7. Differentiaaliyhtälöt

Useissa tilanteissa suureen arvo tietyllä hetkellä tai tietyssä kohdassa vaikuttaa sen arvoihin muualla. Suureen arvo voi esimerkiksi vaikuttaa sen muutosnopeuteen, ja sen mukana tulevaisuudessa saataviin arvoihin. Toisaalta suureen arvo voi vaikuttaa esimerkiksi muutoksen kiihtyvyyteen, ja sitä kautta muutosnopeuteen sekä suureen arvoon tulevaisuudessa. Kun tällaisia tilanteita kuvataan matemaattisesti, saadaan yhtälöitä, jotka kertovat, miten funktion arvot riippuvat derivaattojen arvoista. Tällaisia yhtälöitä kutsutaan *differentiaaliyhtälöiksi*.

Ajatellaan esimerkiksi uunissa lämmitettävää paistia. Kuvatkoon T paistin lämpötilaa ajan funktiona. Mitä lämpimämmäksi paisti tulee uunissa, sitä enemmän se säteilee omaa lämpöään pois, jolloin lämpeneminen hidastuu. Hieman yksinkertaistaen voidaan sanoa, että paistin lämpenemisnopeus on suoraan verrannollinen uunin ja paistin lämpötilojen erotukseen. Siis: mitä lähempänä uunin lämpötilaa paistin lämpötila on, sitä hitaammin se lämpenee. Tällaista riippuvuutta kuvaa seuraava differentiaaliyhtälö:

$$T'(t) = k(200 - T(t)).$$

Koska paistin lämpötila on T, on derivaatta T' lämpenemisnopeus. Vakio k puolestaan on verrannollisuuskerroin, joka riippuu paistin ominaisuuksista. Tällaisessa yhtälössä tuntemattomana on paistin lämpötilaa kuvaava funktio T.

Differentiaaliyhtälöissä esiintyy aina (vähintään yksi) tuntematon funktio, joka pyritään ratkaisemaan. Koska ratkaistavana ei siis ole luku, vaan funktio, ei ratkaisussa yleensä pärjätä pelkästään tavallisten yhtälöiden käsittelyssä opituilla menetelmillä. Lisäksi differentiaaliyhtälön ratkaisu ei ole yleensä yksikäsitteinen, vaan moni funktio voi toteuttaa saman yhtälön. Tällöin tarvitaan jotain lisätietoa, jotta funktio voitaisiin ratkaista yksikäsitteisesti. Voitaisiin esimerkiksi tietää, että ennen uuniin laittamista paisti oli huoneenlämpöinen, eli $T(0) = 21$ °C. Tämä lisätieto auttaa ratkaisemaan paistin lämpötilaa kuvaavan funktion yksikäsitteisesti, mikäli verrannollisuuskerroin k tunnetaan.

Differentiaaliyhtälöiden yhteydessä käytetään usein tiettyjä vakiintuneita merkintöjä. Tuntematonta funktiota merkitään yleensä y ja sen derivaattaa y'. Lisäksi yhtälössä voi esiintyä derivaatan derivaattoja y'', y''' jne. Funktion muuttujana voi olla x, mutta hyvin usein myös t, varsinkin jos funktio kuvaa jotain ajasta riippuvaa suuretta. Tällöin voi olla jopa niin, että funktiota merkitään x:llä, esimerkiksi $x(t) = t^2$. Yhtälöissä jätetään lisäksi yleensä merkitsemättä funktion muuttuja, ei siis merkitä (oikeaoppisesti) $y(x)$ vaan yksinkertaisesti y.

Määritelmä 7.1. Yhtälöä, jossa esiintyy vähintään yksi tuntemattoman funktion y derivaatta tai korkeampi derivaatta, kutsutaan *differentiaaliyhtälöksi* (DY). Differentiaaliyhtälön ratkaisu on mikä tahansa funktio, joka y:n paikalle sijoitettuna toteuttaa yhtälön. Yhtälön *kertaluku eli aste* on korkeimman siinä esiintyvän derivaatan kertaluku.

Esimerkki 7.2. Differentiaaliyhtälöitä:

$$\begin{aligned} &y' = 0 && \text{(1. aste)},\\ &y'' + 2xy = \sqrt{x} && \text{(2. aste)},\\ &y''y = \frac{x}{\sqrt{y'''}} && \text{(3. aste)}. \end{aligned}$$

Esimerkki 7.3. Tarkastellaan yhtälöä

$$y'' - 2y' + y = x.$$

Tämä on toisen asteen differentiaaliyhtälö. Yhtälön eräs ratkaisu on $y(x) = e^x + x + 2$, sillä sen derivaatat ovat

$$y'(x) = e^x + 1 \quad \text{ja} \quad y''(x) = e^x.$$

Kun nämä sijoitetaan yhtälöön, nähdään että

$$y'' - 2y' + y = e^x - 2(e^x + 1) + (e^x + x + 2) = x,$$

eli y toteuttaa yhtälön.

Esimerkki 7.4. Tarkastellaan toisen kertaluvun yhtälöä

$$y''y' = x.$$

Yhtälön eräs ratkaisu on $y(x) = \frac{1}{2}x^2$, sillä tämän derivaatat ovat

$$y'(x) = x \quad \text{ja} \quad y''(x) = 1.$$

Kun nämä sijoitetaan yhtälöön, nähdään että yhtälö toteutuu:

$$y''y' = 1 \cdot x = x.$$

Koska differentiaaliyhtälöissä esiintyy derivaattoja, täytyy niitä ratkaistaessa yleensä etsiä funktioiden integraalifunktioita. Tämän vuoksi differentiaaliyhtälön ratkaisemista kutsutaan joskus yhtälön *integroimiseksi*. Integraalifunktioita etsittäessä on muistettava, että tietyn funktion integraalifunktio ei ole koskaan yksikäsitteinen. Eri integraalifunktiot voivat poiketa toisistaan integroimisvakiolla, joka on otettava huomioon.

Esimerkki 7.5. Yksinkertainen esimerkki differentiaaliyhtälöstä on

$$y' = 2x.$$

Tämä yhtälö sanoo yksinkertaisesti, että tuntematon funktio y on sellainen, jonka derivaatan lauseke on $2x$. (Huomaa, että itse y ei välttämättä esiinny yhtälössä.) Yhtälö voidaan ratkaista etsimällä funktion $2x$ integraalifunktio. Eräs ratkaisu onkin $y(x) = x^2$. Lisäksi integraalilaskennan peruslauseen mukaan kaikki ratkaisut saadaan tästä lisäämällä jokin vakio. Yleinen ratkaisu voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$y(x) = \int 2x\,dx = x^2 + C.$$

Differentiaaliyhtälöiden yhteydessä käytetään usein integraalimerkintää ilman integrointiväliä. Tämä tarkoittaa integraalifunktiota. Luku C on integroimisvakio. Jokaisella eri C:n arvolla saadaan yhtälölle eri ratkaisu, joten tämä on muistettava ottaa huomioon.

Usein systeemiä kuvaavasta funktiosta tiedetään sen toteuttaman differentiaaliyhtälön lisäksi joitakin yksittäisiä arvoja. Näitä kutsutaan *alkuarvoiksi* tai *reuna-arvoiksi* ja ne auttavat funktion määrittämisessä.

Määritelmä 7.6. Ongelmaa, jossa yritetään ratkaista tuntematon funktio, kutsutaan *alkuarvotehtäväksi* (AAT), jos tiedetään

1) jokin y:n toteuttama differentiaaliyhtälö, sekä
2) y:n sekä sen derivaattojen arvot jossain (samassa) pisteessä $(n-1)$:nteen derivaattaan asti, missä n on yhtälön kertaluku.

Esimerkki 7.7. Tavallinen eksponenttifunktio on ainoa funktio, jonka derivaatta on funktio itse, ja jonka arvo nollassa on 1. Tämä otetaankin usein eksponenttifunktion määritelmäksi, ja se on samalla esimerkki alkuarvotehtävästä:

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Alkuarvotehtävän ratkaisu on siis $y(x) = e^x$. Huomaa kuitenkin, että tehtävässä esiintyvän differentiaaliyhtälön toteuttaa mikä tahansa muotoa $y(x) = Ce^x$, oleva funktio, kun C on vakiokerroin. (Tämä johtuu siitä, että vakiokerroin ei kuitenkaan muutu derivoitaessa.) Sen sijaan näistä funktioista ainoa, joka toteuttaa alkuarvoehdon $y(0) = 1$, on se jossa $C = 1$, sillä

$$y(0) = 1 \iff Ce^0 = 1 \iff C \cdot 1 = 1 \iff C = 1.$$

Esimerkki 7.8. Kappale liikkuu x-akselilla. Kuvatkoon $x : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ kappaleen sijaintia ajan t funktiona. Tällöin kappaleen nopeus ajanhetkellä t on sijainnin muutosnopeus, eli $x'(t)$. Kappaleen kiihtyvyys on puolestaan $x''(t)$.

Oletetaan, että kappaleen kiihtyvyys on koko ajan 1, jolloin saadaan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$x''(t) = 1.$$

Tämä DY on helppo ratkaista vaiheittain. Koska x'' on x':n derivaatta, on x' puolestaan x'':n integraalifunktio, eli

$$x'(t) = \int x''(t)\, dt = \int 1\, dt = t + V.$$

Tässä V on integroimisvakio. Samalla tavoin x on x':n integraalifunktio, joten

$$x(t) = \int x'(t)\, dt = \int t + V\, dt = \frac{1}{2}t^2 + Vt + S,$$

missä S on toinen integroimisvakio. Ollaan siis saatu ratkaistuksi funktio x, ja itse asiassa mikään muunlainen funktio ei toteuta yhtälöä. Funktiossa on kuitenkin vielä kaksi tuntematonta vakiota V ja S.

Oletetaan nyt lisäksi, että kappale lähti pisteestä 2 nopeudella 3 oikealle päin, eli

$$x(0) = 2 \quad \text{ja} \quad x'(0) = 3.$$

Koska nyt tunnetaan ratkaistavan funktion ja sen derivaatan arvo ajanhetkellä 0, ratkaistavana on alkuarvotehtävä. Sijoittamalla ensimmäinen alkuarvoehto jo ratkaistun funktion lausekkeeseen saadaan

$$x(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + V \cdot 0 + S = 2,$$

josta nähdään, että $S = 2$. Sijoittamalla toinen alkuarvoehto ratkaistun funktion derivaatan lausekkeeseen saadaan

$$x'(0) = 0 + V = 3,$$

joten $V = 3$. Alkuarvotehtävän yksikäsitteinen ratkaisu on siis

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 2.$$

Esimerkki 7.9. Aina alkuarvoehtokaan ei riitä yhtälön yksikäsitteiseen ratkaisemiseen. Tarkastellaan vaikkapa alkuarvotehtävää

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

Heti nähdään, että vakiofunktio $y_1(x) = 0$ toteuttaa yhtälön ja alkuarvoehdon, joten se on eräs ratkaisu. Toisaalta myös $y_2(x) = \frac{1}{4}x^2$ on ratkaisu. Tämän derivaatta on nimittäin $y_2'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot x = \frac{1}{2}x$, ja toisaalta

$$\sqrt{y_2} = \sqrt{\frac{1}{4}x^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{x^2} = \frac{1}{2}x,$$

joten $y_2' = \sqrt{y_2}$. Lisäksi y_2 toteuttaa myös alkuarvoehdon.

7.1. **Separoituvat differentiaaliyhtälöt.** Separoituvia differentiaaliyhtälöitä esiintyy käytännön tilanteissa melko usein, ja niiden ratkaisumenetelmä on yksinkertainen. Separoituvassa differentiaaliyhtälössä muuttujan arvo ja funktion arvo saadaan yhtäsuuruusmerkin eri puolille.

Määritelmä 7.10. Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä kutsutaan *separoituvaksi*, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$g(y)y' = h(x),$$

missä $g(y)$ on lauseke, jossa ei esiinny ollenkaan muuttujaa x (paitsi funktion y muuttujana) ja $h(x)$ on lauseke, jossa ei esiinny lainkaan tuntematonta funktiota y.

Esimerkki 7.11.

a) Yhtälö

$$2yy' = x^2$$

on separoituva. Tässä $g(y) = 2y$ ja $h(x) = x^2$.

b) Myös yhtälö

$$y' = (x + 2)y^2$$

on separoituva, jos $y \neq 0$, sillä se voidaan tällöin jakaa puolittain y^2:lla, jolloin saadaan

$$\frac{y'}{y^2} = x + 2.$$

Tässä $g(y) = 1/y^2$ ja $h(x) = x + 2$.

c) Yhtälö

$$y' + 2y = x$$

ei ole separoituva, sillä se ei ole muotoa $g(y)y' = h(x)$, eikä sitä voi myöskään muuttaa tähän muotoon.

Separoituvan differentiaaliyhtälön ratkaiseminen perustuu yhdistetyn funktion integrointisääntöön. Tarkoituksena on muuntaa yhtälöä niin, että y:n derivaatta häviää.

Kun muistetaan, että y on itse asiassa x:n funktio, niin huomataan, että yhtälön vasemmalla puolella oleva $g(y) = g(y(x))$ on yhdistetyn funktion lauseke. Merkitään G:llä jotain funktion g integraalifunktiota. Tällöin $G' = g$, joten separoituva yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$G'(y(x))y'(x) = h(x).$$

Tässä on merkitty nyt funktion y muuttuja x näkyviin, jotta yhdistetyn funktion lauseke olisi helpompi hahmottaa. Yhdistetyn funktion derivoimissäännön mukaan vasen puoli on

$$G'(y(x))y'(x) = D\ G(y(x)),$$

joten

$$D\ G(y(x)) = h(x).$$

Siispä h on funktion $G \circ y$ derivaatta, joten $G \circ y$ on h:n integraalifunktio. Merkitään jotain h:n integraalifunktiota H. Koska integraalilaskennan peruslauseen mukaan saman funktion integraalifunktio voivat poiketa toisistaan vain vakiolla, voidaan lopulta kirjoittaa $G(y(x)) = H(x) + C$, eli

$$G(y) = H(x) + C.$$

Tämä on nyt tavallinen yhtälö, koska siinä ei enää esiinny y:n derivaattoja. Tästä ratkaistaan yleensä vielä y, mutta se ei ole aina välttämättä mahdollista.

Esimerkki 7.12. Ratkaistaan yhtälö

$$2yy' = x^2.$$

Tässä $g(y) = 2y$ ja $h(x) = x^2$. Funktio g on siis ikään kuin *muuttujan y funktio*, ja sen eräs integraalifunktio on $G(y) = y^2$. Funktion h integraalifunktioksi voidaan valita esimerkiksi

$H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$. Edellä esitetyn ratkaisumenetelmän mukaan $G(y) = H(x) + C$, missä C on jokin vakio, joten

$$y^2 = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Tästä voidaan vielä ratkaista y ottamalla molemmilta puolilta neliöjuuri. Täytyy kuitenkin muistaa erikseen merkitä positiiviset ja negatiiviset ratkaisut.

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x^3 + C}.$$

Usein yhtälön muuttaminen separoituvaan muotoon vaatii lisäoletuksia, joiden avulla voi löytyä lisäratkaisuja. Tällaisia ratkaisuja, jotka löytyvät ennen kuin yhtälö on separoituvassa muodossa, kutsutaan *erillisratkaisuiksi.*

Esimerkki 7.13. Ratkaistaan yhtälö

$$y' = y^2.$$

Yhtälö ei ole separoituvassa muodossa, mutta se voidaan helposti muuttaa sellaiseen jakamalla termillä y^2. Tämä on kuitenkin kiellettyä, jos $y = 0$. Toisaalta funktio $y(x) = 0$ toteuttaa kyseisen yhtälön. Se on siis erillisratkaisu.

Erillisratkaisun löydyttyä voidaan oletettaa, että $y \neq 0$. Jaetaan yhtälö puolittain y^2:lla:

$$y^{-2}y' = 1.$$

Nyt $g(y) = y^{-2}$, ja tämän eräs integraalifunktio on $G(y) = -y^{-1}$. Toisaalta funktion $h(x) = 1$ eräs integraalifunktio on $H(x) = x$. Saadaan siis

$$-y^{-1} = x + C,$$

josta ratkeaa helposti

$$y(x) = -\frac{1}{x + C}.$$

Tämä separoimalla saatu ratkaisu ei saa koskaan arvoa 0, niin kuin oletettiinkin. Yhtälön ratkaisuja ovat siis erillisratkaisun lisäksi kaikki separoimalla saadut ratkaisut, jotka riippuvat vakiosta C:

$$y(x) = 0 \quad \text{tai} \quad y(x) = -\frac{1}{x + C}.$$

Jos tehtävässä olisi vielä alkuarvoehto, sen avulla voitaisiin valita oikea ratkaisu. Jos esimerkiksi $y(1) = 0$, niin tiedetään, että erillisratkaisu $y(x) = 0$ on oikea, koska separoimalla saatu ratkaisu ei voi koskaan saada arvoa 0.

Separoituvan yhtälön ratkaisussa voi käyttää eräitä muistamista helpottavia merkintöjä. Jos nimittäin $g(y)y' = h(x)$, saadaan puolittain integroimalla

$$\int g(y)y'\,dx = \int h(x)\,dx + C.$$

Tässä siis merkitään integraali ilman integroimisväliä, mikä tarkoittaa integraalifunktiota. Integroimisvakio tarvitaan, koska integraalifunktio ei ole yksikäsitteinen. Jos nyt merkitään $y'\,dx = dy$, niin yhtälö tulee muotoon

$$\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx + C.$$

Vasemmalla puolella on siis integraali y:n suhteen. Merkintää $y'\,dx$ käytetään vain muistamisen helpottamiseksi, ja ainoa perustelu, joka sille voidaan antaa, on, että se toimii integroitaessa. Jos tätä merkintää käyttää, kannattaa kirjoittaa koko ajan $y(x)$:n sijasta y.

Esimerkki 7.14. Ratkaistaan separoituva yhtälö $y'(x)\sin y(x) = 2x$. Kirjoitetaan yhtälö ensin muodossa $\sin y \cdot y' = 2x$. Integroidaan tämä sitten puolittain x:n suhteen ja merkitään $y'\,dx = dy$:

$$\begin{aligned} &\int \sin y \cdot y'\,dx = \int 2x\,dx + C \\ \iff &\int \sin y\,dy = \int 2x\,dx + C \\ \iff &-\cos y = x^2 + C \\ \iff &\cos y = -x^2 - C. \end{aligned}$$

Näin saadaan kätevästi y' häviämään. Koska y:n ratkaiseminen viimeksi saadusta yhtälöstä olisi liian vaikeaa, jätetään ratkaisu tähän muotoon.

7.2. **Eksponentiaalinen kasvu.** Separoimismenetelmällä voidaan ratkaista *eksponentiaalisen kasvun malliin* liittyvät yhtälöt. Jos suureen muutosnopeus tietyllä hetkellä on suoraan verrannollinen sen arvoon, eli $y'(t) = k \cdot y(t)$, on kyseessä eksponentiaalinen kasvu. Suureen arvo siis kasvaa sitä nopeammin, mitä suurempi se on, tai vaihtoehtoisesti hitaammin, mikäli verrannollisuuskerroin k on negatiivinen. Tällaisessa tapauksessa ratkaisussa on aina eksponenttifunktio.

Esimerkki 7.15. Radioaktiivisen hajoamisen nopeus on suoraan verrannollinen hajoavan aineen määrään. Oletetaan, että hajoavaa ainetta on alussa 100 kg, ja vuoden päästä enää 50 kg. Muodostetaan ensin hajoamista kuvaava alkuarvotehtävä:

$$m(t)' = km(t), \quad m(0) = 100 \text{ (kg)}.$$

Tässä on huomattava, että hajoamisnopeus tai aineen määrä *eivät* ole suoraan verrannollisia *aikaan*, joten ei voida kirjoittaa $m'(t) = kt$ tai $m(t) = kt$.

Saatu yhtälö on separoituva, jos $m \neq 0$. Erillisratkaisu $m(t) = 0$ ei toteuta alkuarvoehtoa, joten se hylätään. Voidaan siis olettaa, että $m \neq 0$, jolloin saadaan

$$\frac{m'}{m} = k.$$

Vasemmalla puolella $g(m) = 1/m$. Koska m on aina positiivinen (aineen määrä), integraalifunktioksi tulee $G(m) = \ln m$. Oikean puolen integraalifunktio on $H(t) = kt$. Siispä

$$\ln m(t) = kt + C.$$

Koska logaritmi m:stä kertoo, mihin potenssiin kantaluku pitäisi korottaa, jotta saataisiin $kt + C$, nähdään että

$$m(t) = e^{kt+C} = e^C e^{kt}.$$

On tapana merkitä $e^C = m_0$. Alkuarvoehdon mukaan

$$m(0) = m_0 e^0 = m_0 \cdot 1 = 100,$$

joten $m_0 = 100$. Alkuarvotehtävän ratkaisu on siis

$$m(t) = 100e^{kt}.$$

Verrannollisuuskerroin k on vielä tuntematon. Tämä saadaan ratkaistuksi annetun lisätiedon avulla. Sen mukaan vuoden kuluttua ainetta on jäljellä 50 kg, joten

$$m(1) = 100e^{k\cdot 1} = 100e^k = 50,$$

josta

$$e^k = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \iff k = \ln\frac{1}{2} \approx -0{,}693.$$

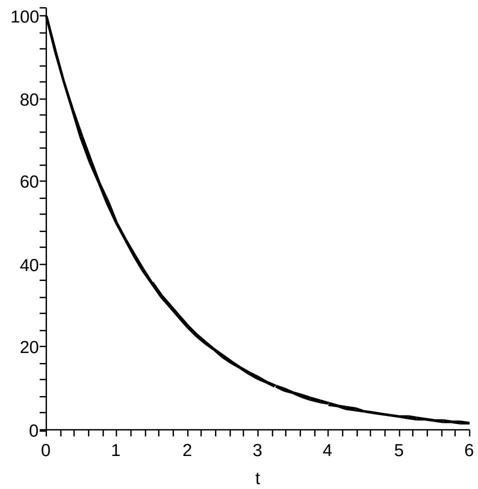
Aineen määrää kuvaava funktio on siis

$$m(t) = 100e^{-0{,}69t}.$$

Koska $\ln(0{,}5) \approx -0{,}69$, voidaan kantalukua vaihtamalla kirjoittaa myös

$$m(t) = 100e^{\ln 0{,}5 \cdot t} = 100 \cdot 0{,}5^t.$$

Tämä muoto on joskus kätevämpi sovelluksissa.



Esimerkki 7.16. Ratkaistaan osion alussa esiintynyt paistin paistamiseen liittyvä alkuarvotehtävä. Paistin lämpenemisnopeus on suoraan verrannollinen uunin ja paistin lämpötilojen erotukseen. Lisäksi alussa paisti oli huoneenlämpöinen. Näin saadaan seuraavanlainen alkuarvotehtävä:

$$T' = k(200 - T), \quad T(0) = 21.$$

Nyt voitaisiin ajatella, että tuntematon suure ei olisikaan paistin lämpötila T, vaan paistin ja uunin lämpötilojen erotus $E = 200 - T$. Tällöin $E' = 0 - T' = -T'$, joten uudeksi yhtälöksi saataisiin $-E' = kE$ tai yhtäpitävästi $E' = -kE$. Tämä osoittaa, että kyse on eksponentiaalisesta kasvusta. Ratkaistaan tehtävä tällä kertaa kuitenkin alkuperäistä yhtälöä käyttämällä.

Muutetaan aluksi yhtälö separoituvaan muotoon jakamalla se puolittain termillä $200-T$. Tällöin saataisiin erillisratkaisu $T(t) = 200$, mutta koska alkuhetkellä $T = 21$, ei tämä tule kyseeseen. Näin saadaan

$$\frac{T'}{200 - T} = k.$$

Integroidaan nyt yhtälö puolittain t:n suhteen:

$$\begin{aligned} &\int \frac{T'}{200 - T}\, dt = \int k\, dt + C \\ \iff &\int \frac{1}{200 - T} \cdot T'\, dt = \int k\, dt + C \\ \iff &\int \frac{1}{200 - T}\, dT = \int k\, dt + C. \end{aligned}$$

Vasemmalla puolella on nyt käytettävä yhdistetyn funktion sääntöä, koska integroitavana on $(200 - T)^{-1}$. Sisäfunktion $g(T) = 200 - T$ derivaatta on $g'(T) = -1$, ja ulkofunktion $f(x) = x^{-1}$ integraalifunktio on $F(x) = \ln|x|$. Tehtävässä paisti on koko ajan uunia kylmempi, eli $200 - T > 0$, joten itseisarvomerkit voi jättää pois. Näin saadaan

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{200-T}\,dT = \int k\,dt + C \\
\iff & -\int \frac{1}{200-T}\cdot(-1)\,dT = \int k\,dt + C \\
\iff & -\ln(200-T) = kt + C \\
\iff & \ln(200-T) = -kt + C \\
\iff & 200 - T = e^{-kt+C} \\
\iff & T = 200 - e^{-kt+C} = 200 - e^{C}e^{-kt}.
\end{aligned}$$

Merkitään nyt $e^C = E_0$, jolloin

$$T(t) = 200 - E_0 e^{-kt}.$$

Alkuarvoehdon mukaan

$$T(0) = 200 - E_0 e^0 = 200 - E_0 \cdot 1 = 21,$$

josta

$$E_0 = 200 - 21 = 179.$$

(Vakio E_0 vastaa siis nyt uunin ja paistin lämpötilojen erotusta alkuhetkellä.) Alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$T(t) = 200 - 179e^{-kt}.$$

Verrannollisuuskerroin k voitaisiin ratkaista jostain lisätiedosta. Tämä voisi olla esimerkiksi paistin lämpötila tunnin kuluttua paistamisen alusta.

Kerrataan vielä separoituvan yhtälön ratkaisumenetelmän vaiheet.

1) Muutetaan yhtälö separoituvaan muotoon $g(y)y' = h(x)$. Tässä vaiheessa saattaa löytyä erillisratkaisuja.
2) Etsitään vasemman puolen ulkofunktiolle g integraalifunktio G.
3) Etsitään funktion h integraalifunktio H.
4) Ratkaisu, josta y' on hävinnyt, on $G(y) = H(x) + C$.
5) Lopuksi ratkaistaan y, jos osataan.