Y100 (Matematiikka 1)
Kurssikoe 18.12.2006
Ratkaisuehdotus, 7 sivua

Tehtävissä 3 ja 4 oli ratkaistava *joko* (a)- *tai* (b)-kohta.

1. Tutki derivaatan avulla rationaalifunktion

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x}$$

kulkua. Missä funktio on kasvava, missä vähenevä? Missä sillä on lokaaleja ääriarvoja?

Ratkaisu. Funktio f on määritelty kaikkialla muualla paitsi pisteessä 0. Se on derivoituva koko määrittelyjoukossaan, ja sen derivaatta on osamäärän derivoimissäännön mukaan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{D(x^2+4)\cdot x - (x^2+4)\cdot Dx}{x^2} = \frac{2x\cdot x - (x^2+4)\cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - x^2 - 4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}. \end{aligned}$$

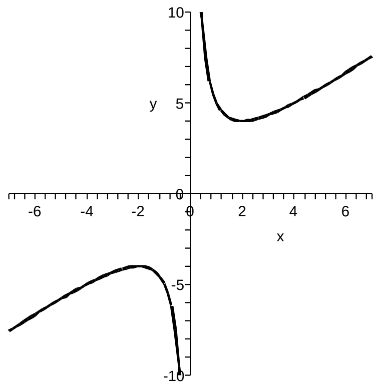
Funktion kulun selvittämiseksi on määritettävä derivaatan etumerkki. Derivaatta on jatkuva määrittelyjoukossaan, joten se voi vaihtaa etumerkkiä vain nollakohdissa tai pisteissä, joissa se ei ole määritelty. Derivaatta on murtolauseke, joten se on nolla täsmälleen silloin kun sen osoittaja on nolla (mikäli se on määritelty kyseisessä pisteessä). Saadaan siis

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff x^2 - 4 = 0 \\ &\iff x^2 = 4 \\ &\iff x = \pm 2. \end{aligned}$$

Derivaatta ei ole määritelty, kun $x = 0$. Tutkitaan siis etumerkki väleillä $]\infty, -2[$, $]-2, 0[$, $]0, 2[$ ja $]2, \infty[$ sijoittamalla esimerkiksi luvut -3, -1, 1 ja 3 derivaatan lausekkeeseen ja muodostetaan etumerkeistä merkkikaavio:

	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Merkkikaaviosta nähdään, että funktio f on kasvava väleillä $]\infty, -2]$ ja $[2, \infty[$ sekä vähenevä väleillä $[-2, 0[$ ja $]0, 2]$. Kohdassa $x = -2$ funktiolla on lokaali maksimi ja kohdassa $x = 2$ sillä on lokaali minimi.



2. Laske seuraavat integraalit:

$$\int_{-1}^{1} (x-2)^2\,dx, \qquad \int_{1}^{4} \frac{1}{t}\,dt.$$

Ratkaisu. Kerrotaan ensin sulut auki: $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$, jolloin

$$\int_{-1}^{1} (x-2)^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 - 4x + 4\,dx = \Big/_{\!\!-1}^{1} \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\right)$$
$$= \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 + 4\cdot 1\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - 2\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1)\right)$$
$$= \left(\frac{1}{3} - 2 + 4\right) - \left(-\frac{1}{3} - 2 - 4\right) = \left(2 + \frac{1}{3}\right) - \left(-6 - \frac{1}{3}\right)$$
$$= 8\frac{2}{3} = \frac{26}{3}.$$

Toinen integraali on

$$\int_{1}^{4} \frac{1}{t}\,dt = \Big/_{\!\!1}^{4} \ln t = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4 - 0 = \ln 4 \approx 1{,}39.$$

3. a) Laske funktion $f(x) = \sin x$ kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala välillä $[0, 5]$. (Etsi ensin sinin nollakohdat kyseisellä välillä.)

Ratkaisu. Integraali antaa funktion kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän pinta-alan positiivisena tai negatiivisena, riippuen siitä, kulkeeko kuvaaja x-akselin ylä- vai alapuolella. Jos halutaan tietää aito pinta-ala, on integraali laskettava erikseen niillä väleillä, joilla funktio on positiivinen ja niillä, joilla se on negatiivinen.

Sinifunktio on jatkuva, joten se voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan. Sinifunktiolle pätee $\sin 0 = 0$. Lisäksi nollakohdat toistuvat π:n välein. (Huomaa, että kulmanyksikkönä käytetään radiaaneja, koska vain tällöin pätevät derivointisäännöt $D\sin x = \cos x$ ja $D\cos x = -\sin x$.) Välille $[0,5]$ osuu siis kaksi nollakohtaa: 0 ja π (sillä $2\pi \approx 6{,}3 > 5$). Lasketaan integraali erikseen väleillä $[0,\pi]$ ja $[\pi,5]$:

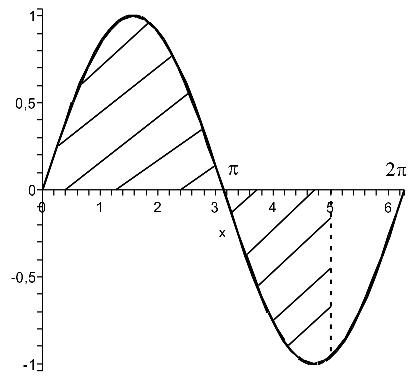
$$\int_0^\pi \sin x\,dx = \Big/_{\!0}^{\,\pi} - \cos x = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2,$$

ja

$$\int_\pi^5 \sin x\,dx = \Big/_{\!\pi}^{\,5} - \cos x = -\cos 5 - (-\cos\pi) = -\cos 5 - 1 \approx -1{,}28.$$

Jotta saadaan todellinen pinta-ala, täytyy negatiivinen integraali muuttaa positiiviseksi ja laskea sitten integraalit yhteen:

$$A = 2 + (\cos 5 + 1) = 3 + \cos 5 \approx 3{,}28.$$



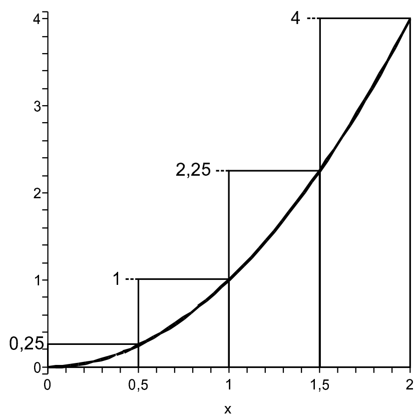
3. b) Arvioi integraalia $\int_0^1 x^2\,dx$ laskemalla funktion $f(x) = x^2$ yläsumma välillä $[0,2]$, kun jakovälejä on 4 (eli jakovälin pituus on $1/2$).

Ratkaisu. Tässä tehtävässä oli kirjoitusvirhe. Tarkoitus oli arvioida integraalia $\int_0^2 x^2\,dx$, siis integroimisvälinä $[0,2]$, ei $[0,1]$. Tämä ei kuitenkaan varsinaisesti muuta tehtävää. Lasketaan vain yläsumma välillä $[0,2]$, niin kuin tehtävässä pyydetään.

Yläsumman laskemiseksi jaetaan väli $[0,2]$ ensin neljään osaan: $[0,\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2},1]$, $[1,\frac{3}{2}]$ ja $[\frac{3}{2},2]$. Tämän jälkeen etsitään jokaisella välillä funktion suurin arvo. Koska f on kasvava välillä $[0,2]$, suurin arvo löytyy aina välin oikeanpuoleisesta päätepisteestä. Suurin arvo kerrotaan sitten osavälin pituudella (joka on $1/2$), jolloin saadaan kyseisellä osavälillä kuvaajan alle jäävää aluetta approksimoivan suorakulmion pinta-ala. Lopuksi näin saadut arvot lasketaan yhteen. Tulokset voidaan koota taulukkoon.

osaväli	suurin arvo	pinta-ala
$[0, 1/2]$	$(1/2)^2 = 1/4$	$1/8 = 0{,}125$
$[1/2, 1]$	$1^2 = 1$	$1/2 = 0{,}5$
$[1, 3/2]$	$(3/2)^2 = 9/4$	$9/8 = 1{,}125$
$[3/2, 2]$	$2^2 = 4$	2
	yhteensä	$15/4 = 3{,}75$

Integraalin $\int_0^2 x^2\,dx$ arvio (yläkanttiin) on kyseinen yläsumma eli 3,75. (Integraalin tarkka arvo on $8/3 \approx 2{,}67$.) Tehtävässä pyydettiin kuitenkin arvioimaan integraalia $\int_0^1 x^2\,dx$. Lasketaan siis yläsumma vain välillä $[0, 1]$ eli otetaan aiemmasta taulukosta vain kaksi ensimmäistä riviä ja lasketaan pinta-alat yhteen. Tällöin saadaan yläsummaksi $5/8 = 0{,}625$. (Integraalin tarkka arvo on $1/3 \approx 0{,}33$.)



4. a) Ratkaise seuraava alkuarvotehtävä:

$$x''(t) = 2t, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = -1.$$

Ratkaisu. Ratkaistaan tuntematon funktio x integroimalla kaksi kertaa. Ensinnäkin tiedetään, että x' on funktion x'' integraalifunktio, joten

$$x'(t) = \int x''(t)\,dt + C = \int 2t\,dt + C = t^2 + C,$$

missä C on integroimisvakio. Toisesta alkuarvoehdosta nähdään nyt, että täytyy päteä

$$x'(0) = 0^2 + C = -1,$$

joten täytyy olla $C = -1$. Siispä $x'(t) = t^2 - 1$. Toisaalta x on funktion x' integraalifunktio, joten

$$x(t) = \int x'(t)\,dt + D = \int t^2 - 1\,dt + D = \frac{1}{3}t^3 - t + D,$$

missä D on toinen integroimisvakio. Ensimmäisen alkuarvoehdon mukaan

$$x(0) = \frac{1}{3}0^3 - 0 + D = 1,$$

joten $D = 1$. Siispä etsitty funktio on

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t + 1.$$

4. b) Radioaktiivisessa hajoamisessa hajoamisen nopeus on koko ajan suoraan verrannollinen jäljellä olevan aineen määrään. Erästä ainetta oli alussa 300 kg, mutta vuoden kuluttua siitä oli jäljellä enää kolmannes. Ratkaise funktio, joka kuvaa aineen määrää kullakin ajanhetkellä.

Ratkaisu. Kyseessä on eksponentiaalinen kasvu, tai tässä tapauksessa oikeastaan väheneminen. Merkitään ajanhetkellä t jäljellä olevan aineen määrää $m(t)$. Koska määrän muutosnopeus on suoraan verrannollinen määrään ja alussa ainetta oli 300 kg, saadaan seuraavanlainen alkuarvotehtävä:

$$m'(t) = km(t), \qquad m(0) = 300.$$

Tässä k on tuntematon verrannollisuuskerroin. Koska aineen määrä $m(t)$ on aina positiivinen, voidaan differentiaaliyhtälö jakaa sillä puolittain, jolloin saadaan separoituva yhtälö:

$$\frac{m'}{m} = k.$$

Funktion $g(m) = 1/m$ integraalifunktio on $G(m) = \ln|m|$, ja funktion $h(t) = k$ (vakio) integraalifunktio on $H(t) = kt$. Separoituvan yhtälön ratkaisumenetelmän mukaan ratkaisu on siis $\ln|m| = kt+C$, missä C on integroimisvakio. Koska $m > 0$, voidaan itseisarvot jättää pois ja ratkaista m:

$$\begin{aligned} &\ln m = kt + C \\ \iff\ & m = e^{kt+C} = e^{kt}\cdot e^C \\ \iff\ & m(t) = m_0 e^{kt}. \end{aligned}$$

Tässä on merkitty $m_0 = e^C$.

Alkuarvoehdon mukaan

$$m(0) = m_0 e^{k\cdot 0} = m_0 \cdot 1 = 300,$$

joten $m_0 = 300$ ja $m(t) = 300e^{kt}$. Lisäksi vuoden kuluttua ainetta on jäljellä enää 100 kg, joten voidaan päätellä

$$\begin{aligned} m(1) &= 100 \\ 300e^{k\cdot 1} &= 100 \\ e^k &= \frac{1}{3} \\ k &= \ln\frac{1}{3} = -\ln 3 \approx -1{,}10. \end{aligned}$$

Aineen määrää kuvaa siis funktio

$$m(t) = 300e^{-\ln 3\cdot t} = 300e^{-1{,}10t},$$

missä t on aika vuosina.

5 Eräs matriisi A ja sen käänteismatriisi A^{-1} ovat

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ratkaise seuraavat kaksi yhtälöryhmää:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 1 \\ 2x & +3y & & = & 1 \\ 3x & +4y & +2z & = & 1 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & -2 \\ 2x & +3y & & = & 0 \\ 3x & +4y & +2z & = & 3 \end{array}\right..$$

Ratkaisu. Ratkaistavat yhtälöryhmät voidaan kirjoittaa muodossa $AX = B_1$ ja $AX = B_2$, missä A on tehtävässä annettu matriisi sekä

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Koska kerroinmatriisi A on kääntyvä, on ensimmäisen matriisiyhtälön ratkaisu $X = A^{-1}B_1$, eli

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\cdot 1 + 2\cdot 1 - 3\cdot 1 \\ -4\cdot 1 - 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ -1\cdot 1 - 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Toisin sanoen $x = 5$, $y = -3$ ja $z = -1$.

Toisen yhtälöryhmän ratkaisu on vastaavasti $X = A^{-1}B_2$, eli

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\cdot(-2) + 2\cdot 0 - 3\cdot 3 \\ -4\cdot(-2) - 1\cdot 0 + 2\cdot 3 \\ -1\cdot(-2) - 1\cdot 0 + 1\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ 14 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Saatiin $x = -21$, $y = 14$ ja $z = 1$.

Tehtävän yhtälöryhmät voi tietysti ratkaista myös eliminoimalla. Ensimmäisen yhtälöryhmän tapauksessa saataisiin tällöin

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & | \cdot (-2) \quad | \cdot (-3) \\ 2x + 3y = 1 & | \leftarrow \quad | \\ 3x + 4y + 2z = 1 & \quad\quad | \leftarrow \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 1 & | \leftarrow \\ y - 2z = -1 & | \cdot (-1) \quad | \cdot (-1) \\ y - z = -2 & \quad\quad | \leftarrow \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 3z = 2 & | \leftarrow \\ y - 2z = -1 & | \quad\quad | \leftarrow \\ z = -1 & | \cdot (-3) \quad | \cdot 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \\ z = -1 \end{cases} .$$

Toinen yhtälöryhmä ratkeaa aivan samalla tavalla.