Y100 (Matematiikka 1)
Kurssikoe 17.1.2007
Ratkaisuehdotus, 6 sivua

Tehtävissä 3 ja 4 oli ratkaistava *joko* (a)- *tai* (b)-kohta.

1. Määritä funktion $f(x) = x/e^x$ suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[0, 3]$. (Muistutus: $e \approx 2{,}7$.)

   Ratkaisu. Funktio f on määritelty kaikkialla, koska nimittäjä e^x ei saa koskaan arvoa nolla. Funktio on myös derivoituva kaikkialla ja sen derivaatta on osamäärän derivoimissäännön mukaan

$$f'(x) = \frac{Dx \cdot e^x - x \cdot De^x}{(e^x)^2} = \frac{1 \cdot e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{(1-x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}.$$

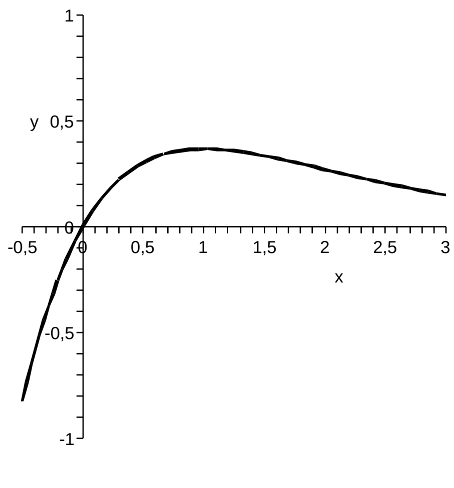
   Suljetulla välillä derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa joko välin päätepisteessä tai derivaatan nollakohdassa. Derivaatta on murtolauseke, joten se on nolla täsmälleen silloin kun sen osoittaja on nolla. Saadaan siis

$$f'(x) = 0 \iff 1 - x = 0 \iff x = 1.$$

   Lasketaan funktion arvot derivaatan nollakohdassa ja välin päätepisteissä:

$$f(1) = \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}4, \qquad f(0) = \frac{0}{e^1} = 0, \qquad f(3) = \frac{3}{e^3} \approx 0{,}2.$$

   Funktion suurin arvo välillä $[0, 3]$ on siis $f(1) = 1/e$ ja pienin arvo $f(0) = 0$.



2. Laske seuraavat integraalit:

$$\int_{-1}^{1} (x-1)^2\,dx, \qquad \int_{1}^{2} \frac{1}{t^3}\,dt.$$

Ratkaisu. Kerrotaan ensin sulut auki: $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$, jolloin

$$\int_{-1}^{1} (x-1)^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 - 2x + 1\,dx = \mathop{\Big/}_{-1}^{1} \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right)$$
$$= \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 - 1^2 + 1\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - (-1)^2 + (-1)\right)$$
$$= \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 - 1\right) = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} - 2\right) = 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

Toinen integraali on

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{t^3}\,dt = \int_{1}^{2} t^{-3}\,dt = \mathop{\Big/}_{1}^{2} \frac{1}{-2}t^{-2} = \mathop{\Big/}_{1}^{2} -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1^2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

3. a) Laske funktion $f(x) = 1/x - 1/2$ kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala välillä $[1,5]$. (Etsi ensin funktion nollakohdat kyseisellä välillä.)

Ratkaisu. Integraali antaa funktion kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän pinta-alan positiivisena tai negatiivisena, riippuen siitä, kulkeeko kuvaaja x-akselin ylä- vai alapuolella. Jos halutaan tietää aito pinta-ala, on integraali laskettava erikseen niillä väleillä, joilla funktio on positiivinen ja niillä, joilla se on negatiivinen.

Funktio f on määritelty ja jatkuva välillä $[1,5]$, joten se voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan. Ratkaistaan nollakohdat:

$$f(x) = 0 \iff 1/x - 1/2 = 0 \iff 1/x = 1/2 \iff x = 2.$$

Lasketaan integraali erikseen nollakohdan molemmilla puolilla eli väleillä $[1,2]$ ja $[2,5]$:

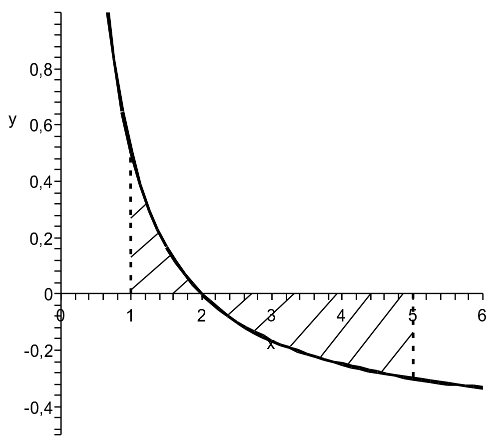
$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,dx = \mathop{\Big/}_{1}^{2} \left(\ln x - \frac{1}{2}x\right) = \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\cdot 2\right) - \left(\ln 1 - \frac{1}{2}\cdot 1\right)$$
$$= \ln 2 - 1 - 0 + \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0{,}2$$

ja

$$\int_2^5 \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,dx = \mathop{\Big/}_{2}^{5} \left(\ln x - \frac{1}{2}x\right) = \left(\ln 5 - \frac{1}{2}\cdot 5\right) - \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\cdot 2\right)$$
$$= \ln 5 - \frac{5}{2} - \ln 2 + 1 = \ln 5 - \ln 2 - \frac{3}{2} \approx -0{,}6.$$

Jotta saadaan todellinen pinta-ala, täytyy muuttaa jälkimmäisen integraalin etumerkki ja laskea sitten integraalit yhteen:

$$A = \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\ln 5 - \ln 2 - \frac{3}{2}\right) = \ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 5 + \ln 2 + \frac{3}{2}$$
$$= 2\ln 2 - \ln 5 + 1 = \ln\frac{4}{5} + 1 \approx 0{,}777.$$

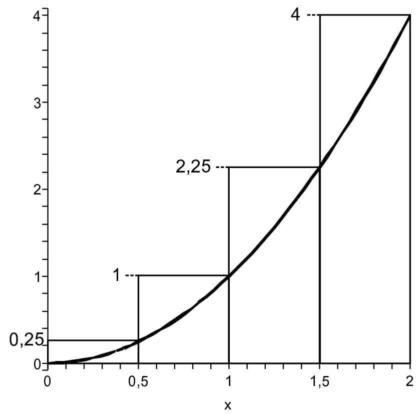


3. b) Arvioi integraalia $\int_0^2 x^2\,dx$ laskemalla funktion $f(x) = x^2$ yläsumma välillä $[0,2]$, kun jakovälejä on 4 (eli jakovälin pituus on $1/2$).

Ratkaisu. Yläsumman laskemiseksi jaetaan väli $[0,2]$ ensin neljään osaan: $[0,\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2},1]$, $[1,\frac{3}{2}]$ ja $[\frac{3}{2},2]$. Tämän jälkeen etsitään jokaisella välillä funktion suurin arvo. Koska f on kasvava välillä $[0,2]$, suurin arvo löytyy aina välin oikeanpuoleisesta päätepisteestä. Suurin arvo kerrotaan sitten osavälin pituudella (joka on $1/2$), jolloin saadaan kyseisellä osavälillä kuvaajan alle jäävää aluetta approksimoivan suorakulmion pinta-ala. Lopuksi näin saadut arvot lasketaan yhteen. Tulokset voidaan koota taulukkoon.

osaväli	suurin arvo	pinta-ala
$[0, 1/2]$	$(1/2)^2 = 1/4$	$1/8 = 0{,}125$
$[1/2, 1]$	$1^2 = 1$	$1/2 = 0{,}5$
$[1, 3/2]$	$(3/2)^2 = 9/4$	$9/8 = 1{,}125$
$[3/2, 2]$	$2^2 = 4$	2
	yhteensä	$15/4 = 3{,}75$

Yläsummaksi saatiin siis 3,75, joka on integraalin $\int_0^2 x^2\,dx$ arvio yläkanttiin. (Integraalin tarkka arvo on $8/3 \approx 2{,}67$.)



4. a) Ratkaise seuraava separoituva alkuarvotehtävä:

$$y' = xy, \qquad y(0) = -1.$$

Ratkaisu. Muutetaan yhtälö ensin separoituun muotoon. Funktio $y(x) = 0$ olisi erillisratkaisu, mutta se ei tule kyseeseen, koska alkuarvoehdon mukaan $y(0) = -1$. Voidaan siis olettaa, että $y \neq 0$, ja jakaa yhtälö puolittain y:llä, jolloin saadaan

$$\frac{y'}{y} = x.$$

Jos nyt merkitään $g(y) = 1/y$ ja $h(x) = x$, nähdään että yhtälö on muotoa $g(y)y' = h(x)$, joten sen ratkaisu on $G(y) = H(x) + C$, missä G ja H ovat on g:n ja h:n integraalifunktiot. Valitaan $G(y) = \ln|y|$ ja $H(x) = \frac{1}{2}x^2$, jolloin saadaan

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \text{eli} \quad |y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C} = e^{\frac{1}{2}x^2} e^C = y_0 e^{\frac{1}{2}x^2},$$

missä on merkitty $y_0 = e^C$ (tämä on positiivinen). Koska alkuarvoehdon mukaan y on jossain pisteessä negatiivinen, täytyy itseisarvomerkit poistettaessa vaihtaa y:n merkki. (Jos $y < 0$, niin $|y| =$

$-y$.) Näin saadaan lopulta

$$y(x) = -y_0 e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Alkuarvoehdon mukaan

$$y(0) = -y_0 e^{\frac{1}{2}\cdot 0^2} = -y_0 = -1,$$

joten $y_0 = 1$. Siispä etsitty funktio on

$$y(x) = -e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

4. b) Valitse vakiokerroin k siten, että funktio $x(t) = \sin(kt)$ toteuttaa toisen asteen differentiaaliyhtälön

$$x''(t) + 2x(t) = 0.$$

(Derivoi x yhdistetyn funktion derivointisäännöllä.)

Ratkaisu. Derivoidaan x ja sijoitetaan se tehtävän yhtälöön, jotta nähdään, millä k:n arvolla x toteuttaa yhtälön. Käyttämällä yhdistetyn funktion derivointia saadaan

$$\begin{aligned} x'(t) &= \cos(kt) \cdot k = k\cos(kt) \quad \text{ja} \\ x''(t) &= k(-\sin(kt)\cdot k) = -k^2 \sin(kt). \end{aligned}$$

Sijoitetaan näin saadut x ja x'' yhtälöön ja sievennetään:

$$\begin{aligned} & -k^2\sin(kt) + 2\sin(kt) = 0 \\ \iff & (-k^2+2)\sin(kt) = 0. \end{aligned}$$

Jotta yhtälö toteutuisi, täytyisi olla joko $-k^2+2=0$ tai $\sin(kt) = 0$. Jälkimmäinen toteutuu t:stä riippumatta vain, jos $k = 0$. Edellinen toteutuu, jos $k = \sqrt{2}$. Yhtälö toteutuu siis, jos $k = 0$ tai $k = \sqrt{2}$.

5 Eräs matriisi A ja sen käänteismatriisi A^{-1} ovat

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ratkaise seuraavat kaksi yhtälöryhmää:

$$\left\{ \begin{array}{cccrr} x & +y & +z & = & 1 \\ 2x & +3y & & = & 1 \\ 3x & +4y & +2z & = & 1 \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{cccrr} x & +y & +z & = & -2 \\ 2x & +3y & & = & 0 \\ 3x & +4y & +2z & = & 3 \end{array} \right..$$

Ratkaisu. Ratkaistavat yhtälöryhmät voidaan kirjoittaa muodossa $AX = B_1$ ja $AX = B_2$, missä A on tehtävässä annettu matriisi sekä

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Koska kerroinmatriisi A on kääntyvä, on ensimmäisen matriisiyhtälön ratkaisu $X = A^{-1}B_1$, eli

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\cdot 1 + 2\cdot 1 - 3\cdot 1 \\ -4\cdot 1 - 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ -1\cdot 1 - 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Toisin sanoen $x = 5$, $y = -3$ ja $z = -1$.

Toisen yhtälöryhmän ratkaisu on vastaavasti $X = A^{-1}B_2$, eli

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\cdot(-2) + 2\cdot 0 - 3\cdot 3 \\ -4\cdot(-2) - 1\cdot 0 + 2\cdot 3 \\ -1\cdot(-2) - 1\cdot 0 + 1\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ 14 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Saatiin $x = -21$, $y = 14$ ja $z = 5$.

Tehtävän yhtälöryhmät voi tietysti ratkaista myös eliminoimalla. Ensimmäisen yhtälöryhmän tapauksessa saataisiin tällöin

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rrrcrll} x & +y & +z & = & 1 & \mid\cdot(-2) & \mid\cdot(-3) \\ 2x & +3y & & = & 1 & \mid\leftarrow & \mid \\ 3x & +4y & +2z & = & 1 & & \mid\leftarrow \end{array}\right. \\
\iff &\left\{\begin{array}{rrrcrll} x & +y & +z & = & 1 & \mid\leftarrow & \\ & y & -2z & = & -1 & \mid\cdot(-1) & \mid\cdot(-1) \\ & y & -z & = & -2 & & \mid\leftarrow \end{array}\right. \\
\iff &\left\{\begin{array}{rrrcrll} x & & +3z & = & 2 & \mid\leftarrow & \\ & y & -2z & = & -1 & \mid & \mid\leftarrow \\ & & z & = & -1 & \mid\cdot(-3) & \mid\cdot 2 \end{array}\right. \\
\iff &\left\{\begin{array}{rrrcr} x & & & = & 5 \\ & y & & = & -3 \\ & & z & = & -1 \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Toinen yhtälöryhmä ratkeaa aivan samalla tavalla.