Y100 (Matematiikka 1)
Yhteiskuulustelu 21.2.2007
Ratkaisuehdotus, 6 sivua

Tehtävissä 3 ja 5 oli ratkaistava *joko* (a)- *tai* (b)-kohta.

1. Derivoi seuraavat lausekkeet:

$$2x^3 + 5x(x-1) + 3, \qquad \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}, \qquad \ln(\sin x).$$

Ratkaisu. Ensimmäinen lauseke on polynomi:

$$\begin{aligned} D(2x^3 + 5x(x-1) + 3) &= D(2x^3 + 5x^2 - 5x + 3) \\ &= 2 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 2x - 5 \cdot 1 + 0 \\ &= 6x^2 + 10x - 5. \end{aligned}$$

Toinen lauseke on helpointa muuttaa potenssimuotoon:

$$\begin{aligned} D\left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right) &= D(2x^{-2} + x^{-1}) \\ &= D(2 \cdot (-2)x^{-3} + (-1)x^{-2}) \\ &= -4x^{-3} - x^{-2} = -\frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Myös osamäärän derivointisääntö toimii:

$$\begin{aligned} D\left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right) &= \frac{D\,2 \cdot x^2 - 2 \cdot Dx^2}{(x^2)^2} + \frac{D\,1 \cdot x - 1 \cdot Dx}{x^2} \\ &= \frac{0 \cdot x^2 - 2 \cdot 2x}{x^4} + \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{4x}{x^4} - \frac{1}{x^2} \\ &= -\frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Viimeisenä on yhdistetyn funktion lauseke. Ulkofunktiona on logaritmi $f(x) = \ln x$, jonka derivaatta on $f'(x) = 1/x$. Sisäfunktio on $g(x) = \sin x$, jonka derivaatta puolestaan on $g'(x) = \cos x$. Yhdistetyn funktion derivointisäännön mukaan saadaan

$$D \ln(\sin x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

2. Veden virtausnopeus putkessa noudatti aikavälillä [2 h, 12 h] suunnilleen funktiota $v(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 6t + 2$ (m^3/h), missä t on aika tunteina. Paljonko vettä virtasi putken läpi tuona aikana? (Veden määrä on virtausnopeuden kertymä.)

Ratkaisu. Virranneen veden määrä saadaan integroimalla virtausnopeutta kuvaava funktio kysytyllä aikavälillä. Vettä virtasi siis

$$\int_2^{12} -\frac{1}{2}t^2 + 6t + 2\,dt = \Big/_{2}^{12} \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}t^3 + 6\cdot\frac{1}{2}t^2 + 2t\right) = \Big/_{2}^{12} \left(-\frac{1}{6}t^3 + 3t^2 + 2t\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{6}\cdot 12^3 + 3\cdot 12^2 + 2\cdot 12\right) - \left(-\frac{1}{6}\cdot 2^3 + 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2\right)$$
$$= (-288 + 432 + 24) - (-4/3 + 12 + 4) \approx 153 \quad (\mathrm{m}^3).$$

3. a) Määritä funktion $f(x) = x\sin x + \cos x$ suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[0,\pi]$. (Kulmanyksikkönä radiaanit.)

Ratkaisu. Funktio on jatkuva ja derivoituva kyseisellä suljetulla välillä, joten se saa suurimman ja pienimmän arvonsa tuolla välillä joko välin jommassa kummassa päätepisteessä tai derivaatan nollakohdassa. Funktion derivaatta saadaan tulon derivointisäännöllä:

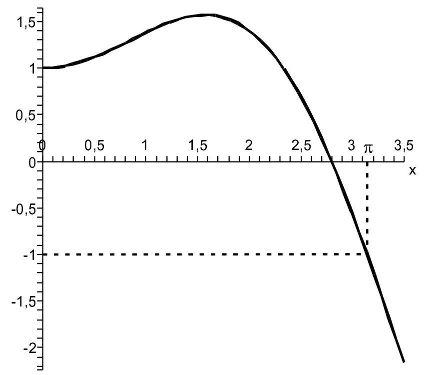
$$\begin{aligned} f'(x) &= Dx\cdot\sin x + x\cdot D\sin x + D\cos x \\ &= 1\cdot\sin x + x\cdot\cos x - \sin x = x\cos x. \end{aligned}$$

Tulon nollasäännön perusteella $f'(x) = 0$ täsmälleen silloin kun joko $x = 0$ tai $\cos x = 0$. Jälkimmäinen toteutuu pisteessä $x = \pi/2$ sekä aina π:n välein. Nämä muut nollakohdat eivät kuitenkaan osu tarkasteltavalle välille. Sopivia nollakohtia ovat siis vain $x = 0$ ja $x = \pi/2$.

Koska funktion suurin ja pienin arvo löytyvät päätepisteistä tai derivaatan nollakohdasta, lasketaan funktion arvot näissä ja katsotaan, mikä on suurin, mikä pienin:

$$\begin{aligned} &f(0) = 0\cdot\sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1, \\ &f(\pi/2) = \pi/2\cdot\sin\pi/2 + \cos\pi/2 = \pi/2\cdot 1 + 0 = \pi/2 \approx 1{,}6, \\ &f(\pi) = \pi\cdot\sin\pi + \cos\pi = \pi\cdot 0 - 1 = -1. \end{aligned}$$

Suurin arvo on siis $\pi/2$ ja pienin -1.



3. b) Uunissa lämmitettävän paistin lämpötila on joka hetki suoraan verrannollinen uunin ja paistin lämpötilojen väliseen erotukseen. Uunin lämpötila on koko ajan 200 astetta. Paistin lämpötila oli alussa 20 astetta ja tunnin kuluttua 80 astetta. Määritä paistin lämpötilaa kunakin ajanhetkenä kuvaava funktio.

Ratkaisu. Tehtävänannossa on virhe. Tarkoitus oli sanoa, että paistin *lämpenemisnopeus* on suoraan verrannollinen uunin ja paistin lämpötilojen väliseen erotukseen. Jos merkitään paistin lämpötilaa ajan funktiona $T(t)$, saataisiin virheellisen tehtävänannon mukaan yhtälö

$$T(t) = k(200 - T(t)),$$

missä k on verrannollisuuskerroin. Kertomalla sulut auki ja siirtelemällä termejä saataisiin sitten

$$T(t)(1 - k) = 200k,$$

josta $T(t) = 200k/(1-k)$; lämpötila olisi siis vakio. Tämä on vastoin tehtävän oletuksia.

Oikeassa muotoilussa, kun edelleen $T(t)$ on paistin lämpötila ajanhetkellä t eli paistin lämpenemisnopeus on $T'(t)$, saadaan differentiaaliyhtälö

$$T'(t) = k(200 - T(t)),$$

missä k on verrannollisuuskerroin. Koska paistin lämpötila on koko ajan positiivinen, voidaan yhtälö muuttaa separoituun muotoon jakamalla puolittain $200 - T$:llä:

$$\frac{1}{200 - T} T' = k.$$

Kun merkitään $g(T) = 1/(200 - T)$ ja $h(t) = k$, nähdään että yhtälö on todella separoituva (se on muotoa $g(T)T' = h(t)$). Funktion h

integraalifunktioksi voidaan valita $H(t) = kt$. Toisaalta g on yhdistetty funktio, jonka sisäfunktion lauseke on $200 - T$. Tämän derivaatta on -1, joten yhdistetyn funktion integroimissäännön mukaan saadaan

$$\int \frac{1}{200-T}\,dT = -\int \frac{1}{200-T}\cdot(-1)\,dT = -\ln(200-T).$$

Logaritmissa ei tarvita itseisarvoja, koska paisti on koko ajan kylmempi kuin 200 astetta. Separoituvan yhtälön ratkaisu voidaan kirjoittaa $G(T) = H(t) + C$, eli

$$\begin{aligned} &-\ln(200-T) = kt + C \\ \iff\ & 200 - T = e^{-kt-C} \\ \iff\ & T = 200 - e^{-kt-C} = 200 - e^{-C}e^{-kt}. \end{aligned}$$

Merkitään nyt $e^{-C} = E_0$, jolloin $T = 200 - E_0 e^{-kt}$.

Alkuarvoehdon mukaan

$$T(0) = 200 - E_0 e^0 = 200 - E_0 \cdot 1 = 20,$$

joten $E_0 = 200 - 20 = 180$. Toisaalta tunnin päästä lämpötila oli 80 astetta, joten

$$T(1) = 200 - 180e^{k\cdot 1} = 80,$$

josta edelleen

$$\begin{aligned} & 200 - 180e^k = 80 \\ \iff\ & 180e^k = 120 \\ \iff\ & e^k = \frac{2}{3} \\ \iff\ & k = \ln\frac{2}{3} \approx -0{,}405. \end{aligned}$$

Paistin lämpötila noudatti siis funktiota

$$T(t) = 200 - 180e^{-0{,}405t}.$$

4. Ratkaise seuraava alkuarvotehtävä:

$$x''(t) = 2t, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = -1.$$

Ratkaisu. Ratkaistaan tuntematon funktio x integroimalla kaksi kertaa. Ensinnäkin tiedetään, että x' on funktion x'' integraalifunktio, joten

$$x'(t) = \int x''(t)\,dt + C = \int 2t\,dt + C = t^2 + C,$$

missä C on integroimisvakio. Toisaalta x on funktion x' integraalifunktio, joten

$$x(t) = \int x'(t)\,dt + D = \int t^2 + C\,dt + D = \frac{1}{3}t^3 + Ct + D,$$

missä D on toinen integroimisvakio.

Ensimmäisestä alkuarvoehdosta nähdään, että

$$x(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 + C \cdot 0 + D = 1,$$

joten $D = 1$. Koska $x'(t) = t^2 + C$, toisesta alkuarvoehdosta seuraa

$$x'(0) = 0^2 + C = -1,$$

joten täytyy olla $C = -1$. Siispä etsitty funktio on

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t + 1.$$

5. a) Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Osoita, että matriisi B on matriisin A käänteismatriisi, ja ratkaise yhtälöryhmä $AX = C$.

Ratkaisu. Matriisi B on matriisin A käänteismatriisi, jos $AB = \mathbf{I}_3$, missä $\mathbf{I}_3$ on yksikkömatriisi. Tarkistetaan tämä:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 6 + 1 \cdot (-4) + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-4) + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 6 + 4 \cdot (-4) + 2 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) & 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3. \end{aligned}$$

Yllä nähtiin, että B tosiaan on A:n käänteismatriisi eli $B = A^{-1}$. Tällöin yhtälöryhmällä $AX = C$ on täsmälleen yksi ratkaisu, ja se on

$$X = A^{-1}C = BC = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \\ -4 \cdot 3 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ -1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -9 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

5. b) Etsi seuraavien yhtälöryhmien ratkaisut, jos niitä on olemassa:

$$\begin{cases} 2x & +y & +2z & = & -2 \\ & y & -2z & = & 4 \\ x & -y & +3z & = & 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x & +y & +4z & = & -2 \\ -x & +y & -2z & = & 4 \\ 2x & -y & +5z & = & 0 \end{cases}.$$

Käytetään ratkaisussa eliminointimenetelmää:

$$\begin{cases} 2x & +y & +2z & = & -2 & \mid :2 \\ & y & -2z & = & 4 & \\ x & -y & +3z & = & 3 & \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & +\frac{1}{2}y & +z & = & -1 & \mid \cdot(-1) \\ & y & -2z & = & 4 & \mid \\ x & -y & +3z & = & 3 & \mid \leftarrow \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & +\frac{1}{2}y & +z & = & -1 & \mid \leftarrow & \\ & y & -2z & = & 4 & \mid \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & \mid \cdot\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{2}y & +2z & = & 4 & & \mid \leftarrow \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & & +2z & = & -3 & \\ & y & -2z & = & 4 & \\ & & -z & = & 10 & \mid :(-1) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & & +2z & = & -3 & \mid \leftarrow & \\ & y & -2z & = & 4 & \mid & \mid \leftarrow \\ & & z & = & -10 & \mid \cdot(-2) & \mid \cdot 2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & & & = & 17 \\ & y & & = & -16 \\ & & z & = & -10 \end{cases}.$$

Ratkaisu on siis $x = 17$, $y = -16$ ja $z = -10$.

Toisesta yhtälöryhmästä saadaan

$$\begin{cases} x & +y & +4z & = & -2 & \mid \cdot 1 & \mid \cdot(-2) \\ -x & +y & -2z & = & 4 & \mid \leftarrow & \mid \\ 2x & -y & +5z & = & 0 & & \mid \leftarrow \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & +y & +4z & = & -2 & \\ & 2y & +2z & = & 2 & \mid :2 \\ & -3y & -3z & = & 4 & \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & +y & +4z & = & -2 & \mid \leftarrow & \\ & y & +z & = & 1 & \mid \cdot(-1) & \mid \cdot 3 \\ & -3y & -3z & = & 4 & & \mid \leftarrow \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & & +3z & = & -3 \\ & y & +z & = & 1 \\ & & 0 & = & 7 \end{cases}.$$

Koska viimeiselle riville tuli epätosi yhtälö $0 = 7$, ei yhtälöryhmällä ole ratkaisua.