Y100 (Matematiikka 1)
Harjoitus 3 (2 sivua)
19.–22.11.2007

1. Maatalon emäntä aikoo leipoa miehensä kasvattamien kanojen munista neliöpohjaisen täytekakun. Kakun reunat ja päällinen katetaan kermalla. Emännän kerma riittää 1200 cm^2 kokoiselle pinnalle. Miten paksu emännän on tehtävä kakusta, jotta kerma riittäisi mutta kakusta tulisi tilavuudeltaan mahdollisimman kookas?

   Neuvo: Valitse muuttujaksi x kakun pohjan leveys, jolloin kakun sivun pinta-ala on $x\cdot$"kakun korkeus". Päättele käytettävissä olevan kerman määrän avulla, miten paljon kermaa riittää kullekin sivulle, sekä tämän perusteella, miten tavoin kakun paksuus riippuu x:stä. Tilavuuden funktio on tietysti $x^2\cdot$"kakun paksuus", josta pitäisi tulla $V(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 300x$.

2. Säiliöön virtaa ainetta nopeudella a ja siitä virtaa pois samaa ainetta nopeudella b. Tulevan virtauksen nopeus on kullakin ajanhetkellä kääntäen verrannollinen säiliössä olevan aineen määrään (eli $a(t) = k_1 \cdot \frac{1}{\text{“aineen määrä”}}$); lähtevän virtauksen nopeus taas on kullakin ajanhetkellä suoraan verrannollinen säiliössä olevan aineen määrään. Lisäksi tulevan virtauksen takaisinkytkennän verrannollisuuskerroin k_1 on kaksi kertaa niin suuri kuin lähtevän.

   Piirrä tilanteesta virtauskaavio ja kirjoita tilannetta kuvaava yhtälö, jossa esiintyy aineen määrää kuvaava (tuntematon) funktio sekä tämän derivaatta.

3. Olkoon $f(x) = x^2$. Laske funktion f ylä- ja alasummat välillä $[0, 2]$, kun osavälejä on neljä eli kunkin osavälin pituus on $1/2$. Piirrä myös funktion kuvaaja sekä kuvaajaa ylä- ja alapuolelta approksimoivat suorakulmiot. Laske sitten integraali $\int_0^2 f(x)\,dx$ tarkasti ja vertaa saamiasi tuloksia.

osaväli	suurin arvo	yläsuorak. ala	pienin arvo	alasuorak. ala
$[0, 1/2]$				
$[1/2, 1]$				
$[1, 3/2]$				
$[3/2, 2]$				
yhteensä	—		—	

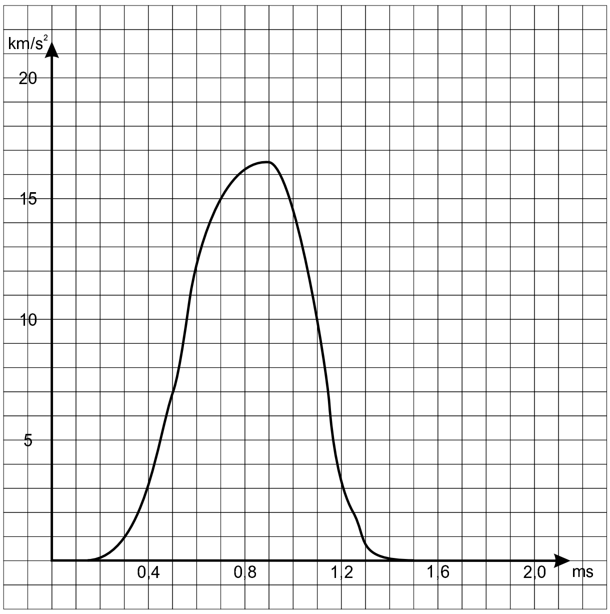
4. Laske seuraavat integraalit.

$$\text{a)}\quad \int_{-1}^{1} 6x^2 - 2x + 1\,dx, \quad \text{b)}\quad \int_1^2 x^2 - \frac{1}{x^2}\,dx, \quad \text{c)}\quad \int_0^1 t + \sqrt{t}\,dt,$$

$$\text{d)}\quad \int_0^5 f(x)\,dx, \quad \text{missä} \quad f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{kun } x \geq 1, \\ x/4, & \text{kun } x < 1 \end{cases}.$$

5. Fysiikassa kappaleen liikuttamiseen käytettävä voima on suorassa suhteessa kappaleen kokemaan kiihtyvyyteen. Verrannollisuuskertoimena on kappaleen massa. Kiihtyvyys puolestaan kuvaa nopeuden muutosta.

   Biljardipalloon kiinnitettiin voima-anturi, minkä jälkeen palloa lyötiin. Voima-anturin lukemista laskettiin kiihtyvyys kullakin ajanhetkellä jakamalla voima pallon massalla. Näin saatiin alla oleva pallon kiihtyvyyden kuvaaja. Määritä tuosta kuvaajasta integroimalla pallon saama nopeus, eli kuinka paljon nopeutta kertyi sinä aikana, jonka lyönti kesti. (Yhden ruudun pinta-ala on $0{,}1 \cdot 1 = 0{,}1$, yksikkönä m/s.)



6. Osoita derivoimalla yhdistetyn funktion derivointisäännöllä, että funktio $F(x) = (x^2 - 1)^8$ on funktion $f(x) = 16x(x^2 - 1)^7$ integraalifunktio. Laske lisäksi integraali

$$\int_0^1 16x(x^2 - 1)^7 \, dx.$$

   Keksi jokin integraalifunktio funktiolle $g(x) = 3x(x^2 - 1)^7$.