8. Lineaariset yhtälöryhmät ja matriisit

Kurssin loppuosassa tutustutaan lineaarisiin yhtälöryhmiin sekä niiden ratkaisemiseen matriisien avulla.

8.1. **Lineaariset yhtälöryhmät ja niiden ratkaiseminen.**

Määritelmä 8.1. Yhtälöä

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

missä $a_1, \ldots, a_n$ sekä b ovat vakioita ja $x_1, \ldots, x_n$ ovat tuntemattomia, kutsutaan *n:n muuttujan lineaariseksi yhtälöksi*. Jos liitetään yhteen m kappaletta lineaarisia yhtälöitä, joissa on samat tuntemattomat, saadaan *lineaarinen yhtälöryhmä*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}.$$

Lukuja $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ nimitetään yhtälöryhmän *kertoimiksi*. Jos tuntemattomia on vähän, niitä merkitään yleensä $x, y, z, \ldots$. Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen merkitsee sitä, että löydetään n kappaletta lukuja, jotka tuntemattomien $x_1, \ldots, x_n$ paikalle sijoitettuina toteuttavat kaikki m yhtälöä.

Esimerkki 8.2. Lineaarisia yhtälöryhmiä:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x - y + z & = & -2 \\ -3x + 2y - z & = & 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 & & +4x_3 & = & 1 \\ -3x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & = & 12 \end{cases}.$$

Ensimmäisen yhtälöryhmän ratkaisu on $x = 3/2$, $y = -1/2$. Toisella yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua, kuten myöhemmin nähdään.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemisessa pyritään löytämään luvut, jotka muuttujien paikalle sijoitettuina toteuttavat *kaikki* ryhmän yhtälöt. On helppo nähdä, että tämä ei aina onnistu, eli yhtälöryhmällä ei aina ole ratkaisua. Esimerkiksi yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y & = & 1 \\ x + y & = & 0 \end{cases}$$

sisältää kaksi keskenään ristiriitaista yhtälöä, eivätkä mitkään luvut x ja y voi toteuttaa molempia yhtälöitä yhtä aikaa. Toisaalta joskus ratkaisuja on ääretön määrä, kuten seuraavalla yhtälöryhmällä:

$$\begin{cases} x - y & = & 0 \\ 2x - 2y & = & 0 \end{cases}.$$

Tämän yhtälöryhmän molemmat yhtälöt sisältävät saman tiedon, eli että $x = y$. Mikä tahansa luku sijoitettuna sekä x:n että y:n paikalle toteuttaa molemmat yhtälöt.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseksi on olemassa monta menetelmää. Pienillä yhtälöryhmillä (2-3 yhtälöä) voidaan käyttää sijoitusmenetelmää, jossa yhdestä yhtälöstä ratkaistaan aina yksi tuntematon, joka sitten sijoitetaan muihin yhtälöihin. Yhtälöjen lukumäärän kasvaessa tämä menetelmä kuitenkin käy epäkäytännölliseksi.

Tällä kurssilla opitaan ehkä kaikkein käytetyin ratkaisumenetelmä, ns. *Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmä*. Siinä muokataan yhtälöryhmää yksinkertaisemmaksi sellaisilla tavoilla, jotka eivät muuta yhtälöryhmän ratkaisuja. Yhtälöt käydään läpi ylhäältä alkaen, ja jokaisen yhtälön kohdalla toistetaan kaksi päävaihetta. Nämä ovat:

1) Jaetaan yhtälö puolittain, jotta yhtälön vasemmanpuolimmaisen tuntemattoman kertoimeksi saadaan 1.

2) Eliminoidaan tämän tuntemattoman avulla vastaavat tuntemattomat kaikista muista yhtälöistä.

Eliminointi tapahtuu seuraavasti. Oletetaan, että ollaan käsittelemässä 1. yhtälöä ja halutaan eliminoida ensimmäinen tuntematon 2. yhtälöstä. Kerrotaan 1. yhtälö puolittain 2. yhtälön ensimmäisen tuntemattoman kertoimen vastaluvulla. Lisätään sitten ensimmäinen yhtälö toiseen, jolloin tuo tuntematon häviää. Käydään tätä menetelmää läpi esimerkkien avulla.

Esimerkki 8.3. Olkoon ratkaistavana seuraava yhtälöpari:

$$\begin{cases} 2x+4y &= 2 \\ x+3y &= -1 \end{cases}.$$

Aloitetaan käsittely ensimmäisestä yhtälöstä. Jaetaan yhtälö puolittain luvulla 2, jolloin ensimmäiseksi kertoimeksi tulee 1:

$$\begin{cases} x+2y &= 1 \\ x+3y &= -1 \end{cases}.$$

Toisen yhtälön ensimmäinen kerroin on 1. Jotta tämä saataisiin häviämään, kerrotaan ensimmäinen yhtälö puolittain luvulla -1, ja lisätään näin saatu yhtälö toiseen. Ensimmäinen yhtälö -1:llä kerrottuna on

$$-x-2y=-1.$$

Kun tämä lisätään puolittain toiseen yhtälöön, saadaan

$$\begin{array}{rcrl} -x-2y &=& -1 & \mid (-1)\times \text{ 1. yhtälö} \\ x+3y &=& -1 & \mid \text{2. yhtälö} \\ \hline 0+y &=& -2 & \end{array}.$$

Saatu yhtälö kirjoitetaan toisen yhtälön paikalle, jolloin yhtälöryhmästä tulee

$$\begin{cases} x & +2y &= 1 \\ & y &= -2 \end{cases}.$$

Toisesta yhtälöstä hävisi näin x.

Käsitellään vielä toinen yhtälö. Toisen yhtälön ensimmäinen kerroin on nyt y:n kerroin ja se on sattumalta jo valmiiksi 1. Ensimmäisessä yhtälössä y:n kerroin on 2. Kerrotaan jälkimmäinen yhtälö siis puolittain -2:lla ja lisätään ensimmäiseen:

$$\begin{array}{rrcrl} & -2y &=& 4 & \mid (-2)\times \text{ 2. yhtälö} \\ x & +2y &=& 1 & \mid \text{1. yhtälö} \\ \hline x & &=& 5 & \end{array}.$$

Tulos sijoitetaan ensimmäisen yhtälön paikalle, jolloin siitä häviää y:

$$\begin{cases} x & &= 5 \\ & y &= -2 \end{cases}.$$

Nyt yhtälöryhmä on täysin ratkaistussa muodossa, josta voidaan suoraan lukea tuntemattomien arvot. Tarkistetaan vielä tämä vastaus sijoittamalla saadut arvot alkuperäisiin yhtälöihin:

$$\begin{cases} 2\cdot 5+4\cdot(-2) &= 10-8 &= 2 \\ 5+3\cdot(-2) &= 5-6 &= -1 \end{cases}.$$

Tulos on oikea.

Esimerkki 8.4. Ratkaistaan seuraava kolmen yhtälön yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 &= 12 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 &= -2 \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 &= 14 \end{cases}.$$

Aloitetaan käsittely ensimmäisestä yhtälöstä. Jaetaan yhtälö 2:lla, jolloin saadaan ensimmäiseksi kertoimeksi 1:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = & 12 & \mid :2 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -2 & \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 14 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 14 \end{array}\right. .$$

Ensimmäisen muuttujan kerroin on toisessa yhtälössä 3 ja kolmannessa 2. Lisätään siis ensimmäinen yhtälö toiseen -3:lla kerrottuna ja kolmanteen -2:lla kerrottuna:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 6 & \mid \cdot(-3) & \mid \cdot(-2) \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -2 & \mid \leftarrow & \mid \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 14 & & \mid \leftarrow \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 6 \\ & -5x_2 & -10x_3 & = & -20 \\ & -7x_2 & -4x_3 & = & 2 \end{array}\right. .$$

Nyt on eliminoitu ensimmäinen tuntematon toisesta ja kolmannesta yhtälöstä. Siirrytään toiseen yhtälöön. Toisen yhtälön ensimmäinen kerroin on -5. Jaetaan yhtälö tällä puolittain:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 6 & \\ & -5x_2 & -10x_3 & = & -20 & \mid :(-5) \\ & -7x_2 & -4x_3 & = & 2 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 6 \\ & x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ & -7x_2 & -4x_3 & = & 2 \end{array}\right. .$$

Toisen muuttujan kerroin on ensimmäisessä yhtälössä 2 ja kolmannessa -7. Lisätään siis toinen yhtälö ensimmäiseen -2:lla kerrottuna ja kolmanteen 7:llä kerrottuna:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 6 & \mid \leftarrow & \\ & x_2 & +2x_3 & = & 4 & \mid \cdot(-2) & \mid \cdot 7 \\ & -7x_2 & -4x_3 & = & 2 & & \mid \leftarrow \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & & -x_3 & = & -2 \\ & x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ & & 10x_3 & = & 30 \end{array}\right. .$$

Jaetaan vielä viimeinen yhtälö puolittain luvulla 10:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & & -x_3 & = & -2 & \\ & x_2 & +2x_3 & = & 4 & \\ & & 10x_3 & = & 30 & \mid :10 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & & -x_3 & = & -2 \\ & x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ & & x_3 & = & 3 \end{array}\right. ,$$

ja lisätään se ensimmäiseen 1:llä kerrottuna sekä toiseen -2:lla kerrottuna:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrll} x_1 & & -x_3 & = & -2 & \mid \leftarrow & \\ & x_2 & +2x_3 & = & 4 & \mid & \mid \leftarrow \\ & & x_3 & = & 3 & \mid \cdot 1 & \mid \cdot(-2) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & = & -2 \\ & & x_3 & = & 3 \end{array}\right. .$$

Näin on yhtälöryhmä täydellisesti ratkaistu.

Toisinaan jotain tuntematonta eliminoitaessa eliminoituu kaksi tuntematonta samalla kertaa. Tällöin voidaan vaihtaa yhtälöiden järjestystä, jotta eliminointia voidaan jatkaa.

Esimerkki 8.5. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & +6x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 3 \end{array}\right. .$$

Ensimmäisen yhtälön ensimmäinen kerroin on jo 1, joten voidaan ruveta suoraan eliminoimaan:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrll} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 & \mid \cdot(-2) & \mid \cdot(-1) \\ 2x_1 & +6x_2 & -x_3 & = & 0 & \mid \leftarrow & \mid \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 3 & & \mid \leftarrow \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 \\ & & x_3 & = & -14 \\ & -4x_2 & & = & -4 \end{array}\right. .$$

Koska toisesta yhtälöstä hävisi myös toinen tuntematon, vaihdetaan toinen ja kolmas yhtälö keskenään, jolloin saadaan

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 \\ & -4x_2 & & = & -4 \\ & & x_3 & = & -14 \end{array}\right. .$$

Nyt voidaan jatkaa normaalisti. Jaetaan toinen yhtälö puolittain −4:llä:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 & \\ & -4x_2 & & = & -4 & \mid : (-4) \\ & & x_3 & = & -14 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & -14 \end{array}\right. .$$

Eliminoidaan toinen tuntematon ensimmäisestä yhtälöstä. (Kolmannesta yhtälöstä se on jo eliminoitu.)

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 & \mid \leftarrow \\ & x_2 & & = & 1 & \mid \cdot (-3) \\ & & x_3 & = & -14 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & & -x_3 & = & 4 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & -14 \end{array}\right. .$$

Eliminoidaan lopuksi kolmas tuntematon ensimmäisestä yhtälöstä:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & & -x_3 & = & 4 & \mid \leftarrow \\ & x_2 & & = & 1 & \\ & & x_3 & = & -14 & \mid \cdot 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & & & = & -10 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & -14 \end{array}\right. .$$

Nyt yhtälöryhmä on ratkaistu.

Kuten edellä mainittiin, lineaarisella yhtälöryhmällä ei ole aina ratkaisua, tai ratkaisu ei ole välttämättä yksikäsitteinen. Tällaista yhtälöryhmää nimitetään tällä kurssilla *huonosti ratkeavaksi.*

Lause 8.6. *Lineaarisella yhtälöryhmällä on aina joko yksi, ei yhtään tai ääretön määrä ratkaisuja. Jos yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, tai niitä on ääretön määrä, sanotaan, että yhtälöryhmä on* huonosti ratkeava.

Esimerkki 8.7. Ratkaistaan eliminoimalla esimerkin 8.2 yhtälöryhmä

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & -y & +z & = & -2 \\ -3x & +2y & -z & = & 0 \end{array}\right. .$$

Jaetaan aluksi ensimmäinen yhtälö puolittain 2:lla, jolloin saadaan

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -1 \\ -3x & +2y & -z & = & 0 \end{array}\right. .$$

Lisätään sitten ensimmäinen yhtälö toiseen 3:lla kerrottuna:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & -\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -1 & \mid \cdot 3 \\ -3x & +2y & -z & = & 0 & \mid \leftarrow \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x & -\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -1 \\ & \frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -3 \end{array}\right. .$$

Jaetaan jälkimmäinen yhtälö 1/2:lla, jolloin saadaan ensimmäiseksi kertoimeksi 1:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -1 \\ & y & +z & = & -6 \end{array}\right. .$$

Lisätään lopuksi toinen yhtälö ensimmäiseen 1/2:lla kerrottuna:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & -\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -1 & \mid \leftarrow \\ & y & +z & = & -6 & \mid \cdot \frac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x & & +z & = & -4 \\ & y & +z & = & -6 \end{array}\right. .$$

Viimeistä tuntematonta ei voida nyt eliminoida, koska se ei ole missään yhtälössä ensimmäisenä. Tällaista tuntematonta kutsutaan *vapaaksi muuttujaksi.* Sen arvo voi olla mitä vain. Yhtälöryhmällä on ääretön määrä ratkaisuja, mutta nämä ratkaisut riippuvat vapaan muuttujan z arvosta. Jos esimerkiksi $z = 0$, niin $x = -4$ ja $y = -6$.

Edellisessä esimerkissä oli kaksi yhtälöä ja kolme tuntematonta. Jotta vapaita muuttujia ei tulisi, täytyy yhtälöitä olla vähintään yhtä paljon kuin tuntemattomia. Lisäksi mikä tahansa yhtälöryhmä voi olla ratkeamaton. Yhteenvetona saadaan seuraava lause.

Lause 8.8. *Jos lineaarisessa yhtälöryhmässä on n tuntematonta ja m yhtälöä, missä $n > m$, yhtälöryhmä on huonosti ratkeava.*

Esimerkki 8.9. Tarkastellaan seuraavaa yhtälöryhmää:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = & -2 \end{cases}.$$

Ensimmäisen yhtälön ensimmäinen kerroin on valmiiksi 1. Lisätään ensimmäinen yhtälö toiseen -2:lla kerrottuna ja kolmanteen -1:llä kerrottuna:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 & | \cdot (-2) & | \cdot (-1) \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 & | \leftarrow & | \\ x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = & -2 & & | \leftarrow \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ & -x_2 & -x_3 & = & -4 \\ & -3x_2 & -3x_3 & = & -5 \end{cases}.$$

Jaetaan toinen yhtälö puolittain -1:llä:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 & \\ & -x_2 & -x_3 & = & -4 & | : (-1) \\ & -3x_2 & -3x_3 & = & -5 & \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ & x_2 & +x_3 & = & 4 \\ & -3x_2 & -3x_3 & = & -5 \end{cases}.$$

Lisätään sitten toinen yhtälö ensimmäiseen -1:llä kerrottuna ja kolmanteen 3:lla kerrottuna:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 & | \leftarrow & \\ & x_2 & +x_3 & = & 4 & | \cdot (-1) & | \cdot 3 \\ & -3x_2 & -3x_3 & = & -5 & & | \leftarrow \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & & & = & -1 \\ & x_2 & +x_3 & = & 4 \\ & & 0 & = & 7 \end{cases}.$$

Viimeiseltä riviltä eliminoituivat kaikki tuntemattomat, mutta oikealle puolelle jäi 7. Tämä on ristiriitaista, sillä $0 \neq 7$. Yhtälöryhmällä ei siis ole ratkaisua. (Huomaa, että vaikka ensimmäisellä rivillä $x_1 = -1$, tämä ei ole ratkaisu, sillä yhtälöryhmää ratkaistaessa on kaikki yhtälöt ratkaistava yhtä aikaa.)

Kerrataan vielä yhtälöryhmän ratkaisumenetelmä. Jokaista yhtälöä kohti ylhäältä alkaen suoritetaan seuraavat vaiheet:

1. Vaihdetaan yhtälö jonkin alemman, käsittelemättömän, yhtälön kanssa, jos tarvitaan.
2. Jaetaan yhtälö puolittain siten, että ensimmäisen tuntemattoman kertoimeksi tulee 1.
3. Eliminoidaan tämän tuntemattoman avulla vastaava tuntematon kaikista muista yhtälöistä.

Kun nämä vaiheet on suoritettu kaikille yhtälöille, tulos voi olla jokin seuraavista:

- Kaikki tuntemattomat jäävät yksin omalle rivilleen, ja yhtälöryhmä ratkeaa yksikäsitteisesti.
- Jokin muuttuja ei ole ensimmäisenä millään rivillä. Tämä on vapaa muuttuja, ja yhtälöryhmän ratkaisu riippuu sen arvosta. Ratkaisuja on ääretön määrä.
- Jostakin yhtälöstä häviää kaikki tuntemattomat, mutta oikealle puolelle jää nollasta poikkeava luku. Tällöin yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

8.2. **Matriisit.** Matriisit ovat lukukaavioita tai lukutaulukoita, joiden avulla on usein helpompi hahmottaa suuri määrä lukuja. Yhtälöryhmien tapauksessa matriisi voi esimerkiksi sisältää kaikki yhtälöryhmän kertoimet, jolloin niitä voi käsitellä kuin yhtenä pakettina.

Määritelmä 8.10. Lukukaaviota, jossa on m riviä ja n saraketta, kutsutaan *matriisiksi*, jonka *tyyppi* on $m \times n$, eli $m \times n$*-matriisiksi.* Matriiseja merkitään yleensä isoilla kirjaimilla. Olkoon esimerkiksi

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Nyt M on $m \times n$-matriisi. Luvut $a_{11}, \dots, a_{mn}$ ovat tavallisia lukuja, matriisin *alkioita.* Alkioita merkitään M_{ij}, missä i on rivin numero ja j sarakkeen numero. Esimerkiksi M_{21} on toisen rivin ensimmäinen alkio, eli tässä tapauksessa $M_{21} = a_{21}$.

Esimerkki 8.11. Esimerkkejä matriiseista:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 13 & \pi \\ 0 & -5 & \sqrt{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Näiden matriisien tyypit ovat vasemmalta oikealle lukien 2×2, 3×3, 3×1 ja 2×3.

Matriiseja voidaan laskea yhteen ja vähentää toisistaan. Lisäksi niitä voidaan kertoa luvuilla ja toisilla matriiseilla. Näillä operaatioilla on kuitenkin rajoituksia. Matriisit voi esimerkiksi laskea yhteen vain, jos ne ovat samaa tyyppiä.

Määritelmä 8.12. Matriisien yhteen- ja vähennyslasku. Olkoot A ja B $m \times n$-matriiseja. Yhteenlasketun matriisin $A + B$ alkiot saadaan laskemalla A:n ja B:n alkiot yhteen kohdakkain. Sama pätee vähennyslaskulle $A - B$. Siis

$$(A \pm B)_{ij} = A_{ij} \pm B_{ij}.$$

Huom! Vain matriiseja, joilla on sama tyyppi, voidaan laskea yhteen tai vähentää toisistaan.

Esimerkki 8.13. Kahden 3×2-matriisin yhteenlasku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+(-1) \\ 3+0 & 4+1 \\ 5+3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Määritelmä 8.14. Skalaarikertolasku. Minkä tahansa matriisin A voi kertoa reaaliluvulla c. Tätä toimitusta kutsutaan *skalaarikertolaskuksi* ja merkitään cA (ilman kertomerkkiä). Tällöin jokainen matriisin alkio kerrotaan kyseisellä luvulla, eli

$$(cA)_{ij} = c \cdot A_{ij}.$$

Esimerkki 8.15. Erään 3×2-matriisin kertominen luvulla:

$$2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot(-1) \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriisin kertominen luvulla on helppo toimitus ja se voidaan aina suorittaa. Kahden matriisin välinen kertolasku on hieman monimutkaisempi ja rajoitetumpi operaatio.

Määritelmä 8.16. Matriisikertolasku. Kaksi matriisia voidaan kertoa toisillaan vain, jos *ensimmäisessä on yhtä paljon sarakkeita kuin toisessa on rivejä.* Olkoon siis A $m \times n$-matriisi ja B $n \times p$-matriisi. Tällöin matriisi AB on määritelty. Sen alkio $(AB)_{ij}$ saadaan kertomalla A:n i:nnen rivin alkiot B:n j:nnen sarakkeen alkioilla ja laskemalla nämä yhteen. Siis

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{in}B_{nj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}.$$

Tuloksena on $m \times p$-matriisi.

Esimerkki 8.17. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Koska A:ssa on kolme saraketta ja B:ssä on vastaavasti kolme riviä, matriisit voidaan kertoa keskenään.

Tarkastellaan aluksi tulomatriisin ensimmäisen rivin ensimmäistä alkiota. Määritelmän mukaan on otettava matriisista A ensimmäinen rivi ja matriisista B ensimmäinen sarake, kerrottava näillä olevat alkiot keskenään, ja laskettava yhteen. Siis

$$\begin{aligned}(AB)_{11} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} \\ &= 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 4.\end{aligned}$$

Kun lasketaan ensimmäisen rivin toinen alkio, kerrotaan matriisin A ensimmäisen rivin alkiot matriisin B toisen sarakkeen alkioilla:

$$\begin{aligned}(AB)_{12} &= A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} \\ &= 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 5.\end{aligned}$$

Samaan tapaan lasketaan muutkin alkiot:

$$\begin{aligned}AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Tulos on 2×2-matriisi, niin kuin pitääkin.

Matriisia, jossa on yhtä monta riviä kuin saraketta, kutsutaan *neliömatriisiksi.* Neliömatriiseja voidaan kertoa toisillaan kummin tahansa päin, mutta tulos ei silti välttämättä ole sama.

Esimerkki 8.18. Olkoon $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ ja $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Tällöin

$$AB = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -8 & 5 \end{bmatrix},$$

mutta

$$BA = \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ -4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & -4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}.$$

Aina ei siis päde $AB \neq BA$. Kuitenkin seuraavat säännöt pätevät matriisien kertolaskulle silloin, kun se voidaan suorittaa:

1. $A(BC) = (AB)C$,
2. $A(B + C) = AB + AC$.