7.3. **Yhtälöryhmän ratkaiseminen matriisien avulla.** Tässä osassa tarkastellaan vain sellaisia yhtälöryhmiä, joissa on yhtä monta yhtälöä kuin tuntematonta. Mikä tahansa yhtälöryhmä voidaan kuitenkin muuttaa tällaiseen muotoon niin, että ratkaisut pysyvät samoina. Yhtälöihin voidaan aina lisätä tuntemattomia, jos niiden kertoimeksi vain asetetaan nolla. Toisaalta sama yhtälö voidaan toistaa ryhmässä useamman kerran, jolloin yhtälöiden määrä kasvaa, vaikka ratkaisut eivät muutu.

Olkoon A $n \times n$-neliömatriisi, alkioinaan $a_{11}, \dots, a_{nn}$, ja olkoot X ja B $n \times 1$-matriiseja (vain yksi sarake), alkiot vastaavasti $x_1, \dots, x_n$ ja $b_1, \dots, b_n$. Tarkastellaan *matriisiyhtälöä*

$$AX = B.$$

Yhtälön vasemmalla puolella oleva kertolasku antaa tulokseksi

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}.$$

Tämä on $n \times 1$-matriisi, samoin kuin oikealla puolella oleva matriisi B. Yhtälö pätee, jos ja vain jos vasemmanpuoleisen matriisin alkiot ovat samat kuin oikeanpuoleisen, eli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \qquad\vdots & \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}.$$

Tämä on lineaarinen yhtälöryhmä, joka siis vastaa alkuperäistä matriisiyhtälöä.

Lause 7.1. *Lineaarista yhtälöryhmää, jossa on n yhtälöä ja n tuntematonta, vastaa matriisiyhtälö $AX = B$, missä A on $n \times n$-matriisi, joka sisältää yhtälöryhmän kertoimet, X on $n \times 1$-matriisi, joka sisältää tuntemattomat, ja B on $n \times 1$-matriisi, joka sisältää yhtälöiden oikealla puolella olevat vakioarvot.*

Matriisimuotoa voidaan käyttää merkintöjen helpottamiseksi. Eliminointimenetelmää sovellettaessa muuttujien kirjoittaminen on oikeastaan turhaa, sillä vain kertoimilla on eliminoinnin kannalta jotain merkitystä. Muuttujat pysyvät koko ajan samoilla paikoilla. Suorittamalla eliminointi matriisimuodossa vältytään muuttujien toistuvalta kirjoittamiselta.

Esimerkki 7.2. Ratkaistaan sellaisen paraabelin yhtälö, joka kulkee pisteiden $(-1, 1)$, $(1, 2)$ ja $(2, 1)$ kautta. Paraabelin yleinen yhtälö on $y = ax^2 + bx + c$. Sijoitetaan tähän yhtälöön vuorotellen annettujen pisteiden koordinaatit, jolloin saadaan seuraavat yhtälöt:

$$\begin{cases} a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 1 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a - b + c &= 1 \\ a + b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= 1. \end{cases}.$$

Tätä yhtälöryhmää vastaa matriisiyhtälö $AX = B$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Unohdetaan nyt hetkeksi tuntemattomat, ja ryhdytään eliminoimaan *yhdistettyä matriisia*

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 4 & 2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

Lisätään ensimmäinen rivi toiseen -1:llä kerrottuna ja kolmanteen -4:llä kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 4 & 2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) & | \cdot (-4) \\ \leftarrow & | \\ & | \leftarrow \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 6 & -3 & | & -3 \end{bmatrix}.$$

Toisen rivin ensimmäisenä (nollasta poikkeavana) kertoimena on 2, joten jaetaan tämä rivi puolittain kahdella, jotta saadaan kertoimeksi 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 6 & -3 & | & -3 \end{bmatrix} : 2 \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 6 & -3 & | & -3 \end{bmatrix}.$$

Lisätään sitten toinen rivi ensimmäiseen 1:llä kerrottuna ja kolmanteen -6:lla kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 6 & -3 & | & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \\ \cdot 1 & | \cdot (-6) \\ & | \leftarrow \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 0 & -3 & | & -6 \end{bmatrix}.$$

Jaetaan alin rivi luvulla -3, jotta saadaan tuon rivin ensimmäiseksi nollasta poikkeavaksi kertoimeksi 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 0 & -3 & | & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :(-3) \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Lisätään lopuksi kolmas rivi ensimmäiseen -1:llä kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Nyt eliminointi on suoritettu. Syntynyttä yhdistettyä matriisia vastaa seuraava täysin ratkaistu yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} x & & & = & -1/2 \\ & y & & = & 1/2 \\ & & z & = & 2 \end{cases}.$$

Varsinainen hyöty matriisien käyttämisestä saadaan, kun verrataan matriisiyhtälön ratkaisemista tavallisen yhtälön ratkaisemiseen. Tarkastellaan seuraavaksi hieman tavallisen yhtälön ratkaisemista ja yritetään sen jälkeen yritetään soveltaa samoja keinoja matriisiyhtälön ratkaisemiseen. Ensimmäisen asteen yhtälö on muotoa $ax = b$. Jos $a \neq 0$, voidaan yhtälö ratkaista jakamalla sen molemmat puolet a:lla, eli kertomalla molemmat puolet a:n käänteisluvulla $1/a = a^{-1}$:

$$\begin{aligned} ax &= b \qquad | \, a^{-1} \cdot \\ a^{-1}(ax) &= a^{-1}b \\ (a^{-1}a)x &= a^{-1}b \\ 1 \cdot x &= a^{-1}b \\ x &= a^{-1}b. \end{aligned}$$

Näin löydetään yhtälön ratkaisu $x = a^{-1}b = b/a$. Ratkaiseminen perustui tiettyihin lukujen ominaisuuksiin. Ensinnäkin $a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)x$, toiseksi $a^{-1}a = 1$ ja lopulta $1 \cdot x = x$. Ensimmäinen ominaisuus pätee matriiseillakin, sillä $A(BC) = (AB)C$, jos kertolasku vain voidaan suorittaa. Jos matriiseilta löydetään muutkin ominaisuudet, voidaan matriisiyhtälö ratkaista samalla tavalla kuin lukuyhtälö. Viimeinen ominaisuus, eli $1 \cdot x = x$, toteutuukin helposti myös matriiseilla.

Määritelmä 7.3. Neliömatriisia, joka sisältää vasemmalta ylhäältä oikealle alas kulkevalla lävistäjällään pelkkiä ykkösiä ja muuten pelkkiä nollia, kutsutaan *ykkösmatriisiksi* ja merkitään

$$\mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

missä n on rivien (ja sarakkeiden) lukumäärä. Jokaista rivimäärää n vastaa oma ykkösmatriisi I_n. Ykkösmatriisille pätee

$$\mathrm{I}_n X = X,$$

olipa X mikä tahansa $n \times p$-matriisi. (Siinä täytyy siis olla n riviä, jotta kertolasku olisi mahdollinen.)

Ykkösmatriisilla kertominen vastaa siis ykkösellä kertomista: se ei muuta kerrottavaa matriisia mitenkään. Tarvitaan enää käänteislukua vastaava matriisi. Luvun a käänteisluvulla a^{-1} on se tärkeä ominaisuus, että $a^{-1} \cdot a = 1$. Täytyisi siis löytyä sellainen matriisia A vastaava matriisi A^{-1}, että $A^{-1}A = \mathrm{I}_n$. Kaikilla luvuilla ei ole käänteislukua (nimittäin nollalla), eikä kaikilla matriiseillakaan ole käänteismatriisia.

Määritelmä 7.4. Olkoon A $n \times n$-neliömatriisi. Jos on olemassa jokin matriisi B, jolle pätee $BA = \mathrm{I}_n$, niin sanotaan, että A on *säännöllinen* eli *kääntyvä*, ja B on A:n *käänteismatriisi*. Käänteismatriisi on yksikäsitteinen, ja sitä merkitään $B = A^{-1}$. Lisäksi, jos A on säännöllinen, niin myös A^{-1} on säännöllinen ja sen käänteismatriisi on A (eli $(A^{-1})^{-1} = A$ ja $AA^{-1} = \mathrm{I}_n$).

Esimerkki 7.5. Olkoon $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ ja $B = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Tällöin

$$BA = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + (-5) \cdot 1 & 3 \cdot 5 + (-5) \cdot 3 \\ -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}_2.$$

Siispä B on A:n käänteismatriisi eli $B = A^{-1}$.

Jos neliömatriisille A sovelletaan eliminointimenetelmää, voi tuloksena olla ykkösmatriisi (vrt. esim. 7.2). Jos samat operaatiot suoritetaan samassa järjestyksessä ykkösmatriisille, tuloksena on A:n käänteismatriisi.

Lause 7.6. ***Käänteismatriisin olemassaolo ja löytäminen.*** *Olkoon A $n \times n$-matriisi. Sovelletaan yhdistettyyn matriisiin $[A|\mathrm{I}_n]$ eliminointimenetelmää, jolloin saadaan uusi yhdistetty matriisi $[B|C]$. Jos nyt B on ykkösmatriisi, niin A on säännöllinen, ja C on A:n käänteismatriisi. Jos taas $B \neq \mathrm{I}_n$, niin A ei ole säännöllinen.*

Esimerkki 7.7. Tarkastellaan esimerkin 7.5 matriisia $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$. Sovelletaan eliminointimenetelmää yhdistettyyn matriisiin $[A|\mathrm{I}_2]$:

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} :2 \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \leftarrow \end{matrix} \\ \rightsquigarrow &\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ : \frac{1}{2} \end{matrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \cdot\left(-\frac{5}{2}\right) \end{matrix} \\ \rightsquigarrow &\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Vasemmalle puolelle muodostui ykkösmatriisi, joten $A^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Tämä vastaa aikaisempaa tulosta.

Esimerkki 7.8. Tarkastellaan vielä matriisia $S = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{smallmatrix}\right]$. Eliminoimalla yhdistettyä matriisia $[S|\mathrm{I}_2]$ saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ -3 & 6 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vasemmanpuoleisen matriisin toiselta riviltä hävisivät kaikki alkiot, joten eliminointia ei voida jatkaa. Vasemmanpuoleista matriisia ei saatu eliminoimalla ykkösmatriisiksi, joten sillä ei ole käänteismatriisia.

Tarkastellaan nyt jälleen matriisiyhtälöä $AX = B$. Jos A:lla on käänteismatriisi, voimme ratkaista tämän yhtälön aivan kuten tavallisen ensimmäisen asteen yhtälön kertomalla molemmat puolet *vasemmalta* A:n käänteismatriisilla. (Oikealta kertominen ei tuota samaa tulosta, koska matriisien kertolaskulle ei välttämättä päde sääntö $AB = BA$.) Tämä käy seuraavasti:

$$\begin{aligned} AX &= B \qquad | \, A^{-1} \cdot \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ \mathrm{I}_n X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B. \end{aligned}$$

Koska tämä matriisiyhtälö vastasi tiettyä yhtälöryhmää, voidaan kyseinen yhtälöryhmä siis ratkaista käänteismatriisin avulla. Koska käänteismatriisin olemassaolo riippuu vain kerroinmatriisista A, riippuu myös ratkaisun *onnistuminen* vain matriisista A, ei siis tuntemattomista tai vakiot sisältävästä matriisista B.

Lause 7.9. *Olkoon ratkaistavana yhtälöryhmä $AX = B$. Jos kerroinmatriisi A on säännöllinen, yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu $X = A^{-1}B$. Jos A ei ole säännöllinen, yhtälöryhmä on huonosti ratkeava.*

Käänteismatriisi soveltuu käytettäväksi erityisesti silloin, kun on ratkaistavana monta yhtälöryhmää, joissa on samat kertoimet.

Esimerkki 7.10. Olkoot ratkaistavina seuraavat yhtälöparit:

$$\begin{cases} 2x + 5y &= 1 \\ x + 3y &= 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + 5y &= -2 \\ x + 3y &= 0 \end{cases}.$$

Näissä yhtälöpareissa on samat kertoimet, ja ne voidaan kirjoittaa matriisiyhtälöinä $AX = B_1$ ja $AX = B_2$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matriisin A käänteismatriisi laskettiin esimerkissä 7.7. Se on $A^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Nyt voidaan ratkaista helposti molemmat yhtälöryhmät edellisen lauseen avulla. Ensimmäisessä

$$X = A^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix},$$

joten ratkaisu on $x = -7$, $y = 3$. Toisessa yhtälöryhmässä

$$X = A^{-1}B_2 = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot (-2) + (-5) \cdot 0 \\ -1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix},$$

joten ratkaisu on $x = -6$, $y = 2$.

Jos yhtälöryhmä on huonosti ratkeava, käänteismatriisisista ei ole hyötyä. Sen avulla ei esimerkiksi voida sanoa, onko yhtälöryhmä ristiriitainen vai onko ratkaisuja mahdollisesti äärettömän monta.