

Y100 (Matematiikka 1)
Harjoitus 2 (2 sivua)
12.-15.11.2007

1. Laske funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$ keskimääräinen muutosnopeus väleillä $[1, 2]$ ja $[0, 1]$ sijoittamalla välien päätepisteet erotusosamäärän lausekkeeseen. Laske myös erotusosamäärän yleinen lauseke pisteessä 1 (siis $x = 1$) merkitsemällä välin pituutta h :lla. Totea sijoittamalla näin saatuun lausekkeeseen arvot $h = 1$ ja $h = -1$, että saat samat tulokset kuin edellä. Laske lopuksi erotusosamäärän raja-arvo, kun h lähestyy nollaa.

2. Derivoi seuraavat funktiot. Millä muuttujan arvoilla funktiot ovat derivoituvia?

a) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + x - 100$, b) $g(x) = 2x^3 - \frac{1}{x+1}$,
c) $h(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x-1}$, d) $k(x) = \frac{1}{x} + 6\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$.

Kohdassa d) kannattaa muuttaa ensin kaikki termit potenssimuotoon.

3. Tulkitse seuraavat funktiot yhdistetyiksi funktioiksi. Mikä on sisäfunktio, mikä ulkofunktio? (Tulkinnan voi mahdollisesti tehdä monella eri tavalla.) Derivoi sitten funktiot yhdistetyn funktion derivoimissäännöllä.

a) $h_1(x) = (-2x^3 + 5x)^7$, b) $h_2(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, c) $h_3(x) = \frac{1}{(x+1)^5}$.

4. Oheisessa kuvassa (toisella sivulla) on mehiläisen lentämän matkan kuvaaja ajan funktiona. Määritä kuvaajan perusteella likimääräisesti

- keskinopeus aikavälillä $[4, 8]$,
- hetkellinen nopeus ajanhetkellä $t = 6$ piirtämällä kuvaajalle sivuaaja kyseiseen kohtaan ja määrittämällä sen kulmakerroin.

5. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x}.$$

Derivoi funktio. (Tulos on $f'(x) = (x^2 - 3)/x^2$.) Selvitä derivaatan etumerkin avulla, missä funktio on kasvava, missä vähenevä, ja missä pisteissä funktiolla on ääriarvoja.

6. Maanviljelijä on ostanut siemeniä, jotka riittävät pinta-alaltaan 20000 m²:n suorakulmaisen pellon kylvämiseen. Pelto kylvetään metsän reunaan ja ympäröidään muilta kolmelta sivulta aidalla. Miten pitkät on tehtävä pellon sivuista, jotta aidasta tulisi mahdollisimman lyhyt?

