Y100 (Matematiikka I)
Harjoitus 5 (2 sivua)
3.12.–6.12.2007

1. Näytä, että annettu funktio toteuttaa annetun differentiaaliyhtälön seuraavissa tapauksissa.

   a) Yhtälö: $y' = 2xy$ Funktio: $y(x) = e^{(x^2)}$

   b) Yhtälö: $x'''x''x' = 0$ Funktio: $x(t) = 5t^2 + 3t - 1$

   c) Yhtälö: $y'' - 2y' + 2y = 0$ Funktio: $y(t) = e^t \sin t$

2. Tutkitaan erään bakteeripopulaation aikakehitystä käyttämällä eksponentiaalisen kasvun mallia, aikayksikkönä vuorokausi. Alussa populaation massa oli noin 1 mg. Bakteerien lisääntymiskykyä kuvaavan verrannollisuuskertoimen arvoksi oli aiemmissa tutkimuksissa arvioitu 1,5.
   a) Laske ennuste viikon kuluttua havaittavalle bakteerimäärälle.
   b) Viikon kuluttua populaation massaksi mitattiin 20 g (eli 20000 mg). Mitä vikaa havainnossa näyttää olevan? Korjautuuko tilanne, jos otetaan huomioon, että kasvatusalusta voi kantaa korkeintaan 50 g bakteerimassaa ja käytetään logistisen kasvun mallia?

3. Tunnista seuraavista separoituvat yhtälöt. Muunna ne separoituun muotoon ($g(y)y' = h(x)$) ja ratkaise niistä yksi.

   a) $\sqrt{y} \cdot y' = 3x + 2$, b) $y' = y + 1$, c) $y' = y + x$,

   d) $y'x = y' + y$, e) $2xy' = 2xy - 1$.

4. Ratkaise seuraavat alkuarvotehtävät. (Muista ottaa huomioon erillisratkaisut.)

   a) $y'' = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$

   b) $\dfrac{y'}{x} = \dfrac{3x}{y}, \quad y(1) = 2, \quad (\text{olet. } x > 0),$

   b) $y' = (2x + 1)y, \quad y(10) = 0.$

5. Säiliöön virtaa ainetta, joka ei pääse säiliöstä ulos. Merkitään ajanhetkellä t säiliössä olevan aineen määrää $T(t)$. Alussa (kun $t = 0$) säiliössä oli ainetta 5 litraa. Virtausnopeus $s(t)$ on verrannollinen säiliössä olevan aineen määrään siten, että $s(t) = k(t)T(t)$, missä verrannollisuuskerroin k noudattaa funktiota $k(t) = e^{-t}$. Muodosta tilannetta kuvaava differentiaaliyhtälö ja piirrä sopiva virtauskaavio. Ratkaise saamasi yhtälö separoimalla. Kun tiedetään, että $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$, niin mitä voidaan päätellä säiliöön kertyvän aineen määrästä?

6. Radioaktiivisen aineen hajoamisnopeus on kullakin ajanhetkellä suoraan verrannollinen jäljellä olevan aineen määrään. Merkitään aineen määrää $m(t)$. Alussa ainetta oli 100 kg, ja vuoden päästä enää 50 kg (toisin sanoen aineen *puoliintumisaika* on vuosi).
   a) Muodosta tilannetta kuvaava differentiaaliyhtälö ja selvitä sen ratkaisu.
   b) Käytä hyväksi alkuehtoa $m(0) = 100$ selvittääksesi integroimisvakion arvon. Käytä sitten hyväksi tietoa $m(1) = 50$ ja ratkaise sen avulla verrannollisuuskertoimen arvo. Kyseisen kertoimen likiarvoksi pitäisi tulla noin $-0{,}693$.
   c) Tulkitse tilanne virtausmalliksi, jossa ainetta poistuu säiliöstä, ja piirrä tilannetta kuvaava virtauskaavio.