

Y100 (Matematiikka I)

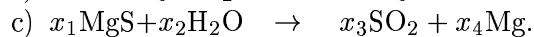
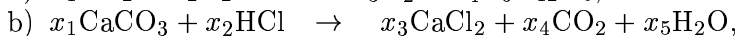
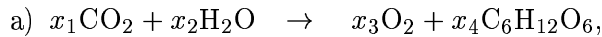
Harjoitus 6 (viimeinen harjoitus, 2 sivua)

10.–13.12.2007

1. Ratkaise yhtälöryhmät eliminointimenetelmällä matriisimuodossa:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y & 2x = -2 \\ & y - 2z = 4 \\ x - y & 3z = -2 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}.$$

2. Kemiallisessa reaktioyhtälössä täytyy molemmilla puolilla olla yhtä suuri määrä kunkin aineen atomeja. Seuraavista reaktioyhtälöistä puuttuvat kertoimet (tuntemattomat x_1, x_2 , jne.). Kirjoita yhtälöryhmät, jotka näiden kertoimien on toteutettava. Ratkaise sen jälkeen yhtälöryhmät eliminointimenetelmällä. Jos ratkaisuja tulee ääretön määrä, valitse mielestäsi reaktioyhtälöön parhaiten sopiva ratkaisu. Mitä tapahtuu, jos ratkaisu on yksikäsitteinen?



Neuvo. Esimerkiksi a)-kohdassa hiiliatomeja on vasemmalla puolella x_1 kpl ja oikealla puolella $6x_4$ kpl. Ne toteuttavat siis yhtälön $x_1 = 6x_4$, joka voidaan kirjoittaa myös muotoon $x_1 - 6x_4 = 0$. Samalla tavoin saadaan happiatomeja vastaava yhtälö $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 0$ ja vetyatomeja vastaava yhtälö $2x_2 - 12x_4 = 0$.

3. Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Laske seuraavista matriiseista ne, jotka on määritelty: $A + B$, $B - C$, BC , CB , CA , C^2 , $C(A + B)$.

4. Osoita kertolaskulla, että matriisit A ja B ovat toistensa kääntematriiseja, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 3 & -1 & -6 & -11 \\ 3 & -1 & -10 & -15 \\ -3 & 1 & 10 & 19 \end{bmatrix}.$$

Laske lisäksi matriisi ABA .

5. Etsi seuraavissa kohdissa annetun matriisin kääntematriisi tai osoita, että matriisi ei ole kääntyvä:

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{(b) } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

6. Mittalaitteeseen osuvan auringonpaisteen teho mitattiin kolmena ajanhetkenä: klo 13.00, klo 14.00 ja klo 15.00. Mittaus suoritettiin kolmena peräkkäisenä päivänä, ja tulokset näkyvät oheisessa taulukossa.

	13.00	14.00	15.00
1. päivä	31 W	30 W	27 W
2. päivä	30 W	30 W	28 W
3. päivä	30 W	29 W	28 W

Kunkin päivän tuloksiin halutaan nyt sovittaa paraabeli (vrt. luentomateriaalin esimerkkiin 5.9, yhteensä halutaan siis kolme eri paraabelia). Yksinkertaisuuden vuoksi käytetään x-koordinaatteina kellonaikoja 1, 2 ja 3, jolloin esimerkiksi ensimmäisen päivän kohdalla paraabelin tulisi kulkea pisteiden (1, 31), (2, 30) ja (3, 27) kautta.

Paraabelin yhtälön muoto on $y = ax^2 + bx + c$. Muodosta kutakin päivää vastaava yhtälöryhmä kertoimien a , b ja c ratkaisemiseksi ja kirjoita kukin yhtälöryhmä matriisiyhtälönä $AX = B$. Jokaisen päivän kohdalla kerroinmatriisi A on sama. Etsi kerroinmatriisin käänteismatriisi ja selvitä sen avulla kunkin paraabelin yhtälö.

7. Anna palautetta kurssista kurssisivulle ilmestyvällä palautelomakkeella. (Tämän tehtävän voit tehdä myös kokeen jälkeen, kunhan et unohda.)