Y100 (Matematiikka 1)
Yhteiskuulustelu 4.4.2007
Ratkaisuehdotus, 6 sivua

Tehtävissä 3 ja 5 oli ratkaistava *joko* (a)- *tai* (b)-kohta.

1. Tutki funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^4 + 4x^3$ kulkua derivaatan avulla. Missä funktio on kasvava, missä vähenevä? Missä funktiolla on paikallisia maksimeja tai minimejä?

   Ratkaisu. Polynomifunktio f on kaikkialla jatkuva ja derivoituva. Funktion derivaatta kuvaa sen kulkua. Derivoidaan funktio:

   $$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 + 4 \cdot 3x^2 = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1).$$

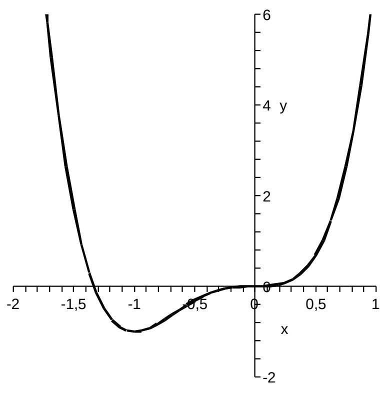
   Derivaatan nollakohdat ovat tulon nollasäännön mukaan $x = 0$ ja $x = -1$. Koska derivaatta on jatkuva, se voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan. Lasketaan muutamia derivaatan arvoja ja piirretään niiden mukaan merkkikaavio.

   $$\begin{aligned} f'(-2) &= 12(-2)^2(-2+1) = -48 < 0, \\ f'(-1/2) &= 12(-1/2)^2(-1/2+1) = 3/2 > 0, \\ f'(1) &= 12 \cdot 1^2(1+1) = 24 > 0. \end{aligned}$$

   Funktio on vähenevä siellä, missä derivaatta on negatiivinen, ja kasvava siellä, missä derivaatta on positiivinen.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

   Kaaviosta voidaan päätellä, että funktio on vähenevä, kun $x \leq -1$, ja kasvava, kun $x \geq -1$. Funktiolla on siis paikallinen minimi kohdassa $x = -1$, ja muita ääriarvokohtia ei ole.



2. Laske seuraavat integraalit:

$$\int_{-1}^{2} -3x^2 + x\,dx, \qquad \int_{-1}^{1} |x^3|\,dx, \qquad \int_{0}^{1} t\sqrt{t}\,dt.$$

Ratkaisu. Ensimmäisessä integraalissa on tavallinen polynomi:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} -3x^2 + x\,dx &= \Big/_{\!-1}^{2} \left(-3 \cdot \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) = \Big/_{\!-1}^{2} \left(-x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) \\ &= \left(-2^3 + \frac{1}{2} \cdot 2^2\right) - \left(-(-1)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2\right) \\ &= -8 + 2 - 1 - \frac{1}{2} = -\frac{15}{2}.\end{aligned}$$

Toinen integraali voidaan laskea kahdessa osassa, jotta ei tarvitse miettiä, mikä olisi itseisarvofunktion integraalifunktio. Kun $x < 0$, niin $|x^3| = -x^3$, muuten $|x^3| = x^3$. Täten saadaan

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} |x^3|\,dx &= \int_{-1}^{0} -x^3\,dx + \int_{0}^{1} x^3\,dx = \Big/_{\!-1}^{0} -\frac{1}{4}x^4 + \Big/_{\!0}^{1} \frac{1}{4}x^4 \\ &= \left(0 + \frac{1}{4} \cdot (-1)^4\right) + \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 - 0\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Kolmas integroitava kannattaa ensin muuttaa potenssimuotoon: $t\sqrt{t} = t^1 \cdot t^{1/2} = t^{3/2}$. Näin saadaan helposti

$$\int_{0}^{1} t\sqrt{t}\,dt = \int_{0}^{1} t^{3/2}\,dt = \Big/_{\!0}^{1} \frac{2}{5}t^{5/2} = \frac{2}{5} \cdot 1^{5/2} - 0 = \frac{2}{5}.$$

3. a) Määritä funktion $f(x) = \cos x$ kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[0, 3\pi/2]$. (Muista radiaanit.)

Ratkaisu. Integraali antaa funktion kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän pinta-alan positiivisena tai negatiivisena, riippuen siitä, kulkeeko kuvaaja x-akselin ylä- vai alapuolella. Jos halutaan tietää aito pinta-ala, on integraali laskettava erikseen niillä väleillä, joilla funktio on positiivinen, ja niillä, joilla se on negatiivinen.

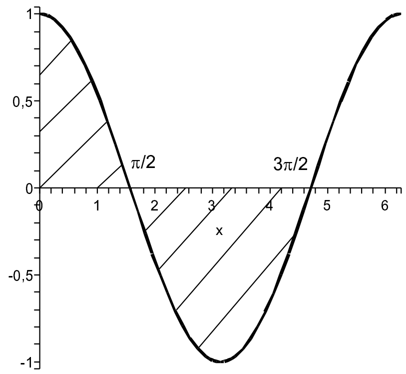
Kosinifunktio on jatkuva, joten se voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan. Kosinifunktiolle pätee $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Lisäksi nollakohdat toistuvat π:n välein. Välille $[0, 3\pi/2]$ osuu siis kaksi nollakohtaa: $\pi/2$ ja $3\pi/2$. Lasketaan integraali erikseen väleillä $[0, \pi/2]$ ja $[\pi/2, 3\pi/2]$:

$$\int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx = \Big/_{\!0}^{\pi/2} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1,$$

ja

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x \, dx = \Big/_{\!\!\pi/2}^{3\pi/2} \sin x = \sin \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} = -1 - 1 = -2.$$

Jotta saadaan todellinen pinta-ala, täytyy negatiivinen integraali muuttaa positiiviseksi ja laskea sitten integraalit yhteen. Näin saadaan alaksi $1 + 2 = 3$.



3. b) Määritä vakion k arvot, joilla funktio $y(t) = e^{kt}$ toteuttaa toisen asteen differentiaaliyhtälön

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Derivoidaan ensin annettu ratkaisufunktio y:

$$y'(t) = e^{kt} \cdot D(kt) = ke^{kt},$$
$$y''(t) = k \cdot D\, e^{kt} = k \cdot y'(t) = k^2 e^{kt}.$$

Sijoitetaan nyt nämä derivaatat toteutettavaan differentiaaliyhtälöön ja ratkaistaan k:

$$k^2 e^{kt} - ke^{kt} - 2 \cdot e^{kt} = 0$$
$$(k^2 - k - 2)e^{kt} = 0 \quad | : e^{kt} \ (\neq 0)$$
$$k^2 - k - 2 = 0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa antaa

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}.$$

Ratkaisuiksi saadaan $k = 2$ tai $k = -1$.

4. Viljelijän harmiksi eräänä satokautena koloradonkuoriaispariskunta (Leptinotarsa decemlineata) pääsi pesiytymään perunapeltoon. Suotuisissa oloissa kuoriaisten lisääntymisnopeus oli joka hetki suoraan verrannollinen niiden lukumäärään. Neljän kuukauden jakson jälkeen kuoriaisia oli jo 20000. Ratkaise kuoriaisten määrä ajan funktiona.

Ratkaisu. Merkitään kuoriaisten määrää ajan funktiona $m(t)$. Tällöin lisääntymisnopeus on funktion derivaatta $m'(t)$. Koska lisääntymisnopeus on joka hetki suoraan verrannollinen kuoriaisten lukumäärään, saadaan differentiaaliyhtälö

$$m'(t) = km(t),$$

missä k on tuntematon vakio (verrannollisuuskerroin). Koska lukumäärä $m(t)$ on tehtävässä aina positiivinen, saadaan yhtälö separoituvaan muotoon jakamalla se $m(t)$:llä:

$$\frac{m'(t)}{m(t)} = k.$$

Ratkaistaan saatu separoituva yhtälö. Vasemman puolen eräs integraalifunktio on

$$\int \frac{1}{m(t)} m'(t)\,dt = \int \frac{1}{m(t)}\,dm = \ln|m(t)|.$$

Koska määrä on aina positiivinen, itseisarvomerkit voidaan unohtaa. Vastaavasti oikean puolen eräs integraalifunktio on kt. Täten saadaan

$$\begin{aligned} & \ln m(t) = kt + C \\ \Longleftrightarrow\ & m(t) = e^{kt+C} \\ \Longleftrightarrow\ & m(t) = e^{kt}e^{C} \\ \Longleftrightarrow\ & m(t) = m_0 e^{kt}. \end{aligned}$$

Tässä on merkitty $m_0 = e^C$, C on integroimisvakio.

Alussa kuoriaisia oli kaksi kappaletta, joten

$$m(0) = m_0 e^{k\cdot 0} = m_0 \cdot 1 = 2.$$

Siispä $m_0 = 2$. Toisaalta neljän kuukauden kuluttua määrä oli 20000, joten

$$\begin{aligned} & m(4) = 2e^{k\cdot 4} = 20000 \quad | : 2 \\ \Longleftrightarrow\ & e^{k\cdot 4} = 10000 \\ \Longleftrightarrow\ & k \cdot 4 = \ln 10000 \\ \Longleftrightarrow\ & k = \frac{1}{4}\ln 10000 \approx 2{,}303. \end{aligned}$$

Kuoriaisten määrää kuvaa siis funktio

$$m(t) = 2e^{2{,}3t}.$$

5. a) Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Osoita, että matriisi B on matriisin A käänteismatriisi, ja ratkaise yhtälöryhmä $AX = C$.

Ratkaisu. Matriisi B on matriisin A käänteismatriisi, jos $AB = \mathbf{I}_3$, missä $\mathbf{I}_3$ on yksikkömatriisi. Tarkistetaan tämä:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 6 + 1 \cdot (-4) + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-4) + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 6 + 4 \cdot (-4) + 2 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) & 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3. \end{aligned}$$

Yllä nähtiin, että B tosiaan on A:n käänteismatriisi eli $B = A^{-1}$. Tällöin yhtälöryhmällä $AX = C$ on täsmälleen yksi ratkaisu, ja se on

$$X = A^{-1}C = BC = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \\ -4 \cdot 3 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ -1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -9 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

5. b) Etsi seuraavien yhtälöryhmien ratkaisut, jos niitä on olemassa:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x & +y & +2z & = & -2 \\ & y & -2z & = & 4 \\ x & -y & +3z & = & 3 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & +y & +4z & = & -2 \\ -x & +y & -2z & = & 4 \\ 2x & -y & +5z & = & 0 \end{array} \right. .$$

Käytetään ratkaisussa eliminointimenetelmää:

$$\begin{cases} 2x & +y & +2z & = & -2 & |:2 \\ & y & -2z & = & 4 \\ x & -y & +3z & = & 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & +\frac{1}{2}y & +z & = & -1 & |\cdot(-1) \\ & y & -2z & = & 4 & | \\ x & -y & +3z & = & 3 & |\leftarrow \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & +\frac{1}{2}y & +z & = & -1 & |\leftarrow \\ & y & -2z & = & 4 & |\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & |\cdot\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{2}y & +2z & = & 4 & & |\leftarrow \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & & +2z & = & -3 \\ & y & -2z & = & 4 \\ & & -z & = & 10 & |:(-1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & & +2z & = & -3 & |\leftarrow \\ & y & -2z & = & 4 & | & |\leftarrow \\ & & z & = & -10 & |\cdot(-2) & |\cdot 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & & & = & 17 \\ & y & & = & -16 \\ & & z & = & -10 \end{cases}.$$

Ratkaisu on siis $x = 17$, $y = -16$ ja $z = -10$.

Toisesta yhtälöryhmästä saadaan

$$\begin{cases} x & +y & +4z & = & -2 & |\cdot 1 & |\cdot(-2) \\ -x & +y & -2z & = & 4 & |\leftarrow & | \\ 2x & -y & +5z & = & 0 & & |\leftarrow \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & +y & +4z & = & -2 \\ & 2y & +2z & = & 2 & |:2 \\ & -3y & -3z & = & 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & +y & +4z & = & -2 & |\leftarrow \\ & y & +z & = & 1 & |\cdot(-1) & |\cdot 3 \\ & -3y & -3z & = & 4 & & |\leftarrow \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & & +3z & = & -3 \\ & y & +z & = & 1 \\ & & 0 & = & 7 \end{cases}.$$

Koska viimeiselle riville tuli epätosi yhtälö $0 = 7$, ei yhtälöryhmällä ole ratkaisua.