väliaidan pituus on 25 metriä. Tällöin toisen suuntaisen sivun pituudeksi tulee $100 - 2 \cdot 25 = 50$ metriä. Väliaita on siis lyhyemmän sivun suuntainen.

6. Olkoon puoliympyrän säde r. Nimitetään suorakulmion kannaksi sitä sivua, joka on puoliympyrän suoralla reunalla, ja merkitään sen pituutta x. Ympyrän keskipisteestä (eli suorakulmion kannan puolivälistä) jompaan kumpaan suorakulmion vastakkaiseen nurkkaan piirretty jana on samalla ympyrän säde, joten sen pituus on r. Jos merkitään suorakulmion korkeutta y, saadaan Pytharogaan lauseen perusteella $r^2 = (\frac{1}{2}x)^2 + y^2$, josta ratkaistuna $y = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}x^2}$. Suorakulmion piiri on siis

$$p(x) = 2x + 2y = 2x + 2\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}x^2} = 2x + \sqrt{4\left(r^2 - \frac{1}{4}x^2\right)} = 2x + \sqrt{4r^2 - x^2}.$$

Piirin pituus on kuvan perusteella vähintään kaksi kertaa ympyrän säteen pituus ja korkeintaan kaksi kertaa ympyrän halkaisijan pituus. Siispä p on määritelty, kun x on välillä $[0, 2r]$. Näissä päätepisteissä funktion arvo on

$$\begin{aligned} p(0) &= 2 \cdot 0 + \sqrt{4r^2 - 0^2} = \sqrt{4r^2} = 2r, \quad \text{ja} \\ p(2r) &= 2 \cdot 2r + \sqrt{4r^2 - (2r)^2} = 4r + \sqrt{4r^2 - 4r^2} = 4r. \end{aligned}$$

Koska funktio p on jatkuva suljetulla välillä, se saa suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai derivaatan nollakohdassa.

Derivoidaan funktio p:

$$\begin{aligned}p'(x) &= D\big(2x + (4r^2 - x^2)^{1/2}\big) = 2 + \frac{1}{2}(4r^2 - x^2)^{1/2-1} \cdot D(4r^2 - x^2)\\ &= 2 + \frac{1}{2}(4r^2 - x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = 2 + \frac{x}{\sqrt{4r^2 - x^2}}.\end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} & 2 + \frac{x}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = 0\\ \iff\quad & \frac{x}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = -2\\ \iff\quad & x = -2\sqrt{4r^2 - x^2}\\ \iff\quad & x^2 = 4(4r^2 - x^2)\\ \iff\quad & x^2 = 16r^2 - 4x^2\\ \iff\quad & 5x^2 = 16r^2\\ \iff\quad & x^2 = \frac{16r^2}{5}\\ \iff\quad & x = \frac{4r}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Funktion arvo derivaatan nollakohdassa on

$$\begin{aligned}p\left(\frac{4r}{\sqrt{5}}\right) &= 2 \cdot \frac{4r}{\sqrt{5}} + \sqrt{4r^2 - \left(\frac{4r}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{8r}{\sqrt{5}} + \sqrt{4r^2 - \frac{16r^2}{5}} = \frac{8r}{\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{4r^2}{5}}\\ &= \frac{8r}{\sqrt{5}} + \frac{2r}{\sqrt{5}} = \frac{10r}{\sqrt{5}} \approx 4{,}5r.\end{aligned}$$

Piirin suurin arvo saavutetaan siis silloin, kun $x = 4r/\sqrt{5}$. Tällöin suorakulmion korkeus on edellisen laskun perusteella $r/\sqrt{5}$, joten kannan ja korkeuden suhteeksi tulee

$$\frac{x}{y} = \frac{4r/\sqrt{5}}{r/\sqrt{5}} = 4.$$

7. Funktio $f(x) = 3x - x\ln x$ on määritelty vain, kun $x > 0$. Tutkitaan f:n derivaattaa:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3 - (D\ x \cdot \ln x + x \cdot D\ln x) = 3 - \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = 3 - (\ln x + 1)\\ &= 2 - \ln x.\end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$2 - \ln x = 0 \iff \ln x = 2 \iff x = e^2.$$

Derivaatta on jatkuva ja voi vaihtaa merkkiä vain nollakohdissaan. Koska $f'(e) = 2 - \ln e = 2 - 1 = 1 > 0$ ja $f'(e^3) = 2 - \ln e^3 = 2 - 3 = -1 < 0$, voidaan päätellä, että derivaatta on positiivinen välillä $]0, e^2[$ ja negatiivinen, kun $x > e^2$. Siispä funktio f on aidosti kasvava välillä $]0, e^2]$.

8. Derivoidaan funktio:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 80(e^{-x} \cdot D(-x) - e^{-2x} \cdot D(-2x)) = 80(e^{-x} \cdot (-1) - e^{-2x} \cdot (-2)) \\ &= 80(-e^{-x} + 2e^{-2x}). \end{aligned}$$

Derivaatta on nolla, kun $-e^{-x} + 2e^{-2x} = 0$, eli

$$\begin{aligned} & 2e^{-2x} = e^{-x} \quad | \cdot (e^{2x}) \\ \iff & 2 = e^x \\ \iff & x = \ln 2 \approx 0{,}693. \end{aligned}$$

Tutkitaan derivaatan merkkiä nollakohdan eri puolilla:

$$\begin{aligned} f'(0) &= 80(-e^0 + 2e^0) = 80(-1 + 2 \cdot 1) = 80 \cdot 1 = 80 > 0, \\ f'(1) &= 80(-e^{-1} + 2e^{-2 \cdot 1}) = 80(-e^{-1} + 2e^{-2}) \approx -7{,}78 < 0. \end{aligned}$$

Funktio on siis aidosti kasvava välillä $[0, \ln 2]$ ja aidosti vähenevä, kun $x \geq \ln 2$. Siispä kohdassa $x = \ln 2$ on maksimi ja maksimiarvo on

$$\begin{aligned} f(\ln 2) &= 80(e^{-\ln 2} - e^{-2\ln 2}) = 80(e^{\ln 1/2} - e^{\ln 1/4}) = 80\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \\ &= 80 \cdot \frac{1}{4} = 20. \end{aligned}$$

Lisäksi päätepisteessä $x = 0$ on minimikohta. Minimiarvo on

$$f(0) = 80(e^0 - e^{-2 \cdot 0}) = 80(1 - 1) = 0.$$

9. Koska sini- ja kosinifunktio ovat jaksollisia, jaksona 2π, niin

$$f(x + 2\pi) = \sin^2(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) = \sin^2 x + \cos x = f(x).$$

Siispä myös funktio f on jaksollinen eli se saa samat arvot aina 2π:n välein. Suurimman arvon määrittämiseksi voidaan siis rajoittua esimerkiksi välille

$[0, 2\pi]$, koska tämän jälkeen toistuvat taas samat arvot. Funktio on jatkuva koko tuolla välillä, joten tutkitaan funktion arvoja välin päätepisteissä sekä derivaatan nollakohdissa.

Derivoidaan funktio:

$$\begin{aligned} f'(x) &= D\sin^2 x + D\cos x = 2\sin x \cdot D\sin x - \sin x = 2\sin x\cos x - \sin x \\ &= \sin x(2\cos x - 1). \end{aligned}$$

Derivaatta on nolla tulon nollasäännön mukaan silloin, kun $\sin x = 0$ tai $2\cos x - 1 = 0$. Ensimmäinen tapaus toteutuu, kun $x = 0$ sekä aina π:n välein. Näistä kohdat $x = 0$, $x = \pi$ ja $x = 2\pi$ osuvat tarkasteluvälille. Toinen tapaus toteutuu, kun

$$2\cos x = 1 \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{3},$$

sekä aina 2π:n välein. Näistä kohdat $x = \pi/3$ ja $x = 5\pi/3$ osuvat tarkasteluvälille. Funktion arvot tarkasteltavissa pisteissä ovat

$$\begin{aligned} &f(0) = \sin^2 0 + \cos 0 = 0^2 + 1 = 1, \\ &f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin^2\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}, \\ &f(\pi) = \sin^2\pi + \cos\pi = 0^2 - 1 = -1, \\ &f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sin^2\frac{5\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3} = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}, \\ &f(2\pi) = f(0) = 1. \end{aligned}$$

Funktion f suurin arvo on siis $5/4$.

10. Koska sini- ja kosinifunktio ovat jaksollisia, jaksona 2π, niin

$$f(x + 2\pi) = \cos^2(x + 2\pi) + \sin(x + 2\pi) = \cos^2 x + \sin x = f(x).$$

Siispä myös funktio f on jaksollinen eli se saa samat arvot aina 2π:n välein. Suurimman arvon määrittämiseksi voidaan siis rajoittua esimerkiksi välille $[0, 2\pi]$, koska tämän jälkeen toistuvat taas samat arvot. Funktio on jatkuva koko tuolla välillä, joten tutkitaan funktion arvoja välin päätepisteissä sekä derivaatan nollakohdissa.

Derivoidaan funktio:

$$\begin{aligned} f'(x) &= D\cos^2 x + D\sin x = 2\cos x \cdot D\cos x + \cos x = 2\cos x(-\sin x) - \cos x \\ &= -\cos x(2\sin x - 1). \end{aligned}$$

Derivaatta on nolla tulon nollasäännön mukaan silloin, kun $\cos x = 0$ tai $2\sin x - 1 = 0$. Ensimmäinen tapaus toteutuu, kun $x = \pi/2$ sekä aina π:n välein. Näistä kohdat $x = \pi/2$ ja $x = 3\pi/2$ osuvat tarkasteluvälille. Toinen tapaus toteutuu, kun

$$2\sin x = 1 \iff \sin x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} \text{ tai } x = \frac{5\pi}{6},$$

sekä aina 2π:n välein. Näistä kohdata $x = \pi/6$ ja $x = 5\pi/6$ osuvat tarkasteluvälille. Funktion arvot tarkasteltavissa pisteissä ovat

$$\begin{aligned}
&f(0) = \cos^2 0 + \sin 0 = 1^2 + 0 = 1,\\
&f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4},\\
&f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 0^2 + 1 = 1,\\
&f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos^2\frac{5\pi}{6} + \sin\frac{5\pi}{6} = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4},\\
&f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos^2\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2} = 0^2 - 1 = -1,\\
&f(2\pi) = f(0) = 1.
\end{aligned}$$

Funktion f pienin arvo on siis -1.