6. Joitain erityisfunktioita

6.1. Eksponenttifunktio. Luvun a potenssi a^k on tähän mennessä määritelty vain niissä tapauksissa, joissa k on kokonais- tai murtoluku. Tätä määritelmää voidaan kuitenkin laajentaa koskemaan myös muita reaalilukuja. Tämän avulla voidaan laskea esimerkiksi luku $2^{\sqrt{2}}$. Määritelmää ei käydä läpi tällä kurssilla, vaan sen sijaan luotetaan siihen, että laskin antaa tällaisille luvuille tarvittaessa hyviä likiarvoja.

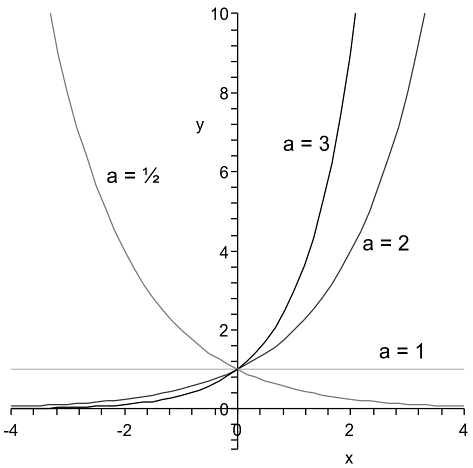
Kun potenssi laajennetaan koskemaan mitä tahansa lukuja, voidaan muodostaa funktio, jonka arvot ovat jonkin positiivisen vakion a arvoja korotettuina muuttujan osoittamiin potensseihin. Tämä funktio on nimeltään *a-kantainen eksponenttifunktio*, ja sitä merkitään usein $\exp_a$.

Määritelmä 6.1. Funktiota $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp_a(x) = a^x$, missä a on jokin positiivinen vakio, kutsutaan *a-kantaiseksi eksponenttifunktioksi.* Vakiota a kutsutaan eksponenttifunktion *kantaluvuksi.*

Potenssifunktion ja eksponenttifunktion ero on siis se, että potenssifunktiossa muuttujan arvo korotetaan vakiopotenssiin, kun taas eksponenttifunktiossa vakio korotetaan muuttujan osoittamaan potenssiin. Huomaa, että jälkimmäisessä tapauksessa vakion a on määritelmän mukaan oltava positiivinen.

Esimerkki 6.2. Olkoot $f(x) = x^2$ ja $g(x) = 2^x$. Tällöin $f(1) = 1^2 = 1$, $f(-1) = (-1)^2 = 1$ ja $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$. Toisaalta $g(1) = 2^1 = 2$, $g(-1) = 2^{-1} = 1/2$ ja $g(\sqrt{2}) = 2^{\sqrt{2}} \approx 2{,}665$. Kuitenkin $f(2) = 2^2 = g(2)$.

Eksponenttifunktio on (kantaluvusta riippumatta) kaikkialla jatkuva ja derivoituva sekä aina aidosti positiivinen. Alla on eksponenttifunktion kuvaajia erilaisilla kantaluvun a arvoilla. Jos $a > 1$, niin eksponenttifunktio on aidosti kasvava. Jos taas $a < 1$, niin funktio on aidosti vähenevä.



Potenssien laskusäännöt pätevät myös eksponenttifunktiolle:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $a^{-x} = 1/a^x$
4. $a^0 = 1$

Kun kantaluvuksi valitaan ns. *Neperin luku* e, saadaan erityisen mielenkiintoinen eksponenttifunktio. Yleensä, jos puhutaan eksponenttifunktiosta kantalukua mainitsematta, tarkoitetaan juuri tätä funktiota.

Määritelmä 6.3. Funktiota

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x$$

kutsutaan *(tavalliseksi) eksponenttifunktioksi.* Vakio e on irrationaaliluku, jonka likiarvo on 2,71828.

Tavallisen eksponenttifunktion tärkein ominaisuus on se, että sen derivaatan arvo on joka pisteessä sama kuin itse funktion arvo:

$$D\ e^x = e^x.$$

Tämä ominaisuus on hyvin tärkeä muun muassa differentiaaliyhtälöiden yhteydessä.

Esimerkki 6.4. Eksponenttifunktioiden yhteydessä tulon ja yhdistetyn funktion derivointisäännöt tulevat tarpeeseen. Derivoidaan esimerkin vuoksi funktio $f(x) = xe^{2x}$. Kyseessä on siis polynomin ja eksponenttifunktion tulo. Tulon derivointisäännön mukaan

$$f'(x) = Dx \cdot e^{2x} + x \cdot De^{2x} = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot De^{2x} = e^{2x} + x \cdot De^{2x}.$$

Derivoimatta jäi vielä De^{2x}. Tämä on yhdistetyn funktion lauseke, missä ulkofunktiona on $g(x) = e^x$ ja sisäfunktiona $h(x) = 2x$. Ulko-osan derivaatta on e^x, ja sisäosan derivaatta on 2. Yhdistetyn funktion derivoimissäännön mukaisesti saadaan siis

$$De^{2x} = g'(h(x))h'(x) = g'(2x) \cdot 2 = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}.$$

Lopputulos on siis

$$f'(x) = e^{2x} + x \cdot De^{2x} = e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = e^{2x} + 2xe^{2x} = e^{2x}(1 + 2x).$$

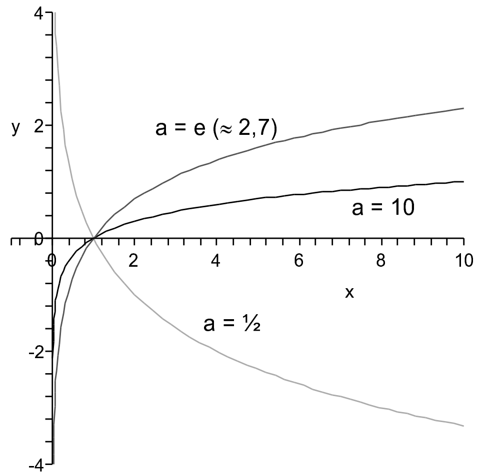
6.2. **Logaritmifunktio.** Logaritmifunktio on eksponenttifunktion *käänteisfunktio.* Tämä tarkoittaa sitä, että eksponenttifunktion arvo syötettynä logaritmifunktiolle palauttaa alkuperäisen muuttujan arvon. Toisaalta myös logaritmifunktion arvo syötettynä eksponenttifunktiolle palauttaa alkuperäisen arvon.

Määritelmä 6.5. Olkoon a jokin positiivinen vakio. Voidaan osoittaa, että on olemassa funktio $\log_a :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$\log_a a^x = a^{\log_a x} = x.$$

Tätä funktiota kutsutaan *a-kantaiseksi logaritmifunktioksi.*

Luvusta x otettu a-kantainen logaritmi kertoo siis, mihin potenssiin a täytyy korottaa, jotta saataisiin x (sillä $a^{\log_a x} = x$). Huomaa, että logaritmi on määritelty vain positiivisilla luvuilla, koska positiivinen a korotettuna mihin tahansa potenssiin on aina positiivinen. Kuten eksponenttifunktio, myös logaritmifunktio on kantaluvusta riippumatta derivoituva koko määrittelyjoukossaan, ja jos $a > 1$, niin logaritmifunktio on kasvava, jos $a < 1$, niin se on vähenevä.



Esimerkki 6.6. Logaritmi luvusta x kertoo, mihin potenssiin kantaluku täytyy korottaa, jotta saataisiin x. Siispä

$$\log_2 16 = 4, \quad \log_3 9 = 2, \quad \log_5 125 = 3.$$

Lisäksi kaikilla kantaluvuilla a pätee

$$\log_a 1 = 0, \quad \text{ja} \quad \log_a a = 1.$$

Eksponenttifunktion laskusäännöistä voidaan johtaa logaritmin laskusääntöjä.

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a x^y = y \log_a x$
3. $\log_a(1/x) = -\log_a x$
4. $\log_a 1 = 0$

Esimerkiksi 1 sääntö voidaan johtaa seuraavasti. Logaritmi $\log_a xy$ kertoo, mihin potenssiin a täytyy korottaa, jotta saataisiin xy. Eksponenttifunktion laskusäännön 1 sekä logaritmifunktion määritelmän avulla saadaan $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy$. Siis $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

Joidenkin kantalukujen tapauksissa on tapana käyttää logaritmista omaa merkintää. Esimerkiksi

$$\log_{10} x = \lg x, \quad \log_e x = \ln x, \quad \log_2 x = \operatorname{lb} x.$$

Esimerkki 6.7. Kymmenkantainen logaritmi kertoo suunnilleen, kuinka monta numeroa luvussa on:

$$\lg 10 = 1, \quad \lg 120 \approx 2 \quad \lg 10000 = 4, \quad \lg 987654321 \approx 9.$$

Erikantaisista logaritmeista matematiikassa tärkein on ln. Sitä kutsutaan *luonnolliseksi logaritmiksi*, ja se on tavallisen eksponenttifunktion käänteisfunktio. Monesti sitä merkitään yksinkertaisesti log (ilman kantalukua). Luonnollisen logaritmin derivaatta on

$$D \; \ln x = \frac{1}{x}.$$

Esimerkiksi yhdistetyn funktion derivoimissäännöllä voidaan näyttää, että myös $D \ln(-x) = 1/x$. Tästä saadaan integroimissääntö

$$\int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \Big/_{\!a}^{\!b} \ln|x|.$$

Itseisarvo tarvitaan, koska ei tiedetä, onko väli $[a, b]$ positiivisella vai negatiivisella puolella. Logaritmiin ei nimittäin voi sijoittaa negatiivisia lukuja. Nyt voidaan vihdoin kirjoittaa potenssin integroimissääntö kokonaisuudessaan:

$$\int_a^b x^k\,dx = \mathop{\Big/}_a^b \frac{1}{k+1}x^{k+1}, \quad \text{jos } k \neq -1,$$
$$\int_a^b x^{-1}\,dx = \mathop{\Big/}_a^b \ln|x|.$$

Esimerkki 6.8. Integroidaan funktiota $f(x) = 1/x$ välillä $[1, e]$. Funktion f (eräs) integraalifunktio on $\ln|x|$. Koska esimerkin integroimisvälillä pätee $x > 0$, integraalifunktio on itse asiassa $\ln x$. Täten

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \mathop{\Big/}_1^e \ln x = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Integroidaan sitten samaa funktiota välillä $[-2, -1]$. Koska nyt $x < 0$, integraalifunktio on $\ln|x| = \ln(-x)$. Siispä

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \mathop{\Big/}_{-2}^{-1} \ln(-x) = \ln 1 - \ln 2 = 0 - \ln 2 = -\ln 2 = \ln\frac{1}{2}.$$

Huomaa, että funktiota f ei voi integroida esimerkiksi välillä $[-1, 1]$, koska f ei ole määritelty nollassa.

6.3. **Kantaluvun vaihtaminen.** Kaikki eksponentti- ja logaritmifunktiot voidaan ilmaista tavallisen eksponenttifunktion ja luonnollisen logaritmifunktion avulla. Koska $e^{\ln a} = a$, saadaan ensinnäkin

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{\ln a \cdot x}.$$

Toisaalta $\log_a y$ on se luku x, johon a pitää korottaa, jotta saataisiin y. Edellisen yhtälön mukaan tämä luku kerrottuna luvulla $\ln a$ on se luku, johon e pitää korottaa, jotta saataisiin y. Saadaan siis seuraavat laskusäännöt kantaluvun vaihtamiselle:

$$\exp_a(x) = \exp(\ln a \cdot x),$$
$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Itse asiassa tässä voisi olla toisena kantalukuna muukin kuin e. Voitaisiin esimerkiksi vaihtaa kantaluvuksi 10 seuraavilla kaavoilla:

$$\exp_a(x) = \exp_{10}(\lg a \cdot x),$$
$$\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}.$$

Esimerkki 6.9. Ratkaistaan yksinkertainen eksponenttiyhtälö $4^x = 10$. Koska $4^1 = 4$ ja $4^2 = 16$, ratkaisu on oletettavasti ykkösen ja kakkosen välissä. Logaritmin määritelmän perusteella ratkaisu on $x = \log_4 10$, mutta tavallisella laskimella tätä ei voi suoraan laskea. Laskimen näppäimissä on yleensä vain luonnollinen logaritmi (ln tai log) sekä toisinaan myös kymmenkantainen logaritmi (lg, joskus myös log). Käytetään siis kantaluvun vaihtoa:

$$x = \log_4 10 = \frac{\ln 10}{\ln 4} \approx \frac{2{,}303}{1{,}386} \approx 1{,}66.$$

Esimerkin yhtälön voi ratkaista myös toisella tavalla. Logaritmien laskusääntöjen mukaan nimittäin $\ln 4^x = x \ln 4$. Voidaan siis päätellä seuraavasti:

$$\begin{aligned} 4^x = 10 &\iff \ln 4^x = \ln 10 \\ &\iff x \ln 4 = \ln 10 \quad | : \ln 4 \\ &\iff x = \frac{\ln 10}{\ln 4}. \end{aligned}$$

Esimerkki 6.10. Derivoidaan funktio $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$. Edellisen laskusäännön perusteella

$$f'(x) = Dx^x = D\left(e^{\ln x \cdot x}\right).$$

Tämä voidaan laskea yhdistetyn funktion derivaattana. Ulkofunktio on tavallinen eksponenttifunktio, jonka derivaatta on kyseinen funktio itse. Ulko-osa säilyy siis koskemattomana. Sisäfunktion lauseke on puolestaan $\ln x \cdot x$, jonka derivoimiseen käytetään tulon derivointisääntöä:

$$D(\ln x \cdot x) = D(\ln x) \cdot x + \ln x \cdot Dx = \frac{1}{x} \cdot x + \ln x \cdot 1 = 1 + \ln x.$$

Yhdistetyn funktion derivoimissäännön mukaisesti saadaan lopulta

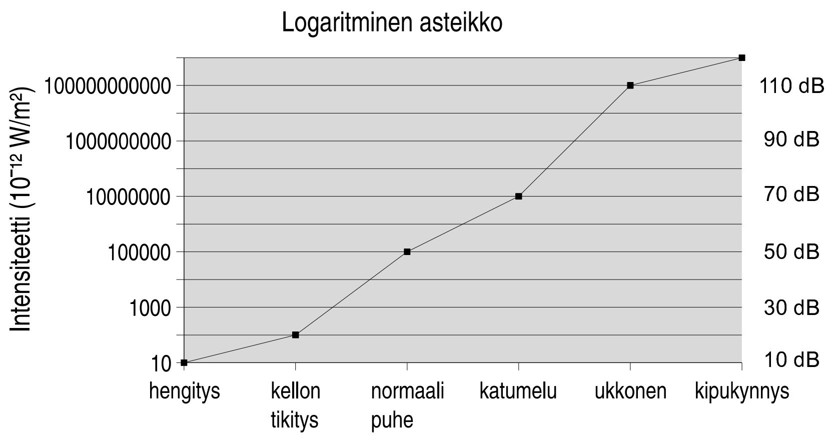
$$f'(x) = D\left(e^{\ln x \cdot x}\right) = e^{\ln x \cdot x} \cdot D(\ln x \cdot x) = e^{\ln x \cdot x} \cdot (1 + \ln x).$$

Lopputulos voidaan vielä kirjoittaa muotoon $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$.

6.4. **Logaritminen asteikko.** Toisinaan on käytännöllistä ilmaista jonkin suureen arvoja ns. *logaritmisen asteikon* avulla. Tämä tulee kyseeseen erityisesti, jos suureen arvot vaihtelevat erityisen laajoissa rajoissa. Logaritmin ottaminen palauttaa arvot ymmärrettävälle asteikolle.

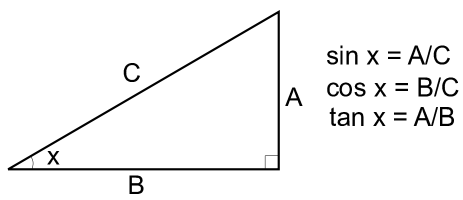
Esimerkiksi kuuloaisti toimii siten, että äänen intensiteetin kymmenkertaistaminen lisää kuulovaikutelman voimakkuutta vakiomäärällä, oli kyse sitten kovista tai hiljaisista äänistä. (Siis kymmenkertainen voimakkuuden muutos alkuperäiseen verrattuna kuulostaa samalta kuin satakertainen kymmenkertaiseen verrattuna.) Jos samalla asteikolla esimerkiksi kellon tikityksen voimakkuus on 1 ja puheen 10, on ukkosen voimakkuus jopa 1000. Tällaisella asteikolla pienet vaihtelut jäävät asteikon alapäässä varjoon.

Äänen voimakkuuden kuvaamiseen käytetään yleisesti *desibeliasteikkoa*, joka määritellään kaavalla $L = 10 \cdot \lg(I/I_0)$. Samaa asteikkoa käytetään muissakin yhteyksissä, mutta äänenvoimakkuden tapauksessa I on äänen intensiteetti (yksikkönä $\mathrm{W/m^2}$) ja I_0 on kuulokynnystä vastaava intensiteetti. Luku L on voimakkuden vaikutelma desibeleinä. Kaavan mukaan 60 desibelin ääni on intensiteetiltään kymmenen kertaa voimakkaampi kuin 50 desibelin ääni. Toisaalta 70 desibelin ääni on jo sata kertaa voimakkaampi.



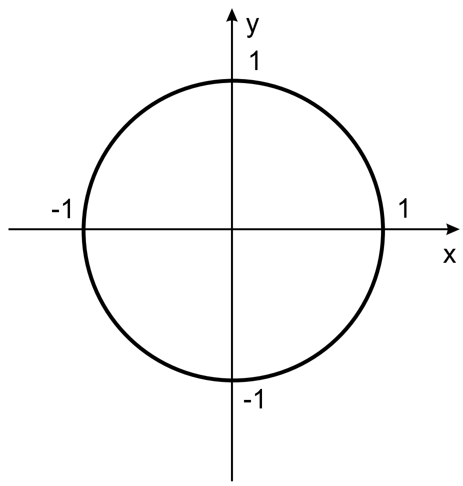
Myös äänen korkeutta kuvataan yleensä logaritmisella asteikolla. Tietty sävel soitettuna oktaavia korkeammalta on aina taajuudeltaan kaksinkertainen alkuperäiseen nähden. Esimerkiksi yksiviivainen a soi taajuudella 440 Hz, kaksiviivainen a taajuudella 880 Hz ja kolmiviivainen taajuudella 1760 Hz. Richterin asteikko, jolla ilmaistaan maanjäristysten voimakkuuksia, on myös logaritminen. Yhtä Richterin yksikköä kovempi järistys on alkuperäiseen nähden voimakkuudeltaan kymmenkertainen.

6.5. **Trigonometriset funktiot.** Tässä osassa tutustutaan sini-, kosini- ja tangenttifunktioihin. Näitä kutsutaan trigonometrisiksi funktioiksi, koska ne liittyvät kolmioiden sivujen ja kulmien suhteisiin. Ne voidaan myös määritellä suorakulmaisen kolmion avulla koulusta tutulla tavalla seuraavasti: kulman x sini, jota merkitään $\sin x$, on kulman x vastaisen kateetin pituuden suhde kolmion hypotenuusan pituuteen. Kuvan mukaisesti siis $\sin x = A/C$. Samoin määritellään, että kulman x kosini on kulman viereisen kateetin pituuden suhde hypotenuusan pituuteen. Tangentti puolestaan on vastaisen kateetin suhde viereiseen kateettiin.

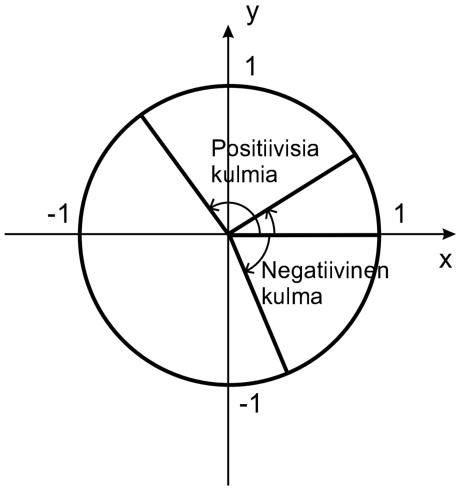


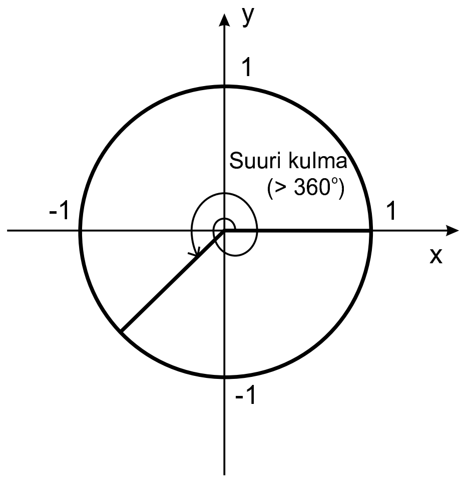
Suorakulmaisessa kolmiossa ei mikään muu kuin tuo suora kulma voi olla 90 astetta suurempi. Tällä tavoin määriteltyjen trigonometristen funktioiden määrittelyjoukoksi jää siis väli $[0, 90]$. Määritelmää voidaan kuitenkin laajentaa niin sanotun *yksikköympyrän* avulla, kun tulkitaan negatiiviset sekä 360 astetta suuremmat kulmat oikealla tavalla.

Yksikköympyrä on (x,y)-koordinaatistoon piirretty origokeskeinen ympyrää, jonka säde on 1.

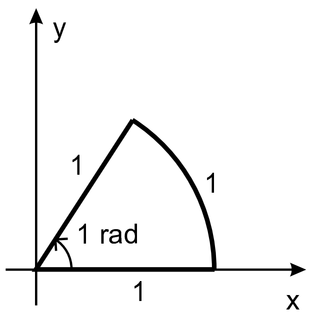


Sijoitetaan yksikköympyrään *suunnattu kulma* (eli kulma, jolla on määrätty *alkukylki* ja *loppukylki*) siten, että kulman kärkipiste on origossa ja alkukylki kulkee x-akselin positiivista puolta pitkin. Kulman suuruus on positiivinen, jos se aukeaa alkukyljestä vastapäivään, muutoin negatiivinen. Kulma voi olla laajempikin kuin täysi ympyrä.





Kulman suuruus ilmoitetaan tavallisesti *radiaaneissa* eli *absoluuttisissa kulmayksiköissä*. Yksi radiaani on sellaisen kulman laajuus, jota vastaa yksikköympyrän kehällä kaari, jonka pituus on 1.

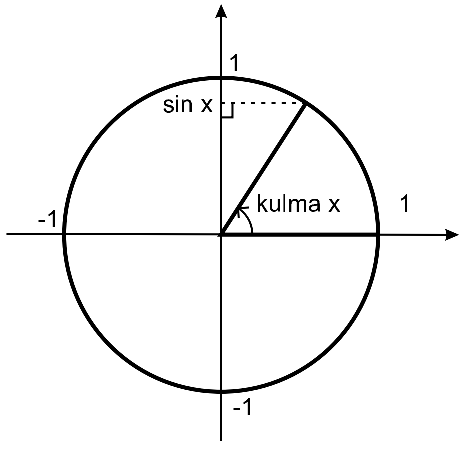


Koska yksikköympyrän kehän pituus on 2π, on koko ympyrässä eli täyskulmassa 2π radiaania, oikokulmassa $(180°)$ π radiaania ja suorassa kulmassa $\frac{\pi}{2}$ radiaania. Yleisesti asteiden ja radiaanien yhteys on seuraava:

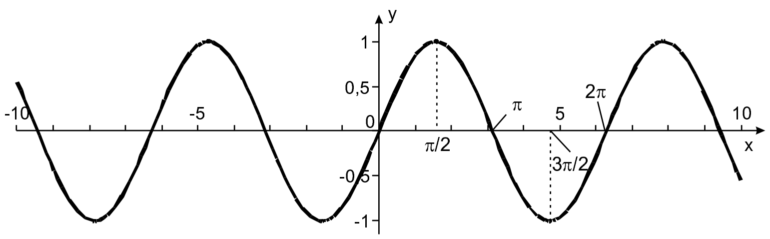
$$\text{kulman suuruus radiaaneina} = \text{kulman suuruus asteina} \cdot \frac{\pi}{180}.$$

6.6. **Sinifunktio.** Yksikköympyrään piirretyn kolmion avulla voidaan määritellä yleinen sinifunktio.

Määritelmä 6.11. Funktio $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään seuraavasti. Olkoon x yksikköympyrään sijoitetun suunnatun kulman suuruus. Tällöin $\sin x$ on kulman loppukyljen ja ympyrän kehän leikkauspisteen y-koordinaatin arvo.



Funktion määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko eli $\mathbb{R}$. Sinifunktion arvot täyttävät suljetun välin $[-1, 1]$, toisin sanoen funktio saa kaikkia arvoja ko. väliltä, välin päätepisteet mukaan lukien. Sinifunktio on kaikkialla jatkuva. Sinifunktion kuvaaja, *sinikäyrä*, aaltoilee -1:n ja 1:n välillä:



Edellisessa kuvassa kulman yksikkönä on käytetty radiaaneja, mikä on matematiikassa yleensä kätevää. Tällöin sinifunktio kasvaa x:n kasvaessa 0:sta $\frac{\pi}{2}$:een, alkaa sitten vähetä, muuttuu negatiiviseksi arvon $x = \pi$ jälkeen, alkaa taas kasvaa arvon $x = \frac{3}{2}\pi$ jälkeen ja saavuttaa uudelleen nollan kohdassa $x = 2\pi$. Tämän voi todeta helposti myös pienentämällä ja kasvattamalla suunnattua kulmaa yksikköympyrässä. Käytännössä kohdat, joissa sinifunktion suunta tai merkki vaihtuu, osuvat kohtiin, joissa tarkasteltavan kulman loppukylki siirtyy koordinaatiston neljänneksestä toiseen ja jotka siis ovat suoran kulman $\pi/2$ monikertoja.

Sinifunktio on *jaksollinen*, mikä tarkoittaa, että samat arvot toistuvat aina tietyin välein. Sinifunktion aaltoilu toistuu kuvaajassa aina 2π:n välein, ja funktiolla on ääretön määrä nollakohtia. Trigonometristen funktioiden nollakohtia laskettaessa onkin aina muistettava, että nollakohtia on funktion toistumisjakson välein ääretön määrä. Sinifunktion nollakohdat voisi esittää esimerkiksi seuraavasti:

$$x = 0 + n \cdot \pi,$$

missä n on jokin kokonaisluku (voi olla myös negatiivinen). Tällöin nollakohtia (x) ovat luvun 0 lisäksi kaikki luvut, joissa nollaan on lisätty π mielivaltaisen monta kertaa.

Esimerkki 6.12. Etsitään väliltä $[0, 4]$ ne luvut x, jotka toteuttavat yhtälön $\sin(2x + \pi/2) = 0$. Koska sinifunktio saa arvon nolla kohdassa 0 sekä aina π:n välein, nähdään että

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \iff 2x + \frac{\pi}{2} = 0 + n \cdot \pi,$$

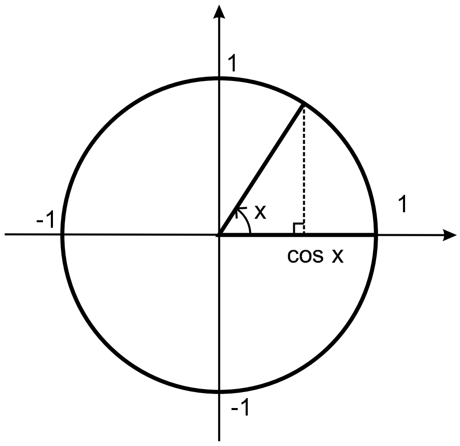
missä n on mielivaltainen kokonaisluku. Saadusta yhtälöstä voidaan sitten ratkaista x:

$$\begin{aligned} 2x + \frac{\pi}{2} = n \cdot \pi &\iff 2x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad \mid : 2 \\ &\iff x = -\frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

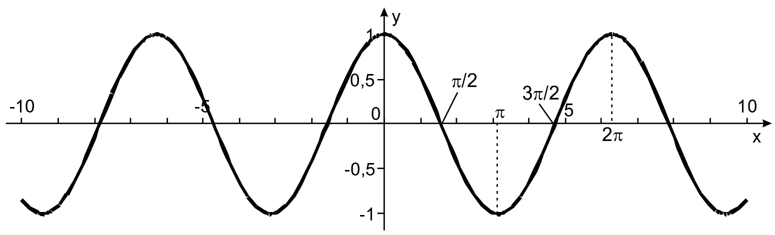
Nähdään siis, että kysytty yhtälö toteutuu pisteessä $x = -\pi/4$, sekä tämän jälkeen aina $\pi/2$:n välein. Näistä luvuista tutkittavalle välille osuvat $\pi/4 \approx 0{,}785$, $3\pi/4 \approx 2{,}36$ ja $5\pi/4 \approx 3{,}93$.

6.7. **Kosinifunktio.** Kosinifunktion määritelmä on hyvin samankaltainen kuin sinifunktion.

Määritelmä 6.13. Olkoon x yksikköympyrään sijoitetun suunnatun kulman suuruus. Tällöin $\cos x$ on kulman loppukyljen ja ympyrän kehän leikkauspisteen x-koordinaatin arvo.



Myös kosinifunktio on määritelty kaikkialla $\mathbb{R}$:ssä ja se saa arvot väliltä $[-1, 1]$. Samaten kosinifunktio on jatkuva kaikkialla ja toistuu 2π:n pituisella jaksolla. Itse asiassa kosinifunktion kuvaaja on kuin sinifunktion kuvaaja siirrettynä sen verran vasemmalle, että lähtöarvolla 0 funktio saa arvon 1. Tämä näkyy kaavassa $\cos x = \sin(x + \pi/2)$.



Kosinifunktion nollakohdat on helppo ilmaista samaan tapaan kuin sinifunktion, tällä kertaa nollakohtaa ei kuitenkaan löydy arvolta $x = 0$ vaan muun muassa kohdasta $x = \frac{\pi}{2}$. Nollakohdat ovat siis:

$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi,$$

missä n on jälleen kerran mielivaltainen kokonaisluku.

6.8. **Peruskaavoja.** Sini- ja kosinifunktioiden jaksollisuudesta johtuen samat funktioiden arvot toistuvat tasavälein $(n \cdot 2\pi)$ määrittelyjoukkoa (lukusuoraa) pitkin liikuttaessa. Tämä voidaan ilmaista seuraavilla kaavoilla:

$$\sin x = \sin(x + n \cdot 2\pi),$$
$$\cos x = \cos(x + n \cdot 2\pi),$$

joissa n on mielivaltainen kokonaisluku. Yksikköympyrää tutkimalla voidaan myös helposti johtaa seuraavat säännöt sini- ja kosinifunktioiden arvoille:

$$\sin(-x) = -\sin x,$$
$$\cos(-x) = \cos x,$$
$$\sin x = -\sin(x + \pi) = -\sin(x - \pi),$$
$$\cos x = -\cos(x + \pi) = -\cos(x - \pi).$$

Aiemmin mainittiin jo, että kosinifunktio saa samat arvot kuin sinifunktio sai aiemmissa (tai myöhemmissä pisteissä):

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right),$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right).$$

Lisäksi suorakulmaista kolmiota koskeva, geometriasta tuttu Pythagoraan lause on yhtäpitävä seuraavan ns. *trigonometrian peruskaavan* kanssa:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tag{6.14}$$

missä merkinnät $\sin^2 x$ ja $\cos^2 x$ tarkoittavat samaa kuin $(\sin x)^2$ ja $(\cos x)^2$. Ratkaisemalla tästä kaavasta $\sin x$ ja $\cos x$ saadaan sinin ja kosinin välille vielä seuraavat yhteydet:

$$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x},$$
$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

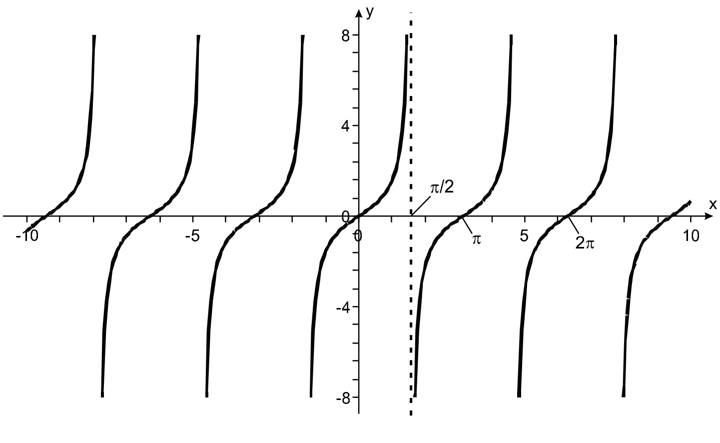
Näissä kaavoissa etumerkki täytyy valita sen mukaan, kumman etumerkin sini tai kosini saa annetulla kulman arvolla. Neliöjuurihan tuottaa kuitenkin aina positiivinen luvun.

6.9. **Tangenttifunktio.** Tangenttifunktio on kolmas tavallinen trigonometrinen funktio, jonka ominaisuudet kuitenkin poikkeavat melkoisesti sini- ja kosinifunktioiden ominaisuuksista. Se määritellään sinin ja kosinin osamääränä.

Määritelmä 6.15. Tangenttifunktion arvo kulmalla x on sinin ja kosinin osamäärä:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Tangenttifunktion määrittelyjoukosta puuttuvat kaikki $\cos x$:n nollakohdat eli pisteet, jotka ovat muotoa $\pi/2 + n\pi$, missä n voi olla mikä tahansa kokonaisluku. Tangenttifunktio on määrittelyjoukossaan jatkuva ja derivoituva ja saa arvoja koko reaalilukujen joukon alueelta. Tangenttifunktiokin on jaksollinen, jakson pituus on tällä kertaa π, ja nollakohdat ovat muotoa $x = 0 + n \cdot \pi$, missä n on kokonaisluku.



Samoin kuin sini- ja kosinifunktioille, myös tangenttifunktiolle voidaan helposti johtaa seuraavat, toisinaan laskemista helpottavat peruskaavat:

$$\tan(-x) = -\tan x,$$
$$\tan x = \tan(x + n\pi),$$

missä n on kokonaisluku.

6.10. **Trigonometristen funktioiden derivaatat.** Kun kulman yksikkönä käytetään radiaania, saavutetaan muun muassa se hyöty, että sini- ja kosinifunktiot ovat toistensa derivaattoja. Täytyy vain muistaa, että kosinifunktiota derivoitaessa on lisättävä miinusmerkki. Siis:

$$D \sin x = \cos x,$$
$$D \cos x = -\sin x.$$

Esimerkki 6.16. Derivoidaan tangenttifunktio $f(x) = \tan x$. Määritelmän mukaan

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Tangenttifunktio on derivoituva koko määrittelyjoukossaan, eli kun $\cos \neq 0$. Tällöin sen derivaatta saadaan osamäärän derivoimissäännöllä:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{D\sin x \cdot \cos x - \sin x \cdot D\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Trigonometrian peruskaavan mukaan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, joten

$$f'(x) = D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Esimerkki 6.17. Tutkitaan, missä pisteissä funktio $f(x) = 2\sin x + x$ saa ääriarvoja avoimella välillä $]0, 10[$. Tätä varten derivoidaan ensin kyseinen funktio:

$$f'(x) = 2\cos x + 1.$$

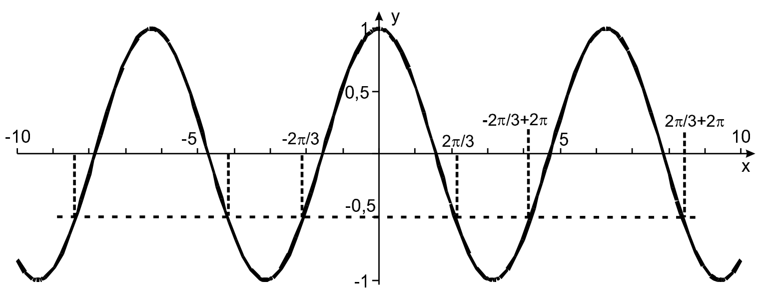
Ääriarvoja funktio voi saada vain derivaatan nollakohdissa. Ratkaistaan nämä:

$$2\cos x + 1 = 0 \iff \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Laskimella voidaan ratkaista, missä pisteissä kosini saa arvon $-1/2$. Vastaukseksi pitäisi tulla $120°$, joka on $2\pi/3$ radiaania (likiarvo 2,094). Tämän voi myös katsoa taulukosta. Nyt on kuitenkin muistettava kaksi seikkaa. Ensinnäkin kosini saa saman arvon aina 2π:n välein. Toisekseen $\cos x = \cos(-x)$, joten myös $\cos(-2\pi/3) = -1/2$. Näin saadaan kahdenlaisia ratkaisuja:

$$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi,$$

missä n voi olla mikä tahansa kokonaisluku.



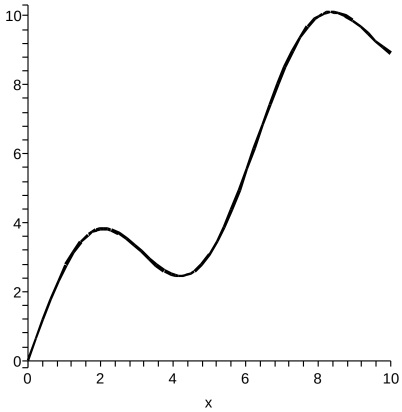
Saatuja nollakohtia tutkimalla nähdään, että niistä kysytylle välille osuvat vain

$$\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}094, \qquad \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3} \approx 8{,}378 \quad \text{ja} \quad -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3} \approx 4{,}188.$$

Laskemalla derivaatan arvoja näiden nollakohtien välissä (muista asettaa laskimeen kulmanyksiköksi radiaanit!) saadaan seuraavanlainen merkkikaavio:

	$0 < x < 2\pi/3$	$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	$4\pi/3 < x < 8\pi/3$	$8\pi/3 < x < 10$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Nähdään siis, että funktiolla f on lokaalit maksimit kohdissa $x = 2\pi/3$ ja $x = 8\pi/3$ sekä lokaali minimi kohdassa $x = 4\pi/3$.



Sinin ja kosinin derivointikaavoista saadaan jälleen vastaavat integroimiskaavat:

$$\int_a^b \sin x\,dx = \mathop{\Big/}_{a}^{b} -\cos x,$$

$$\int_a^b \cos x\,dx = \mathop{\Big/}_{a}^{b} \sin x.$$

Esimerkki 6.18. Lasketaan funktion $\sin x$ kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala välillä $[-\pi/2, \pi/2]$. Tämä voidaan tehdä integroimalla. Koska sinifunktio on välillä $[-\pi/2, 0[$ negatiivinen ja välillä $[0, \pi/2]$ positiivinen, täytyy nämä alueet kuitenkin käsitellä erikseen. Sinin integraalifunktion lauseke on $-\cos x$, joten

$$\int_{-\pi/2}^{0} \sin x\,dx = \mathop{\Big/}_{-\pi/2}^{0} -\cos x = -\cos 0 - \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -1 + 0 = -1.$$

Toisaalta

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin x\,dx = \mathop{\Big/}_{0}^{\pi/2} -\cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos 0)) = -0 + 1 = 1.$$

Ensimmäinen integraali oli negatiivinen, niin kuin pitikin. Alaksi saadaan siis yhteensä 1+1=2.