# Y100 kurssimateriaali

Syksy 2006

Jokke Häsä ja Jaakko Kortesharju

Sisältö

## 1. Johdanto

Kurssi Y100 jakautuu karkeasti seuraaviin osiin:

- funktiot ja niiden perusominaisuudet,
- derivointi,
- integrointi,
- differentiaaliyhtälöt,
- matriisilaskenta,
- tietokone matemaattisena työvälineenä.

Pääsääntöisesti kussakin osassa tarvitaan aikaisempien osien tietoja, lukuunottamatta matriisilaskentaa. Listan viimeinen osa-alue, tietokoneavusteinen matematiikka, toteutetaan luentojen ja laskuharjoitusten rinnalla osittain itsenäisenä kokonaisuutena, jonka painotus poikkeaa jonkin verran kurssin muista osista. Tarkoitus on oppia hyödyntämään MS Excel -taulukkolaskentaohjelman laskentaominaisuuksia lähinnä numeerisessa ongelmanratkaisussa sekä tutustua Maple-ohjelmaan tyypillisenä matematiikan yleistyökaluna.

Uusia käsitteitä opittaessa painotetaan sekä käsitteen sisällön omaksumista että siihen liittyviä laskumenetelmiä. Sovellettaessa opittua asiaa täytyy sekä tietää mitkä käsitteet tilanteeseen liittyvät että osata suorittaa tarvittavat mekaaniset laskut.

## 2. Reaaliarvoiset funktiot

2.1. **Funktio.** Funktio on tämän kurssin useimmin toistuva käsite. Funktio voidaan ymmärtää monella tavalla tilanteesta riippuen. Voidaan esimerkiksi sanoa, että funktio on eräänlainen kone, joka muuntaa lukuja toisiksi luvuiksi jonkin säännön mukaan. Funktion olennaisia osia ovat *määrittelyjoukko*, *maalijoukko* sekä *riippuvuussääntö*. Määrittelyjoukko sisältää ne luvut, joita funktio osaa muuntaa, maalijoukko sisältää muunnosten tulokset. Tällä kurssilla maalijoukko on aina $\mathbb{R}$ eli tavallisten reaalilukujen joukko, toisin sanoen kaikki funktion tulokset ovat tavallisia lukuja (eivät esimerkiksi kompleksilukuja, vektoreita, matriiseja, funktioita tms.) Samaten määrittelyjoukko (toiselta nimeltään *lähtöjoukko*) on aina jokin reaalilukujen osajoukko, esimerkiksi suljettu väli $[0, 1]$.

Funktion voi myös ajatella kuvaavan jonkin suureen riippuvuutta toisesta. Riippuvuussäännön on aina oltava yksikäsitteisesti olemassa, vaikka sitä ei voitaisikaan kirjoittaa laskulausekkeiden avulla (niin kuin hyvin usein on asian laita).

Funktion määrittelyssä käytetään merkintää $f : A \to \mathbb{R}$. Tämä tarkoittaa, että $f$ on funktio, jonka määrittelyjoukko on $A$ ja maalijoukko $\mathbb{R}$. Sitä lukua, joksi funktio muuntaa luvun $x$, merkitään $f(x)$ ja kutsutaan *funktion arvoksi luvulla $x$* (tai *kohdassa $x$*). Funktiolle pätee aina kaksi seikkaa:

i) jokaista määrittelyjoukon lukua vastaa jokin maalijoukosta löytyvä funktion arvo,
ii) yhtäkään lähtöjoukon lukua ei vastaa useampi kuin yksi funktion arvo.

**Huom.** Symboli $f$ on funktion *nimi* ja $f(x)$ on funktion *arvo luvulla $x$* eli toinen luku. Ei siis ole oikein sanoa esimerkiksi ”funktio $f(x)$ on jatkuva” tai ”$f = 2$, kun $x = 1$”.

**Esimerkki 2.1.** Määritellään funktio, joka kuvaa tuotteen tai palvelun markkamääräisen hinnan riippuvuutta hinnasta euroissa. Funktio muuntaa siis eurohinnan markoiksi. Hinta euroissa voi periaatteessa olla mikä tahansa positiivinen reaaliluku, joten funktion määrittelyjoukoksi voidaan ottaa $\mathbb{R}_+$ (positiiviset reaaliluvut). Funktion arvo eli hinta markoissa saadaan kertomalla euromääräinen hinta valuuttakurssilla (käytetään vuoden 2002 valuuttakurssia: 1 euro = 5,94573 markkaa) eli riippuvuussääntö voidaan kirjoittaa muodossa $f(x) = 5{,}94573 \cdot x$. Näemme helposti, että jokaista $x$ vastaa vain yksi tietty $f(x)$, joten funktion arvon yksikäsitteisyys toteutuu. Lisäksi $f(x)$:n kaikki arvot ovat reaalilukuja, joten funktion maalijoukoksi voidaan ottaa $\mathbb{R}$. Funktio voidaan siis kokonaisuudessaan määritellä seuraavasti:

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 5{,}94573 \cdot x.$$

Huomaa, että vaikka markkahintakin on tässä aina positiivinen, ei maalijoukoksi tarvitse valita joukkoa $\mathbb{R}_+$. Maalijoukon tarvitsee ainoastaan *sisältää* kaikki funktion arvot, mutta kaikkien maalijoukon lukujen ei tarvitse olla funktion arvoja.

(Joku voisi myös huomauttaa, että hinnat olisi hyvä ilmoittaa sentin tarkkuudella, jolloin määrittelyjoukkoa voitaisiin merkitä näin: $\{0.01, 0.02, 0.03, \dots\}$.)

Sovelluksissa funktio kuvaa usein jonkin suureen kehitystä ajan tai paikan mukana. Voidaan esimerkiksi ilmoittaa lämpötila ajan tai paikan funktiona. Tällöin riippuvuusehtoa ei yleensä voida antaa tarkkana laskulausekkeena. Toisinaan funktio ilmoittaa abstraktimpia riippuvuuksia, kuten aitauksen pinta-alan käytettävissä olevan aitamateriaalin funktiona. Kun funktiota käsitellään matemaattisesti, ei kuitenkaan ole tärkeää, minkätyyppisestä riippuvuudesta on kysymys.

**Esimerkki 2.2.** Kuvitellaan auton nopeusmittarin lukemaa ajan funktiona. Tarkkaillaan mittaria kahden tunnin ajan, ja ilmoitetaan aika minuutteina. Sovitaan lisäksi, että tarkkailun alussa aika on 0. Nopeus ilmoitetaan kilometreinä tunnissa, ja se on aina reaaliluku. Näin saadaan funktio $v : [0, 120] \to \mathbb{R}$. Tietenkään tälle funktiolle ei voi antaa riippuvuussääntöä laskulausekkeena, koska nopeuden vaihtelu tuskin noudattaa mitään tiettyä kaavaa. Myöskin on mahdotonta kirjata nopeutta ylös *jokaisena* ajanhetkenä välillä $[0, 120]$, joten emme voi edes tuntea kaikkia $v$:n arvoja. Kuitenkin tiedetään, että jokaisella ajanhetkellä mittari varmasti näyttää jotain yhtä tiettyä lukua, joten funktion arvo on yksikäsitteisesti olemassa jokaista ajanhetkeä kohti. Lisäksi kokemusmaailmamme osoittaa, että tämä kyseinen funktio on *jatkuva* ja jopa *derivoituva*. Näistä opitaan lisää myöhemmin.

**Esimerkki 2.3.** Edellistä esimerkkiä ei voi kääntää toisin päin. Emme voi määritellä funktiota, joka kuvaisi ajanhetken riippuvuutta nopeusmittarin lukemasta, sillä tämä riippuvuus ei ole yksikäsitteistä. Tietty mittarilukema voi esiintyä useinkin matkan aikana, ei pelkästään tiettynä hetkenä. Jos sen sijaan kyse olisi kuljetusta matkasta eikä auto olisi koskaan pysähdyksissä (eikä kulkisi taaksepäin), voitaisiin riippuvuussuhde määritellä kummin päin vain. Kun kuljettu matka voi vain kasvaa, vastaa kutakin matkaa jokin tietty ajanhetki.

Tarkastellaan seuraavaksi joitain tuttuja laskulausekkeilla määriteltäviä funkioita.

**Esimerkki 2.4.** Yksinkertaisin reaaliarvoinen funktio on vakiofunktio. Vakiofunktion tapauksessa funktion arvon ”riippuvuus” lähtöjoukon alkion arvosta on kenties makuasia, funktion arvo kun on kaikkialla sama. Esim. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$ antaa kaikkia reaalilukuja vastaavaksi funktion arvoksi reaaliluvun 2.

**Esimerkki 2.5.** Funktioita $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joiden arvot ovat muotoa

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kutsutaan *polynomifunktioiksi.* Polynomifunktion arvo saadaan siis laskemalla yhteen lähtöjoukon arvon erilaisilla vakioilla kerrottuja potensseja eli *termejä.* Polynomifunktioita ovat esimerkiksi $P_1(x) = x^2$ ja $P_2(x) = 3x^5 - 2x + 7$. Lukuja $a_j$ kutsutaan polynomin *kertoimiksi*, jotka voivat tietysti olla myös negatiivisia (kuten polynomin $P_2(x)$ toinen kerroin $a_1 = -2$). Suurin luku, joka esiintyy $x$:n potenssissa on polynomin *kertaluku eli aste.*

**Esimerkki 2.6.** Funktiot $R : A \to \mathbb{R}$, joiden arvot voidaan ilmoittaa muodossa $R(x) = P(x)/Q(x)$, missä $P$ ja $Q$ ovat molemmat polynomifunktioita, ovat *rationaalifunkioita.* **Huomaa**, että rationaalifunktio ei ole määritelty nimittäjän $Q$ nollakohdissa. Esimerkiksi funktion $R_1(x) = 1/x$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (reaaliluvut ilman nollaa), ja funktion $R_2(x) = (2x + 3)/(x^2 - 2x)$ määrittelyjoukko on $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

Edellisessä esimerkissä käytettiin merkintää $A \setminus B$, joka tarkoittaa joukkojen *erotusta* ja lausutaan "A miinus B" tai "A pois B". Esimerkiksi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ tarkoittaa joukkoa, joka sisältää kaikki muut reaaliluvut paitsi kokonaisluvut. Tätä merkintää, kuten muitakaan joukko-opillisia merkintöjä, ei tarvitse aktiivisesti osata, mutta se on varsinkin rationaalifunktioiden yhteydessä kätevä.

**Esimerkki 2.7.** Funktiota, jonka arvot lasketaan eri osissa lähtöjoukkoa eri lausekkeesta, kutsutaan *paloittain määritellyksi.* Esimerkiksi itseisarvofunktio voidaan määritellä seuraavilla lausekkeilla:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Jako voi olla monimutkaisempikin, kuten seuraavalla funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{kun } x \text{ on joku muu kokonaisluku kuin } 0 \\ 1, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

2.2. **Yhdistetty funktio.** Kun jonkin funktion arvo annetaan toiselle funktiolle muunnettavaksi, puhutaan *yhdistetystä funkiosta.* Yhdistetyt funktiot ovat erittäin tärkeitä sekä teorian että sovellusten kannalta.

**Määritelmä 2.8.** Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$. Funktioiden $f$ ja $g$ *yhdistetty funktio* $f \circ g : A \to \mathbb{R}$ määritellään seuraavasti:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Funktiota $f$ kutsutaan *ulkofunktioksi* ja funktiota $g$ *sisäfunktioksi.*

Funktio $f \circ g$ muuntaa siis kunkin luvun $x$ käyttämällä ensin funktiota $g$ ja tämän tulokseen $g(x)$ edelleen funkiota $f$. Huomaa, että ulkofunktion $f$ määrittelyjoukon täytyy sisältää kaikki $g$:n mahdolliset arvot.

**Esimerkki 2.9.** Olkoon $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkioita, joiden riippuvuussäännöt ovat $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x+1$. Lasketaan aluksi yhdistetyn funktion $f \circ g$ arvo luvulla 2. Ensin käytetään funktiota $g$, joka muuttaa luvun 2 luvuksi 3. Sitten funktio $f$ muuttaa saadun luvun 3 luvuksi 9.

On hyvin olennaista, miten päin funktiot kirjoitetaan. Oikealla puolella olevaa käytetään aina ensiksi. Jos esimerkiksi syötetään luku 2 ensin funktioon $f$, saadaan 4, joka syötettynä funktioon $g$ antaa tulokseksi 5. Siispä $(f \circ g)(2) \neq (g \circ f)(2)$.

Yhdistetyn funktion riippuvuussääntö muodostetaan samalla periaatteella. Näin saadaan esimerkiksi seuraavanlaisia riippuvuussääntöjä:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2, \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1, \\ (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4, \\ (g \circ g)(x) &= g(g(x)) = g(x + 1) = (x + 1) + 1 = x + 2. \end{aligned}$$

Mikään ei estä myöskään yhdistämästä useampia funkioita. Näin saataisiin esimerkiksi funktio $f \circ g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

$$(f \circ g \circ f)(x) = f(g(f(x))) = f(g(x^2)) = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2.$$

Yhdistetyn funktion käsite on tärkeä muun muassa siksi, että monet funktiot voidaan tulkita yhdistetyiksi funkioiksi. Tällainen tulkinta voidaan aina tehdä monella eri tavalla, ja tilanteesta riippuen on valittava parhaiten sopiva tulkinta. Tästä on jatkossa hyötyä esimerkiksi derivoinnin yhteydessä.

**Esimerkki 2.10.** Määritellään $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 1/(x^2+1)^2$. Tämä $h$ voidaan tulkita yhdistetyksi funktioksi esimerkiksi seuraavasti. Määritellään $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x^2+1)^2$. Nyt $h = f \circ g$, sillä kaikilla luvuilla $x$ pätee

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f((x^2+1)^2) = \frac{1}{(x^2+1)^2} = h(x).$$

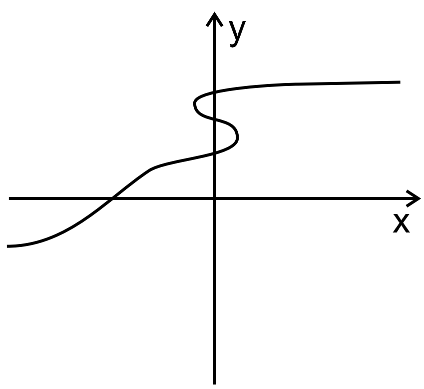
Lisäksi $g$ saa vain positiivisia arvoja, joten $f$:n määrittelyjoukko sisältää $g$:n arvot. Funktio $h$ voidaan kuitenkin tulkita yhdistetyksi funktioksi monella muullakin tavalla. Voidaan esimerkiksi valita $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 1/x^2$, ja $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = x^2+1$. Nytkin $h = f_1 \circ g_1$, sillä kaikilla $x$ pätee

$$(f_1 \circ g_1)(x) = f_1(g_1(x)) = f_1(x^2+1) = \frac{1}{(x^2+1)^2} = h(x).$$

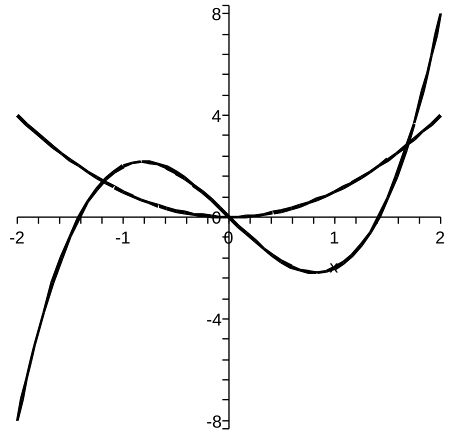
**Huom.** On tärkeää ymmärtää oikein yhdistetyn funktion muodostukseen liittyvät merkinnät. Jos yhdistetään esimerkiksi funktiot $f(x) = 2x$ ja $g(x) = x^2$, tämä **ei** tarkoita sitä, että jollain tapaa yhdistettäisiin *lausekkeet* $2x$ ja $x^2$. Merkintä $f(x) = 2x$ tarkoittaa funktion riippuvuussääntöä, yhtä hyvin voitaisiin kirjoittaa $f(y) = 2y$ tai vaikkapa $f(\text{"kukkuluuruu"}) = 2 \cdot \text{"kukkuluuruu"}$. Muuttujan nimellä ei tässä ole mitään merkitystä. Mitä tahansa voidaan sijoittaa sen paikalle. Esimerkiksi yhdistetyn funktion $f \circ g$ riippuvuussäännöksi saadaan $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2$. Huomaa, miten tässä funktion $f$ muuttujan $x$ paikalle on sijoitettu $x^2$, jolloin saadaan riippuvuussäännön mukaisesti $f(x^2) = 2x^2$.

2.3. **Kuvaaja.** Reaaliarvoinen funktio voidaan usein esittää koordinaatistoon piirretyn kuvaajan eli *graafin* avulla. Tällöin funktion erityispiirteet, kuten kasvunopeus, jaksollisuus, ääriarvot ja epäjatkuvuuskohdat on helppo hahmottaa. On kuitenkin muistettava, että tarkkakaan piirros ei voi tyhjentävästi kuvata funktion käyttäytymistä, eikä kaikista funktioista edes pystytä piirtämään havainnollistavaa kuvaa. Siksi kuvaajan perusteella *ei koskaan* voi sanoa mitään varmaa funktion arvoista, vaan arviot on aina pystyttävä perustelemaan laskien. Kuvaajan piirtäminen on kuitenkin yksi parhaista keinoista oppia ymmärtämään jonkin tietyn funktion luonnetta.

Kaikki koordinaatistoon piirretyt käyrät eivät kuitenkaan kuvaa funktioita. Koska funktion arvojen täytyy olla yksikäsitteisiä, ei yhtä x-arvoa saa vastata kuvaajassa useampia y-arvoja. Jos siis joku pystysuora leikkaa kuvaajaksi väitetyn käyrän useammassa kuin yhdessä kohdassa, kyseessä ei ole reaalifunktion kuvaaja. Funktion kuvaaja ei esimerkiksi voi "laskostua" näin:



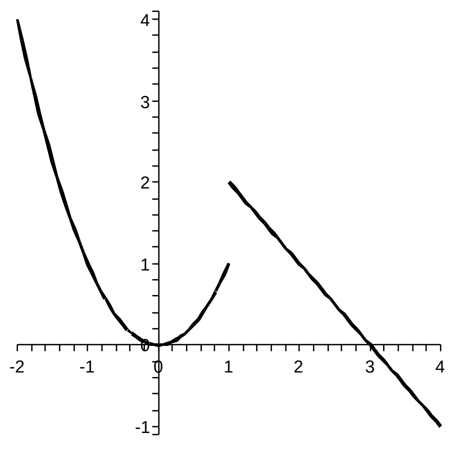
**Esimerkki 2.11.** Polynomifunktioiden $f(x) = x^2$ ja $g(x) = 2x^3 - 4x$ kuvaajat. Kuvan perusteella näyttäisi, että piste $x = 1{,}4$ olisi funktion $g$ nollakohta, mutta oikeasti $g(1{,}4) = -0{,}112$.




**Esimerkki 2.12.** Paloittain määritellyn funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x < 1 \\ -x + 3, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$$

kuvaaja. Funktiolla on niin sanottu *epäjatkuvuuskohta* pisteessä $x = 1$. Kuvaajasta ei näe, onko $h(1) = 1$ vai $h(1) = 2$. Funktion lausekkeen perusteella tiedetään, että jälkimmäinen pätee.




## 3. Raja-arvo ja jatkuvuus

Funktion raja-arvo ja jatkuvuus ovat tämän kurssin peruskäsitteitä. Hyvin monet sovelluksissa tavattavat funktiot ovat jatkuvia. Raja-arvoa tarvitaan toisaalta muiden käsitteiden kuten jatkuvuuden ja derivaatan määrittelyssä. Raja-arvon täsmälliseen tarkasteluun ei kurssilla kuitenkaan riitä aikaa, joten sen suhteen pyritään tukeutumaan mielikuviin.

3.1. **Raja-arvo.** Raja-arvo kuvaa funktion käyttäytymistä jonkin pisteen lähistöllä. Voitaisiin sanoa vaikka niin, että funktion raja-arvo pisteessä $x_0$ on se luku, joka näyttäisi olevan funktion arvo kyseisessä pisteessä, mikäli tarkasteltaisiin vain tämän pisteen lähellä olevia pisteitä. Graafisesti raja-arvoa voisi kuvata siten, että jos funktion kuvaaja näyttää lähestyvän jotakin arvoa kohdassa $x_0$, tämä arvo on funktion raja-arvo pisteessä $x_0$ (vaikka itse arvo $f(x_0)$ olisi jotain muuta).

**Esimerkki 3.1.** Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, pisteen $x = 1$ lähistöllä. Laskemalla joitakin funktion arvoja tuon pisteen ympärillä havaitaan, että funktion arvot näyttävät lähestyvän arvoa 2 pisteessä 1, eli $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

| x | f(x) |
|---|---|
| 0,5 | 1 |
| 0,8 | 1,6 |
| 0,9 | 1,8 |
| 0,99 | 1,98 |
| 1 | - |
| 1,01 | 2,02 |
| 1,1 | 2,2 |
| 1,2 | 2,4 |

Tässä tapauksessa funktion raja-arvo pisteessä 1 on sama kuin funktion arvo. Tämä johtuu siitä, että valitsimme tarkasteltavaksi *jatkuvan* funktion, sekä siitä, että piste 1 kuuluu funktion määrittelyjoukkoon.

Raja-arvon täsmällistä määritelmää on käytännössä vaikea soveltaa. Tällä kurssilla riittää raja-arvon käsitteen intuitiivinen ymmärtäminen. On myös olemassa laskusääntöjä, joiden avulla raja-arvon voi päätellä tietyissä tilanteissa. Täydellisyyden vuoksi esitetään tässä nyt kuitenkin määritelmä ja eräs esimerkki sen käytöstä.

**Määritelmä 3.2.** Luku $a$ on funktion $f$ *raja-arvo* pisteessä $x_0$, jos aina voidaan löytää jokin väli pisteen $x_0$ ympäriltä niin, että tällä välillä lasketut funktion arvot sijaitsevat niin lähellä lukua $a$ kuin suinkin halutaan, lukuun ottamatta arvoa $f(x_0)$. Raja-arvoa merkitään $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$.

**Esimerkki 3.3.** Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$. Edellä huomattiin, että $\lim_{x\to 1} = 2$. Todistetaan tämä nyt määritelmän avulla. Halutaan saada funktion arvot jollain välillä lähemmäs lukua 2 kuin esimerkiksi $p$, missä $p$ on jokin pieni mutta positiivinen luku. Tämä tarkoittaa, että $|f(x) - 2| < p$. Valitaan väliksi tällöin $]1 - p/2, 1 + p/2[$ . Jos nyt $x$ on tuolla välillä, mutta $x \neq 1$, niin pätee $0 < |x - 1| < p/2$. Tällä välillä voidaan siis arvioida

$$|f(x) - 2| = |2x - 2| = 2|x - 1| < 2 \cdot \frac{p}{2} = p,$$

eli $f(x)$:n etäisyys luvusta 2 on pienempi kuin $p$, kuten haluttiin.

**Huom.** Täytyy muistaa, ettei funktion *arvo* pisteessä $x_0$ vaikuta mitenkään funktion *raja-arvoon* pisteessä $x_0$. Raja-arvo voi olla myös olemassa, vaikka funktio ei olisi edes määritelty kyseisessä kohdassa. Tämä on itse asiassa eräs tärkeimmistä syistä raja-arvon käyttöön.

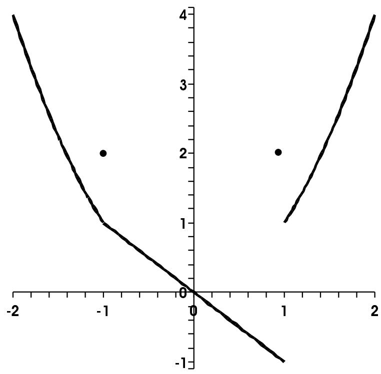
**Esimerkki 3.4.** Olkoon $f : \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = x/x$. Funktio ei ole määritelty nollassa, koska arvoa $0/0$ ei voida laskea. Kaikissa muissa kohdissa kuitenkin pätee $f(x) = x/x = 1$. Jos siis tutkitaan vain nollan lähellä olevia pisteitä, funktion arvot pysyvät vakiona. Siispä varmastikin $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Funktion kuvaajasta raja-arvon olemassaolo on usein helppo nähdä.

**Esimerkki 3.5.** Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x < -1 \text{ tai } x > 1 \\ 2, & \text{kun } x = -1 \text{ tai } x = 1 \\ -x, & \text{kun } x = -1 < x < 1. \end{cases}$$

Funktiolla ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 1$, sillä tuon pisteen vasemmalla puolella funktion arvot lähestyvät arvoa $-1$, kun taas oikealla puolella ne lähestyvät pistettä 1. Arvot eivät siis lähesty mitään tiettyä arvoa. Sen sijaan funktion raja-arvo pisteessä $x = -1$ on nähtävästi 1, vaikka $f(1) = 2$.




Voidaan myös tutkia, mitä arvoa funktion arvot lähestyvät muuttujan arvojen kasvaessa tai vähetessä rajatta. Tällaista arvoa, jos sellainen löytyy, kutsutaan joskus raja-arvoksi äärettömyydessä, ja merkitään $\lim_{x\to\infty} f(x)$ tai $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

**Esimerkki 3.6.** Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x/(2x + 4)$. Laskemalla hyvin suuria funktion arvoja havaitaan, että funktion arvot lähestyvät lukua $1/2$, kun muuttujan arvot kasvavat rajatta. Toisin sanoen $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1/2$.

| x | f(x) |
|---|---|
| 10 | 0,4167 |
| 100 | 0,4902 |
| 1000 | 0,4990 |
| 10000 | 0,4999 |

Käytännössä seuraavat laskusäännöt helpottavat raja-arvojen toteamista:

1. $\lim_{x\to x_0} c = c$, kun $c$ on mikä tahansa luku.
2. $\lim_{x\to x_0} x = x_0$.
3. $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$.
4. Jos $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, niin
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab.$$
Jos lisäksi $b \neq 0$, niin
$$\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = a/b.$$

**Esimerkki 3.7.** Lasketaan $\lim_{x\to 2} f(x)$, kun $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = 3x^2 - 1$. Sovelletaan edellä mainittuja laskusääntöjä funktion riippuvuussääntöön, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} P(x) &= \lim_{x\to 2}(3x^2 - 1) = \lim_{x\to 2} 3x^2 + \lim_{x\to 2}(-1) \\ &= \lim_{x\to 2} 3 \cdot \lim_{x\to 2} x \cdot \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2}(-1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) = 11.\end{aligned}$$

Yleisesti voidaan nähdä, että kaikilla polynomeilla $P$ pätee

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

Polynomin raja-arvon pisteessä $x_0$ voi siis laskea sijoittamalla luku $x_0$ suoraan polynomin lausekkeeseen. Rationaalifunktion kohdalla sama onnistuu, kunhan nimittäjään ei tällä tavoin tule 0.

**Esimerkki 3.8.** Rationaalifunktiota $R(x) = (x^2-x)/(x-1)$ ei voida määritellä pisteessä $x = 1$. Täten raja-arvoa $\lim_{x\to 1} R(x)$ ei voida laskea sijoittamalla luku 1 suoraan funktion lausekkeeseen. Toisaalta raja-arvo ei riipu funktion arvosta kohdassa 1, ja muualla (siis kun $x \neq 1$) pätee

$$R(x) = \frac{x^2-x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} = x.$$

Voidaan siis todeta, että $\lim_{x\to 1} R(x) = \lim_{x\to 1} x = 1$.

**Esimerkki 3.9.** Rationaalifunktioiden raja-arvoja äärettömyydessä voidaan laskea supistamalla lauseke termillä $x^r$, missä $r$ on nimittäjän aste. Tällä tavoin saadaan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+3x}{2x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(-1+\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(2+\frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1+\frac{3}{x}}{2+\frac{5}{x^2}} = \frac{-1+0}{2+0} = -\frac{1}{2}.$$

Tässä käytettiin hyväksi edellä mainittuja laskusääntöjä. Toisaalta

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{2x^2-8} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{8}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+0}{2-0} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}x = \infty.$$

Raja-arvoa ei ole. Tässä tapauksessa sanotaan, että *funktion arvot kasvavat rajatta.*

3.2. **Jatkuvuus.** Monien yleisten reaalifunktioiden kuvaajat ovat katkeamattomia käyriä. Tämä johtuu siitä funktion ominaisuudesta, että muuttujan arvon muuttuessa hyvin vähän myös funktion arvo muuttuu vähän eikä tee hyppäystä. Tätä ominaisuutta sanotaan *jatkuvuudeksi.* Luonnossa on paljon esimerkkejä jatkuvista funktioista, kuten huoneen keskilämpötila ajan funktiona. Lukuunottamatta hyvin poikkeavia olosuhteita lämpötila ei tee hyppäyksiä ajan kuluessa. Myös polynomifunktiot, rationaalifunktiot sekä juurifunktiot ovat kaikki jatkuvia funktioita. Koska funktion raja-arvo pisteessä $x_0$ kertoo funktion arvojen käyttäytymisestä nimenomaan pisteen $x_0$ lähistöllä, voidaan jatkuvuus määritellä kätevästi raja-arvon avulla.

**Määritelmä 3.10.** Funktio $f$ on *jatkuva pisteessä* $x_0$, jos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

eli funktion raja-arvo pisteessä $x_0$ on sama kuin funktion arvo kyseisessä pisteessä. Funktio on *kaikkialla jatkuva* tai yksinkertaisesti *jatkuva*, jos se on jatkuva kaikissa *määrittelyjoukkonsa* pisteissä.

**Huom.** Funktion kutsumiseen jatkuvaksi eivät vaikuta raja-arvot sellaisissa pisteissä, joissa funktiota ei ole määritelty. (Tällaisissa pisteissä funktio ei määritelmän mukaan voisikaan olla jatkuva.) Toisaalta funktio ei voi olla jatkuva myöskään sellaisessa pisteessä, jossa sillä ei ole raja-arvoa.

**Esimerkki 3.11.** Aiemmin on todettu, että jos $P$ on polynomifunktio, niin kaikilla luvuilla $x_0$ pätee $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$. Siispä kaikki polynomifunktiot ovat jatkuvia. Myös kaikki rationaalifunktiot ovat jatkuvia koko määrittelyjoukossaan.

**Esimerkki 3.12.** Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \neq 1 \\ a, & \text{kun } x = 1. \end{cases}$$

Funktio $f$ on jatkuva ainakin kaikissa muissa pisteissä paitsi pisteessä $x = 1$. Koska raja-arvo pisteessä $x = 1$ riippuu ainoastaan funktion arvoista tuota pistettä ympäröivissä pisteissä, voidaan päätellä $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x = 1$. Jos nyt $a = 1$, niin funktion arvo pisteessä 1 on sama kuin raja-arvo kyseisessä pisteessä, ja funktio on jatkuva koko määrittelyjoukossaan. Jos $a \neq 1$, piste $x = 1$ on funktion $f$ *epäjatkuvuuskohta.*

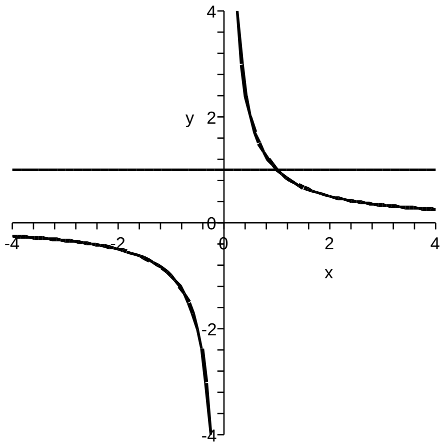
**Esimerkki 3.13.** Tarkastellaan rationaalifunktioita $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, $g(x) = x/x$. Molemmat funktiot ovat jatkuvia kaikissa määrittelyjoukkonsa pisteissä. Funktiolla $f$ ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 0$, sillä tuota pistettä lähestyttäessä $f$ saa mielivaltaisen suuria ja pieniä arvoja. Toisaalta

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x/x = \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

kuten aiemmin todettiini. Nyt voitaisiin määritellä

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x), & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Tällöin saataisiin uusi jatkuva funktio $g_1$, joka on määritelty kaikilla luvuilla ja joka laajentaa funktiota $g$. Tällaista funktiota kutsutaan $g$:n jatkuvaksi jatkeeksi. Toisaalta funktiota $f$ ei voi laajentaa jatkuvana pisteeseen 0, koska sillä ei ole lainkaan raja-arvoa tuossa pisteessä.




## 4. Derivaatta

Monien funktioiden kuvaajilla on sellainen selkeä ominaisuus, että ne näyttävät etenevän välillä ylös-, välillä alaspäin, välillä jyrkemmin, välillä loivemmin. Tämähän on merkki siitä, että funktion arvot välillä kasvavat ja välillä vähenevät. Paikassa, jossa kasvaminen vaihtuu vähenemiseksi, on yleensä jonkinlainen huippukohta. On ilmeistä, että tällaiset ominaisuudet voivat olla kiinnostavia. Jos funktio esimerkiksi kuvaa lämpötilaa ajan funktiona, voimme olla kiinnostuneita lämpenemisen tai jäähtymisen nopeudesta jollain tietyllä hetkellä. Toisinaan puolestaan saattaa olla tärkeää, millä hetkellä lämpötila saavuttaa huippuarvonsa.

Funktion *hetkellistä muutosnopeutta* (eli kuvaajan jyrkkyyttä) tietyssä kohdassa kuvaa funktion *derivaatta.* Tällaisen muutosnopeuden määrittelemisessä törmätään kuitenkin heti ongelmaan. Kahdesta funktion arvosta on helppo sanoa, kumpi on suurempi, mutta jos tarkastellaan vain yhtä funktion arvoa (eli yhtä pistettä kuvaajalla) on kasvusta tai vähenemisestä mahdotonta puhua. Tarvitaan lisätietoa tuon pisteen läheisyydessä saatavista arvoista, mikä johtaa raja-arvon käyttöön.

Fysiikassa nopeus (oikeammin keskinopeus) määritellään kuljetun matkan suhteena siihen käytettyyn aikaan (siis nopeus on matka jaettuna ajalla). Samaan tapaan määritellään myös funktion muutosnopeuden. Jos $x$ ja $x_1$ ovat kaksi eri funktion määrittelyjoukon lukua, määritellään niin sanottu *erotusosamäärä* seuraavalla kaavalla:

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Erotusosamäärä on siis funktion arvojen muutoksen suhde muuttujan arvojen muutokseen välillä $[x, x_1]$ (tai välillä $[x_1, x]$, jos $x_1 < x$), ja se kuvaa funktion keskimääräistä muutosnopeutta kyseisellä välillä. Tavoitteena on nyt kuvata funktion muutosnopeutta lähellä pistettä $x$ ($x_1$ on eräänlainen apupiste), ja tätä varten merkitään $h = x_1 - x$, jolloin erotusosamäärän lauseke saadaan käyttökelpoisempaan muotoon:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Tämä on siis funktion keskimääräinen muutosnopeus välillä $[x, x+h]$ tai $[x+h, x]$, riippuen siitä, onko $h$ positiivinen vai negatiivinen.

Mitä lähemmäs nollaa erotusosamäärän lausekkeen (positiivinen tai negatiivinen) $h$ tulee, sitä tarkemmin erotusosamäärä kuvaa funktion muutosnopeutta pisteen $x$ lähellä. Muutosnopeus tuossa pisteessä voidaan määritellä ottamalla erotusosamäärästä raja-arvo $h$:n lähestyessä nollaa. Tätä raja-arvoa ei välttämättä ole olemassa. Jos funktio on esimerkiksi epäjatkuva jossain pisteessä, sen arvo muuttuu tuossa pisteessä äkisti, ikään kuin äärettömän nopeasti. Tällöin funktion muutosnopeutta ei voida tuossa pisteessä määritellä.

**Määritelmä 4.1.** Funktio $f$ on *derivoituva pisteessä* $x$, jos erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on olemassa. Tätä raja-arvoa merkitään $f'(x)$, $Df(x)$ tai $\frac{df}{dx}(x)$, ja kutsutaan funktion $f$ *derivaataksi* pisteessä $x$. Funktio on *derivoituva*, jos se on derivoituva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä.

Derivaatta kuvaa siis funktion hetkellistä muutosnopeutta. Jos funktio kuvaa kuljettua matkaa ajan funktiona, erotusosamäärä jollain välillä kuvaa keskinopeutta tuolla välillä. Derivaatta jossain pisteessä sen sijaan kuvaa hetkellistä nopeutta tuossa pisteessä. Jos taas funktio kuvaa nopeutta, derivaatta kuvaa kiihtyvyyttä; jos funktio kuvaa lämpötilaa ajan funktiona, derivaatta kuvaa lämpenemis- tai jäähtymisnopeutta.

**Esimerkki 4.2.** Tarkastellaan polynomifunktiota $f(x) = x^2$ pisteen $x = 2$ ympärillä. Lasketaan aluksi funktion keskimääräinen muutosnopeus välillä $[2, 3]$:

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{9 - 4}{1} = 5.$$

Toisaalta muutosnopeus välillä $[1, 2]$ on

$$\frac{f(1) - f(2)}{1 - 2} = \frac{1 - 4}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

(Huomaa, että tulosten kannalta ei ole väliä, kummin päin erotukset osoittajassa ja nimittäjässä kirjoitetaan, kunhan ne ovat molemmissa samoin päin.) Tuloksista nähdään, että funktio kasvaa hieman nopeammin välillä $[2, 3]$ kuin välillä $[1, 2]$.

Lasketaan sitten erotusosamäärä, kun tarkasteluvälin pituus on $h$:

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h}.$$

Koska $h$ kuvaa kahden eri luvun erotusta, se ei voi olla nolla. Voidaan siis supistaa saatu lauseke $h$:lla:

$$\frac{4h+h^2}{h} = \frac{h(4+h)}{h} = 4+h.$$

Erotusosamäärä riippuu siis $h$:sta. Jos sijoitetaan $h = 1$, saadaan muutosnopeus välillä $[2,3]$, joka laskettiin jo edellä. Jos taas sijoitetaan $h = -1$, saadaan muutosnopeus välillä $[1,2]$. Funktion derivaatta on erotusosamäärän raja-arvo, kun $h$ lähestyy nollaa, eli

$$\lim_{h\to 0}(4+h) = 4.$$

Funktiolla on siis pisteessä 2 derivaatta $f'(2) = 4$.

**Esimerkki 4.3.** Tarkastellaan funktiota $f(x) = |x|$ (itseisarvo) pisteessä $x = 0$. Kirjoitetaan erotusosamäärä pisteessä 0 yleisessä muodossa ja merkitään tarkasteluvälin pituutta $h$:lla. Kun $h > 0$, niin $|h| = h$, jolloin erotusosamäärä on

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = \frac{h-0}{h} = 1.$$

Toisaalta, kun $h < 0$, niin $|h| = -h$, jolloin erotusosamäärä on

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = \frac{-h-0}{h} = -1.$$

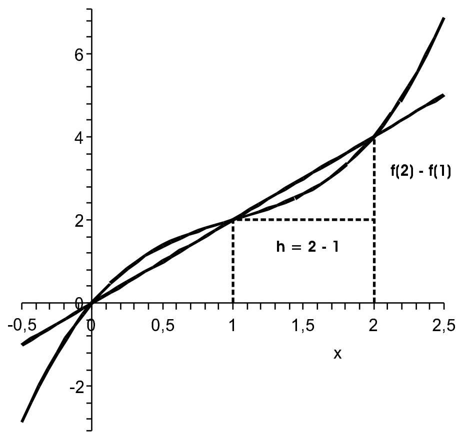
Erotusosamäärän arvo on 1, kun $h$ on positiivinen, ja $-1$, kun $h$ on negatiivinen. Tämä pätee, oli $h$ miten lähellä nollaa tahansa (paitsi tietysti $h = 0$. Erotusosamäärällä ei siis voi olla raja-arvoa $h$:n lähestyessä nollaa, joten itseisarvo ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$.

Jos funktiolla on epäjatkuvuuskohta (eli määrittelyjoukon piste, jossa funktio ei ole jatkuva), siinä kohdassa funktion muutosnopeutta ei voida määrittää.

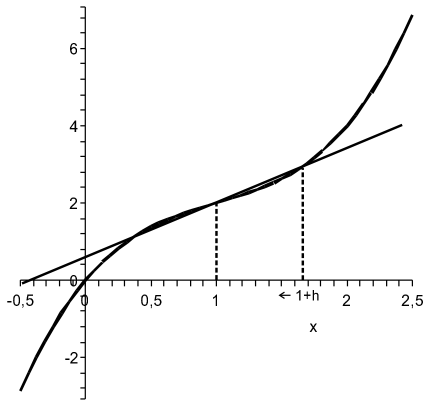
**Lause 4.4.** *Jos funktio on derivoituva pisteessä $x$, se on myös jatkuva pisteessä $x$.*

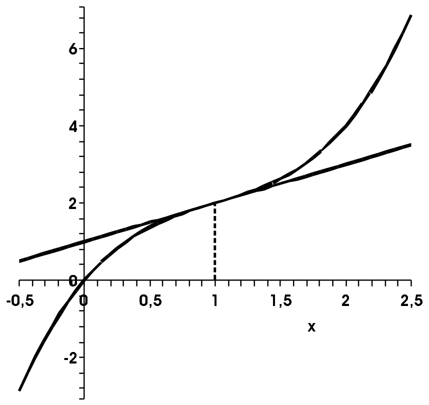
Epäjatkuva funktio ei siis voi olla derivoituva.

### 4.1. **Derivaatta kuvaajassa.**




Tarkastellaan oheista kuvaa, johon on piirretty erään derivoituvan funktion $f$ kuvaaja. Kuvassa on lisäksi suora, joka leikkaa kuvaajaa pisteissä, joiden x-koordinaatit ovat 1 ja 2. Tällaisen suoran kulmakerroin on $(f(2) - f(1))/(2 - 1)$, joka on itse asiassa erotusosamäärän arvo välillä $[1,2]$. Tämä kulmakerroin kertoo siis funktion keskimääräisen muutosnopeuden tuolla välillä. Erotusosamäärän nimittäjä $h$ vastaa toisen leikkauspisteen x-koordinaatin etäisyyttä ensimmäisen leikkauspisteen x-koordinaatista. Pitämällä ensimmäinen leikkauspiste paikallaan ja pienentämällä arvoa $h$ saadaan toinen leikkauspiste lähestymään ensimmäistä. Tällöin suora kääntyy kuvaajan suuntaiseksi.



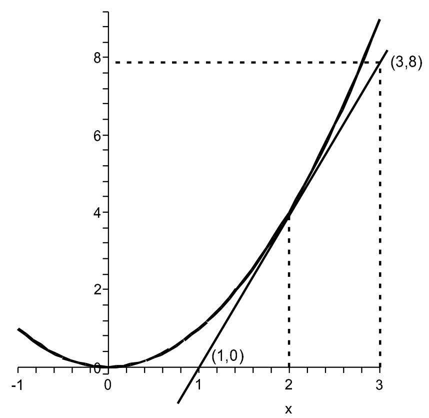




Erotusosamäärän raja-arvo eli derivaatta pisteessä $x$ on siis tuohon pisteeseen kuvaajalle piirretyn *sivuajan eli tangentin* kulmakerroin. (Älä sekoita trigonometrian tangenttifunktioon.)

**Esimerkki 4.5.** Arvioidaan aikaisemman esimerkin funktion $f(x) = x^2$ derivaattaa pisteessä $x = 2$ kuvaajan avulla. Koska derivaatta on kyseiseen pisteeseen piirretyn sivuajan kulmakerroin, hahmotellaan ensin kuvaajalle sivuaja. Asetetaan siis viivain kuvaajalle sen pisteen kohdalle, jonka x-koordinaatti on 2, siten että se on suunnilleen kuvaajan suuntainen, ja piirretään suora. Tämän jälkeen valitaan sivuajalta kaksi pistettä, jotta sen kulmakerroin voidaan määrittää. Kuvan mukaan pisteet ovat $(1, 0)$ ja $(3, 8)$, joten kulmakertoimeksi saadaan

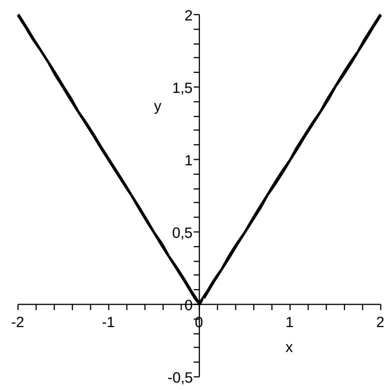
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 0}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4.$$

Aikaisemmin laskettiinkin, että funktion derivaatta tuossa pisteessä on 4.




Graafinen tarkastelu osoittautuu tärkeäksi silloin, kun funktion riippuvuussäännölle ei voida muodostaa mitään lauseketta, tai kun tätä lauseketta ei syystä tai toisesta osata derivoida. Jos funktion arvoja kuitenkin tunnetaan niin paljon, että niiden avulla voidaan piirtää kuvaaja, voidaan sen avulla määrittää likimääräinen derivaatta.

Jos funktion kuvaajaan muodostuu jossain kohtaa terävä kärki, siihen ei voi piirtää yksikäsitteistä sivuajaa. Tällöin funktio ei ole derivoituva. Itseisarvofunktiota tarkasteltaessa huomattiin, että se ei ole derivoituva nollassa, ja kuvaajassa näkyykin terävä kärki origon kohdalla. Funktio ei myöskään ole derivoituva pisteessä, jossa kuvaaja katkeaa, koska se ei ole sellaisessa kohdassa jatkuva.




4.2. **Laskusääntöjä.** Aloitetaan säännöistä, joilla voi laskea funktioiden summien, tulojen ja osamäärien derivaattoja. Nämä muistuttavat raja-arvojen laskemisessa käytettyjä sääntöjä, mikä ei ole yllättävää, koska derivaattakin on eräs raja-arvo.

1. $D(f \pm g)(x) = f'(x) \pm g'(x)$
2. $D(cf)(x) = cf'(x)$, jos $c$ on vakio
3. $D(fg)(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $D(f/g)(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Näitä sääntöjä sovellettaessa täytyy kuitenkin ensin varmistaa, että kyseiset funktiot on määritelty ja derivoituvia halutussa kohdassa. Sääntö 4 esimerkiksi vaatii, että $g(x) \neq 0$.

Ennen muita sääntöjä palautetaan mieleen murto- ja negatiivisten potenssien määritelmät. Olkoon $k$ kokonaisluku, ja $x \neq 0$. Tällöin

$$x^k = \begin{cases} \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{k}, \text{ jos } k > 0, \\ 1, \text{ jos } k = 0, \\ \dfrac{1}{x^{|k|}}, \text{ jos } k < 0. \end{cases}$$

Lisäksi $0^k = 0$ aina, kun $k \neq 0$. Sen sijaan $0^0$ ei ole määritelty.

Olkoot sitten $p, q$ kokonaislukuja, $q > 0$. Tällöin

$$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p.$$

Esimerkiksi $x^{1/2} = \sqrt{x}$. Huomaa, ettei parillinen juuri ole määritelty negatiivisille luvuille ja että parillinen juuri määritellään aina positiiviseksi. (Esimerkiksi $\sqrt{-4}$ ei ole määritelty, ja $\sqrt{4} = 2$, vaikka myös $(-2)^2 = 4$).

Nyt voidaan määritellään potensseja koskevat derivointisäännöt.

5. $Dc = 0$, jos $c$ on vakio
6. $Dx^k = kx^{k-1}$, jos $k \neq 0$.

Huomaa ero vakiokertoimen ja vakiofunktion eli sääntöjen 2 ja 5 välillä. Vakiofunktio häviää derivoitaessa, mutta vakiokerroin säilyy sellaisenaan. Siis esimerkiksi $D\ 3 = 0$, mutta $D\ 3x^2 = 3 \cdot Dx^2$.

**Esimerkki 4.6.** Derivoidaan polynomifunktio:

$$D(x^2+2x-3) = Dx^2 + 2Dx - D\ 3 = 2x^1 + 2\cdot 1 - 0 = 2x+2.$$

Derivoidaan rationaalifunktio:

$$\begin{aligned} D\frac{x^2-3x}{x+1} &= \frac{D(x^2-3x)(x+1)-(x^2-3x)D(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(2x-3)(x+1)-(x^2-3x)(1+0)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(2x^2+2x-3x-3)-(x^2-3x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Derivoidaan vielä eräs juurifunktio. Juuret kannattaa aina derivoitaessa kirjoittaa potenssien avulla. Tässä tapauksessa käytetään myös negatiivista potenssia, jotta päästään eroon jakolaskusta:

$$\begin{aligned} D\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}} &= D\ \frac{1}{x^{1/3}} = D\left(x^{-1/3}\right) = -\frac{1}{3}x^{-1/3-1} \\ &= -\frac{1}{3}x^{-4/3} = -\frac{1}{3x^{4/3}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}. \end{aligned}$$

Viimeinen sääntö koskee yhdistettyjä funktioita.

7. $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Yhdistetyn funktion derivaatta pisteessä $x$ saadaan siis laskemalla ulkofunktion derivaatta pisteessä $g(x)$ ja kertomalla se sisäfunktion derivaatalla pisteessä $x$. Kuulostaa monimutkaiselta, mutta idea on se, että ensin derivoidaan ulkofunktio välittämättä siitä, mitä funktion sisällä on. Sen jälkeen derivoidaan sisäfunktio ja nämä tulokset kerrotaan keskenään.

**Esimerkki 4.7.** Derivoidaan funktio $h(x) = (2x+1)^6$. Tämä on kuudennen asteen polynomi, mutta potenssien derivointisäännnön käyttämiseksi täytyisi lausekkeesta ensin kertoa sulut auki eli laskea $(2x+1)(2x+1)(2x+1)(2x+1)(2x+1)(2x+1)$. Tulkitsemalla funktio $h$ sopivalla tavalla yhdistetyksi funktioksi $f\circ g$, vältytään tältä (suurehkolta) vaivalta.

Olkoon nyt ulkofunktiona $f(x) = x^6$ ja sisäfunktiona $g(x) = 2x+1$. Tällöin $h = f\circ g$. Toisaalta $f'(x) = 6x^5$ ja $g'(x) = 2$, joten yhdistetyn funktion derivaatta on

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = f'(2x+1)g'(x) = 6(2x+1)^5\cdot 2 = 12(2x+1)^5.$$

Tämä voidaan tehdä myös ilman, että funktioita merkitään erikseen kirjaimilla. Ajatellaan vain mielessä, että ”ulko-osa on jotain potenssiin 6” ja ”sisäosa on 2 kertaa x plus 1”. Ensin derivoidaan vain ulko-osa sisäosasta välittämättä. Se jotain, mikä on sisäosassa, pysyy siis koskemattomana (vertaa kaavaan). Näin saadaan

$$(\text{”jotain”})^6 \quad \rightsquigarrow \quad 6(\text{”jotain”})^5.$$

Tähän sijoitetaan paikalleen sisäosa ja kerrotaan sisäosan derivaatalla, jolloin saadaan:

$$6(\text{”jotain”})^5\cdot 2 = 12(2x+1)^5.$$

Lyhyesti siis

$$D(2x+1)^6 = 6(2x+1)^5\cdot 2 = 12(2x+1)^5.$$

4.3. **Derivaatan sovelluksia.** Derivaatan avulla voidaan tutkia funktion kasvua ja vähenemistä sekä funktion saamia *ääriarvoja.* Määritellään ensin näihin liittyviä käsitteitä.

**Määritelmä 4.8.** Funktio $f$ on *kasvava välillä* $[a, b]$, jos kaikilla pisteillä $x < y$ välillä $[a, b]$ pätee $f(x) \leq f(y)$. Jos lisäksi pätee $f(x) < f(y)$, sanotaan, että funktio on *aidosti kasvava* kyseisellä välillä.

Vastaavasti määritellään *vähenevä* ja *aidosti vähenevä* funktio.

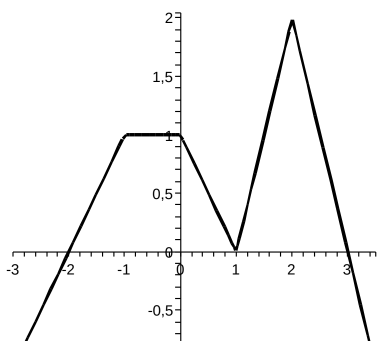
**Määritelmä 4.9.** Funktiolla $f$ on pisteessä $x_0$ *paikallinen* eli *lokaali maksimi*, jos pätee $f(x_0) \geq f(x)$ kaikilla pisteillä $x$ jossain pisteen $x_0$ ympäristössä. Tämä arvo on *funktion suurin arvo*, jos pätee $f(x_0) \geq f(x)$ kaikilla määrittelyjoukon pisteillä $x$.

Vastaavasti määritellään *paikallinen minimi* ja *funktion pienin arvo.* Minimejä ja maksimeja kutsutaan funktion *ääriarvoiksi.* Huomaa, että vakiofunktiolla on jokaisessa pisteessä sekä suurin että pienin arvo.

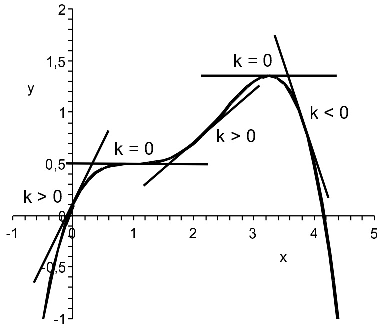
**Esimerkki 4.10.** Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ kun } x < -1 \\ 1, \text{ kun } -1 \leq x < 0 \\ -x + 1, \text{ kun } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 2, \text{ kun } 1 \leq x < 2 \\ -2x + 6, \text{ kun } x \geq 2. \end{cases}$$

Tällä funktiolla on paikallinen maksimi pisteessä $x = 2$ sekä jokaisessa pisteessä välillä $[-1, 0]$. Paikallinen minimi löytyy pisteestä $x = 1$ sekä myös kaikista pisteistä välillä $]-1, 0[$ . Suurin arvo on $f(2) = 2$, mutta pienintä arvoa ei ole. Funktio on aidosti kasvava väleillä $]-\infty, -1]$ ja $[1, 2]$, ja aidosti vähenevä väleillä $[0, 1]$ ja $[2, \infty[$ . Välillä $[-1, 0]$ funktio on sekä kasvava että vähenevä, mutta ei aidosti kumpaakaan.




Edellisen esimerkin funktio ei ole kaikissa pisteissä derivoituva. Kasvavuuden, vähenevyyden ja ääriarvojen käsitteet ovat silti mielekkäitä. Silloin kun funktio on derivoituva, sen kuvaajalle piirretyn sivuajan kulmakerroin kertoo funktion muutosnopeuden. Siellä, missä funktio kasvaa, kulmakerroin on positiivinen ja siellä, missä funktio vähenee, negatiivinen. Kohta, jossa kasvu vaihtuu vähenemiseksi tai päinvastoin, funktiolla on joko minimi tai maksimi. Tällaisessa kohdassa sivuajan kulmakerroin on nolla.




Puetaan seuraavaksi nämä havainnot lauseiksi. Ensimmäinen seuraa suoraan derivaatan määritelmästä (ei todisteta tässä).

**Lause 4.11.** *Jos derivoituvalla funktiolla on paikallinen ääriarvo pisteessä $x_0$, niin $f'(x_0) = 0$.*

**Huom.** Tämä lause sanoo, että maksimi- ja minimikohdissa derivaatta on nolla. Tämä ei kuitenkaan päde toisin päin, eli *kaikki derivaatan nollakohdat eivät välttämättä ole ääriarvoja.*

Seuraavat lauseet seuraavat niin kutsutusta *väliarvolauseesta.*

**Lause 4.12.** *Jos $f'(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$, niin funktio $f$ on kasvava kyseisellä välilllä. Jos lisäksi $f'(x) = 0$ vain välin yksittäisissä pisteissä, niin $f$ on aidosti kasvava tuolla välillä.*

Vastaava pätee myös negatiiviselle derivaatalle.

**Lause 4.13.** *Jos $f'(x) \leq 0$ välillä $[a, b]$, niin funktio $f$ on vähenevä kyseisellä välilllä. Jos lisäksi $f'(x) = 0$ vain välin yksittäisissä pisteissä, niin $f$ on aidosti vähenevä tuolla välillä.*

Edellisissä lauseissa sanonta ”yksittäisissä pisteissä” tarkoittaa, että ei ole olemassa kokonaista väliä $[a, b]$, jolla derivaatta olisi nolla, vaan ainoastaan erillisiä pisteitä.

**Esimerkki 4.14.** Tarkastellaan 4. asteen polynomifunktiota $f(x) = 3x^4 + 4x^3$. Tutkitaan, missä se on kasvava ja missä vähenevä, sekä minkälaisia ääriarvoja sillä on. Tätä varten lasketaan ensin funktion derivaatta:

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 + 4 \cdot 3x^4 = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x + 1).$$

Derivaatan nollakohdat saadaan helposti tulon nollasäännön avulla:

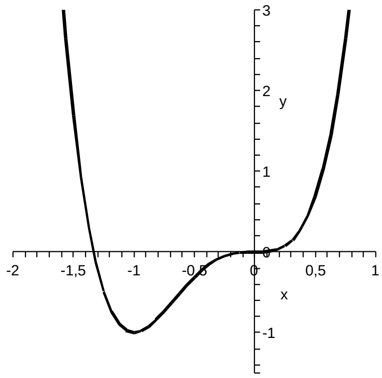
$$f'(x) = 0 \iff 12x^2(x + 1) = 0 \iff 12x^2 = 0 \text{ tai } x + 1 = 0 \iff x = 0 \text{ tai } x = -1.$$

Nollakohdat ovat siis $x = -1$ ja $x = 0$. Lauseen 4.11 perusteella nämä ovat ainoat pisteet, joissa funktiolla voi olla paikallinen minimi tai maksimi. Lisää tietoa näistä pisteistä saadaan esimerkiksi *merkkikaavion* avulla. Siihen kerätään tiedot derivaatan etumerkistä eri väleillä, ja näistä päätellään funktion muutoksen suunta.

Koska derivaatta $f'$ on polynomifunktio eli jatkuva kaikilla reaaliluvuilla, sen etumerkki voi vaihtua ainoastaan nollakohdassa (ns. Bolzanon lause). Tiedetään siis, että väleillä $]-\infty, -1[$ , $]-1, 0[$ ja $]0, \infty[$ derivaatan merkki ei muutu. Toisaalta $f'(-2) = -48$, $f'(-1/2) = 3/2$ ja $f'(1) = 24$. Näistä arvoista nähdään, mikä derivaatan etumerkki on milläkin välillä. Kerätään tulokset kaavioon.

| | $x < -1$ | $-1 < x < 0$ | $0 < x$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ |

Lauseiden 4.12 ja 4.13 perusteella $f$ on vähenevä välillä $]-\infty, -1]$ ja kasvava välillä $[-1, \infty[$ . Väheneminen ja kasvaminen on lisäksi aitoa, sillä derivaatta on nolla vain yksittäisissä pisteissä. Nyt voidaan myös päätellä, mitkä derivaatan nollakohdista ovat ääriarvokohtia. Pisteen $x = 0$ ympärillä $f$ on aidosti kasvava, joten se ei voi olla ääriarvokohta. Toisaalta pisteen $x = -1$ vasemmalla puolella $f$ on vähenevä ja oikealla puolella kasvava, joten kyseessä on lokaali minimikohta.




**Esimerkki 4.15.** Tarkastellaan edellisen esimerkin tavoin rationaalifunktiota $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x^4 + 1)/x^2$. Funktion derivaatta on

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{D(x^4+1) \cdot x^2 - (x^4+1) \cdot D\, x^2}{(x^2)^2} = \frac{4x^3 \cdot x^2 - (x^4+1) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{4x^5 - 2x^5 - 2x}{x^4} = \frac{2x^5 - 2x}{x^4} = \frac{x(2x^4-2)}{x^4} = \frac{2x^4-2}{x^3}. \end{aligned}$$

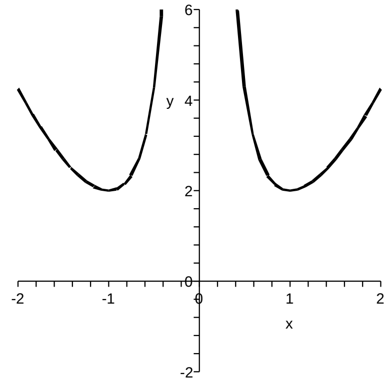
Derivaatta on tietysti määritelty vain funktion määrittelyjoukossa, eli kun $x \neq 0$. Murtolausekkeen nollakohdat ovat samat kuin sen osoittajan nollakohdat, joten

$$g'(x) = 0 \iff 2x^4 - 2 = 0 \iff x^4 = 1 \iff x = \pm 1.$$

Derivaatan nollakohdat ovat siis 1 ja $-1$. Entä derivaatan etumerkki? Kuten edellä, derivaatta on jatkuva siellä missä se on määritelty ja voi tällä alueella vaihtaa etumerkkiään vain nollakohdissaan. Derivaatta ei kuitenkaan ole määritelty nollassa, joten sen etumerkki voi olla erilainen nollan eri puolilla. Tarkastelu on siis jaettava väleihin $]-\infty, -1[$ , $]-1, 0[$ , $]0, 1[$ ja $]1, \infty[$ . Tutkimalla derivaatan arvoja näillä väleillä saadaan seuraavan näköinen merkkikaavio:

| | $x < -1$ | $-1 < x < 0$ | $0 < x < 1$ | $1 < x$ |
|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $g(x)$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

Merkkikaavion mukaan kohdissa $x = -1$ ja $x = 1$ on lokaalit minimit. (Kohdassa $x = 0$ sitä vastoin ei ole lokaalia maksimia, sillä $g$ ei ole siinä määritelty.)




Näillä tiedoilla voidaan jo hyvin tarkasti määrittää derivoituvan funktion kulku. Seuraava lisätieto auttaa ääriarvojen löytämisessä.

**Lause 4.16.** *Suljetulla välillä määritelty jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa tuolla välillä. Jos funktio on lisäksi derivoituva, suurin ja pienin arvo löytyvät joko välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista.*

**Esimerkki 4.17.** Tarkastellaan nyt aikaisemman esimerkin funktiota $f(x) = 3x^4 + 4x^3$ suljetulla välillä $[-2, 1]$. Lasketaan funktion arvot derivaatan nollakohdissa sekä välin päätepisteissä.

$$f(-1) = -1, \quad f(0) = 0, \quad f(-2) = 16, \quad f(1) = 7.$$

Edellisen lauseen perusteella funktion suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 1]$ löytyvät näiden arvojen joukosta. Suurin arvo on selvästi $f(-2) = 16$ ja pienin $f(-1) = -1$.

Monet arkielämän optimointiongelmat voidaan edellä opittujen seikkojen avulla käsitellä derivaatan avulla.

**Esimerkki 4.18.** Maanviljelijällä on 20 metriä verkkoaitaa. Hän haluaa rakentaa kanoille suorakulmaisen aitauksen. Aitatarpeita säästääkseen hän päättää rakentaa aitauksen ladon viereen niin, että ladon seinä korvaa toisen aitauksen pitkistä sivuista. Miten pitkät on aitauksen sivujen oltava, jotta aitauksen pinta-ala olisi mahdollisimman iso?

Ratkaisun löytämiseksi muodostetaan funktio, joka kuvaa maksimoitavaa suuretta jonkin muuttujan funktiona. Maksimoitava suure on aitauksen pinta-ala, joka lasketaan pitkän ja lyhyen sivun tulona. Merkitään lyhyen sivun pituutta $x$. Pitkälle sivuille jää tällöin $20 - 2x$ metriä verkkoaitaa. Näin saadaan aitauksen pinta-ala lyhyen sivun pituuden funktiona:

$$A(x) = x \cdot (20 - 2x) = -2x^2 + 20x.$$

Lyhyt sivu on vähintään 0 ja enintään 10 metriä pitkä. Funktio $A$ on siis määritelty suljetulla välillä $[0, 10]$. Se on derivoituva, joten suurin arvo löytyy määrittelyvälin päätepisteestä tai derivaatan nollakohdasta. Derivaatta on

$$A'(x) = -4x + 20.$$

Derivaatta on nolla vain jos $x = 5$. Suurin arvo löytyy siis seuraavien arvojen joukosta:

$$A(5) = -2 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5 = 50, \quad A(0) = 0, \quad A(10) = 0.$$

Suurin pinta-ala saadaan siis, kun lyhyen sivun pituus on 5 metriä, jolloin pitkän sivun pituudeksi tulee 10 metriä.

**Esimerkki 4.19.** Suorakulmio sijaitsee koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä siten, että sen yksi kulma on origossa ja vastakkainen kulma suoralla $y = -2x + 3$ (ks. kuva). Laske tällaisen suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala.

Merkitään suorakulmion alareunan pituutta $x$. Koska suorakulmion kulma on suoralla $y = -2x + 3$, sen y-koordinaatin, joka on samalla suorakulmion korkeus, täytyy olla $-2x + 3$. Tällöin ala on

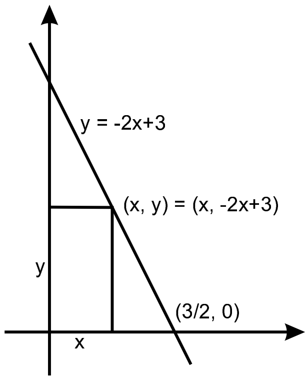
$$A(x) = x(-2x + 3) = -2x^2 + 3x.$$

Tehtävänannon mukaan täytyy olla $0 \leq x \leq 3/2$. Sallitut arvot muodostavat suljetun välin, ja funkio on derivoituva, joten suurin arvo löytyy derivaatan nollakohdasta tai määrittelyvälin päätepisteestä. Päätepisteissä ala on selvästi 0. Derivaatta on

$$A'(x) = -4x + 3,$$

ja tämän ainoa nollakohta on $x = 3/4$. Alan suurin arvo on siis

$$A(3/4) = -2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}.$$




4.4. **Korkeammat derivaatat.** Funktion $f$ derivaatta $f'$ on myös eräs funktio, joten myös se itse voi olla derivoituva. Tämä pätee myös derivaatan derivaatalle ja niin edelleen. Jos $f$ voidaan derivoida $n$ kertaa, tulosta kutsutaan *n:nneksi derivaataksi* ja merkitään jollain seuraavista tavoista:

$$f^{(n)}, \quad D^{(n)}f, \quad \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Jos $n$ on pieni, kuten 2 tai 3, voidaan myös merkitä $f''$ tai $f'''$.

Toinen derivaatta kertoo funktion derivaatan kasvusta. Jos esimerkiksi $s$ kuvaa kuljettua matkaa, kuvaa $s'$ nopeutta ja $s''$ vastaavasti kiihtyvyyttä.

Seuraava toisen derivaatan ominaisuus voi olla hyödyksi.

**Lause 4.20.** *Oletetaan, että $f$ on kahdesti derivoituva ja $f'$:lla on nollakohta pisteessä $x_0$. Tällöin pätee:*

a) *jos $f''(x_0) < 0$, niin $x_0$ on $f$:n paikallinen maksimikohta,*
b) *jos $f''(x_0) > 0$, niin $x_0$ on $f$:n paikallinen minimikohta.*

*Sen sijaan, jos $f''(x_0) = 0$, niin kohdassa $x_0$ voi olla paikallinen ääriarvo tai olla olematta.*

**Esimerkki 4.21.** Olkoon jälleen $f(x) = 3x^4 + 4x^3$. Ensimmäinen derivaatta on

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2,$$

ja toinen derivaatta

$$f''(x) = 12 \cdot 3x^2 + 12 \cdot 2x = 36x^2 + 24x.$$

Derivaatan nollakohdat olivat $x = -1$ ja $x = 0$. Toisen derivaatan arvot näissä pisteissä ovat

$$f''(-1) = 36 \cdot 1 + 24(-1) = 12, \quad f(0) = 0.$$

Kohdassa $x = -1$ on siis lokaali minimi, mutta kohdasta $x = 0$ ei osata tällä perusteella sanoa mitään. Aiempi tutkimus osoitti, että tässä kohdassa ei ollut ääriarvoa.

## 5. Jatkuvan funktion integraali

Jos tunnetaan jotain suuretta kuvaava funktio, kertoo derivaatta suureen muutosnopeuden, mikäli funktio on derivoituva. Tilanne voi kuitenkin olla sellainen, että tunnettu suure kuvaakin nimenomaan muutosnopeutta, ja haluaisimme tietää jotain alkuperäisestä funktiosta. Esimerkiksi nopeus on kuljetun matkan derivaatta. Voimme tuntea auton nopeutta kullakin ajanhetkellä kuvaavan funktion ja haluaisimme tietää, miten paljon auto on edennyt jollain tietyllä aikavälillä. Voidaan sanoa, että haluamme selvittää nopeutta kuvaavan funktion *kertymän* tietyllä aikavälillä. Tähän tarvitaan integraalin käsitettä. Tässä luvussa määritellään integraali vain jatkuville funktioille, mutta määritelmää voidaan yleistää niin, että se soveltuu myös epäjatkuville funktioille.

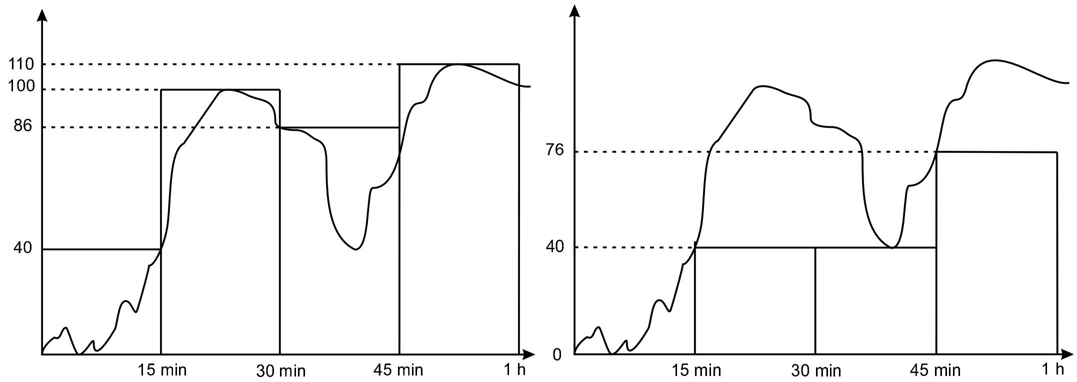
Tarkastellaan esimerkkinä linja-autoa matkalla Kotkasta Helsinkiin. Oletetaan, että tunnemme linja-auton nopeuden $v$ ajan funktiona. Yritetään arvioida nopeuden funktion perusteella kuljettua matkaa ensimmäisen tunnin aikana eli aikvavälillä $[0, 1]$.

Jos nopeus pysyisi koko ajan tasaisena, eli $v$ olisi vakiofunktio, saisimme kuljetun matkan yksinkertaisesti kertomalla käyetyn ajan tuolla vakionopeudella. Kuljettu matka olisi $s = v \cdot 1$ h. Nopeus voi kuitenkin vaihdella ajanhetkestä toiseen, joten tämä ei onnistu. Voimme silti arvioida kuljettua matkaa maksimi- ja miniminopeuksien avulla.

Olkoon esimerkiksi bussin suurin nopeus välillä $[0, 1]$ ollut 110 km/h, ja pienin nopeus 0 km/h (bussi seisoi aluksi asemalla). Jos bussi olisi ajanut koko ajan maksiminopeudellaan, se olisi kulkenut tunnin aikana 110 km/h$\cdot$ 1 h=110 km. Jos se taas olisi ollut koko ajan paikallaan, se olisi kulkenut 0 km. Tiedämme siis, että todellinen kuljettu matka on jossain nollan ja 110 kilometrin välillä.

Tarkempi arvio saadaan, kun tarkastellaan aikaväliä osissa. Oletetaan esimerkiksi, että ensimmäisen puolen tunnin aikana bussin maksiminopeus oli vain 100 km/h ja miniminopeus 0 km/h. Toisen puolen tunnin aikana maksimi- ja miniminopeudet olivat vastaavasti 110 km/h ja 40 km/h. Nyt voimme arvioida, että ensimmäisellä osalla edettiin enintään $100 \cdot 1/2 = 50$ km ja vähintään $0 \cdot 1/2 = 0$ km, sekä toisella osalla enintään $110 \cdot 1/2 = 55$ km ja vähintään $40 \cdot 1/2 = 20$ km. Kun nämä lasketaan yhteen, voidaan todeta, että tunnin aikana edettiin yhteensä enintään $50 + 55 = 105$ km ja vähintään $0 + 20 = 20$ km, mikä on jo alkuperäistä parempi arvio. Voimme edelleen pilkkoa aikavälin esimerkiksi 4 osaan ja tehdä vastaavanlaisen arvion. Tällöin voitaisiin saada seuraavan taulukon mukainen tulos:

| aikaväli | nopeus max | nopeus min | matka max | matka min |
|---|---|---|---|---|
| 0-15 min | 40 km/h | 0 km/h | 10 km | 0 km |
| 15-30 min | 100 km/h | 40 km/h | 25 km | 10 km |
| 30-45 min | 86 km/h | 40 km/h | 21,5 km | 10 km |
| 45-60 min | 110 km/h | 76 km/h | 27,5 km | 19 km |
| yhteensä | — | — | 84 km | 39 km |




Mitä pienempiin osiin pilkomme aikavälin, sitä tarkemman arvion saamme auton kulkemalle matkalle. Tarkimman arvion saamiseksi voisimme tarkastella raja-arvoa osavälien pituuden lähestyessä nollaa. Tällainen tarkastelu voidaan yleistää koskemaan mitä tahansa jatkuvia funkioita. Ylä- ja ala-arvioita kutsutaan funktion *ylä- ja alasummiksi* ja näiden raja-arvoa funktion *integraaliksi*. Integraali kuvaa funktion *kertymää* tietyllä välillä. Jos funktio kuvaa jonkin suureen muutosnopeutta, integraali kertoo suureen arvon kokonaismuutoksen.

**Määritelmä 5.1.** Olkoon $f$ välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio. Jaetaan väli tasaisesti korkeintaan $h$:n pituisiin suljettuihin osaväleihin. (Jos jako ei mene tasan, annetaan oikeanpuoleisimman osavälin olla lyhyempi kuin muut.) Valitaan jokaisella osavälillä funktion suurin arvo, kerrotaan se välin pituudella ja lasketaan näin saadut arvot yhteen. Kutsutaan saatua summaa funktion *yläsummaksi välillä* $[a, b]$ ja merkitään tätä $S_h$. Funktiolla on varmasti jokaisella osavälillä suurin arvo lauseen 4.16 nojalla.

Valitaan samoin jokaisella osavälillä pienin arvo, kerrotaan se välin pituudella ja lasketaan tulokset yhteen. Kutsutaan tätä summaa funktion *alasummaksi välillä* $[a, b]$ ja merkitään sitä $s_h$.

Funktion $f$ *integraali välillä* $[a, b]$ on yläsumman ja alasumman raja-arvo osavälin pituuden $h$ lähestyessä nollaa:

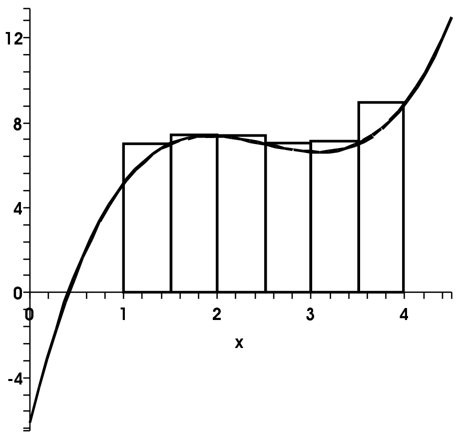
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} S_h = \lim_{h\to 0} s_h.$$

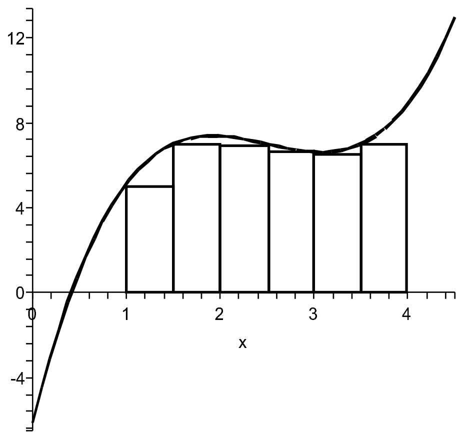
Tämä raja-arvo on aina olemassa, kun $f$ on jatkuva välillä $[a, b]$.

Integraalimerkinnässä integroimisväli merkitään integraalimerkin ylä- ja alapäähän. Termi $dx$ lopettaa integroitavan lausekkeen. Se kertoo, minkä muuttujan suhteen integroitava lauseke on kirjoitettu (voisi olla esim. $f(t)\,dt$).

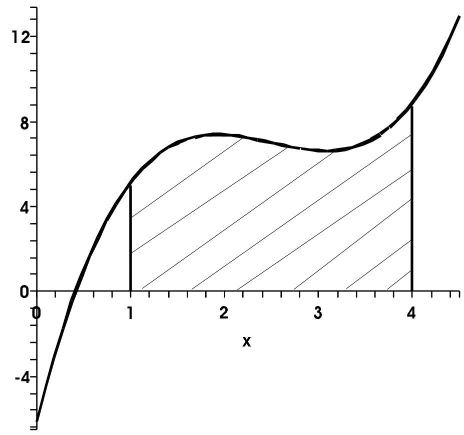
Kaikki jatkuvat funktiot ovat *integroituvia* millä tahansa suljetulla välillä, eikä määritelmässä tarvitsisi tarkastella erikseen sekä ylä- että alasummia. Integraali voidaan kuitenkin määritellä muillekin kuin jatkuville funktioille. Jos funktio ei ole jatkuva, voi käydä niin, etteivät ylä- ja alasummat lähesty toisiaan $h$:n pienetessä. Tällöin funktio ei ole integroituva.

5.1. **Integraali kuvaajassa.** Ajatellaan integroimisväli jaetuksi tasaisesti osaväleihin. Funktion yläsumma on sellaisten suorakulmioiden pinta-alojen summa, joiden korkeus on jokaisella osavälillä funktion suurin arvo. Alasumma taas koostuu sellaisten suorakulmioiden pinta-aloista, joiden korkeus on joka osavälillä funktion pienin arvo.




Kun osavälin pituutta lyhennetään, lähestyvät funktion suurin ja pienin arvo tuolla välillä toisiaan (Tämä johtuu funktion jatkuvuudesta: kun muuttuja on sidottu pienelle välille, ei funktion arvokaan voi muuttua paljon.) Siispä myös ylä- ja alasuorakulmioiden huiput kullakin välillä lähestyvät toisiaan ja funktion kuvaajaa, joka on niiden välissä. Kun osavälien pituus lähestyy nollaa, suorakulmioiden huiput kohtaavat ja puristavat funktion arvon väliinsä. Tällöin niiden yhteenlasketun pinta-alan raja-arvo, funktion integraali, vastaa *kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa.*




**Huom.** Kuten "välin pituus" $h$ erotusosamäärän lausekkeessa, voi myös integraali olla negatiivinen, vaikka se tavallaan kuvaakin pinta-alaa. Jos nimittäin funktio on jollain välillä negatiivinen, eli kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, on myös integraali tuolla välillä negatiivinen.

5.2. **Integraalin laskeminen.** Integraalin laskeminen suoraan määritelmän avulla on yleensä erittäin vaikeaa (vaikeampaa kuin derivaatan laskeminen erotusosamäärän avulla). Siksi integroitaessa käytetäänkin yleensä apuna niin kutsuttua *integraalifunktiota.* Funktion $F$ derivaatta $F'$ on itsekin eräs funktio, joten sitä voidaan merkitä vaikkapa $f$. Tämän (derivaatta)funktion $f$ integraalifunktio on alkuperäinen funktio $F$. Integraalifunktio on siis derivaatalle vastakkainen käsite, ja usein puhutaankin *antiderivaatasta.*

**Määritelmä 5.2.** Funktio $F$ on funktion $f$ *integraalifunktio*, jos $F' = f$.

Funktion integraalifunktion derivaatta on siis funktio itse, samaten derivaatan integraalifunktio. Jos funktio on jatkuva, sillä on aina olemassa integraalifunktio, jopa useita. Jos esimerkiksi $f(x) = 2x$, niin integraalifunktioksi kelpaa yhtä hyvin $F_1(x) = x^2$ kuin $F_2(x) = x^2+1$, sillä $Dx^2 = D(x^2+1) = 2x$. Funktion eri integraalifunktiot ovat kuitenkin aina hyvin samankaltaisia, kuten seuraava lause kertoo.

**Lause 5.3.** *(Integraalilaskennan peruslause) Olkoon $F_1' = F_2' = f$, eli sekä $F_1$ että $F_2$ ovat funktion $f$ integraalifunktioita. Tällöin $F_1(x) = F_2(x) + C$ kaikilla $x$, missä $C$ on vakio.*

Funktion $f$ kaikki integraalifunktiot ovat siis vakion lisäystä vaille samoja. Integraalifunktiota merkitään usein seuraavasti:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

Tässä siis $F$ on $f$:n integraalifunktio. Merkintä on sama kuin integraalilla ilman integroimisväliä, ja joskus integraalifunktiota kutsutaankin *määräämättömäksi integraaliksi*. Vakio $C$ on niin sanottu *integroimisvakio*, joka kuvaa sitä, ettei integraalifunktio ole yksikäsitteinen.

**Esimerkki 5.4.** Funktion $f(x) = x$ eräs integraalifunktio on $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. Voidaan siis merkitä

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Koska derivaatta kuvaa funktion muutosnopeutta, ja integraali taas muutoksen aiheuttamaa kertymää, ovat integraali ja derivaatta eräässä mielessä toistensa vastakohtia. Kuljetun matkan derivaatta on kulkunopeus, kun taas kulkunopeuden integraalina saadaan kuljettu matka. Tähän perustuu seuraava lause.

**Lause 5.5.** *(Analyysin peruslause) Olkoon $f$ välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio, ja $F$ jokin sen integraalifunktio (eli $F' = f$.) Tällöin*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

*Usein merkitään*

$$\Big/_{\!a}^{\,b} F(x) = F(b) - F(a).$$

*Merkintä lausutaan "sijoitus a:sta b:hen".*

**Huom.** Vaikka kaikilla funktioilla on monia integraalifunktioita, ei ole väliä, mitä niistä käyttää integraalia laskettaessa. Tämä johtuu siitä, että sijoituksessa mahdolliset ylimääräiset vakiot supistuvat kuitenkin pois.

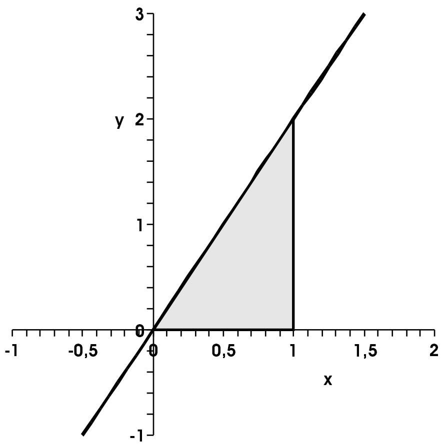
**Esimerkki 5.6.** Olkoon $f(x) = 2x$. Eräs integraalifunktio on $F(x) = x^2$. Edeltävän lauseen mukaan

$$\int_0^1 2x\,dx = \Big/_{\!0}^{\,1} x^2 = 1^2 - 0^2 = 1.$$

Toisaalta myös $x^2 + 1$ on $f$:n integraalifunktio, joten

$$\int_0^1 2x\,dx = \Big/_{\!0}^{\,1} (x^2 + 1) = (1^2 + 1) - (0^2 + 1) = 1 + 1 - 0 - 1 = 1.$$

Tämän integraalin arvo on kuvan varjostetun kolmion pinta-ala.




5.3. **Laskusääntöjä.**

$$1. \quad \int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$2. \quad \int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$3. \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Kaksi ensimmäistä sääntöä ovat tuttuja jo derivaatan yhteydestä. Kolmas sääntö sanoo, että integroimisväli voidaan pilkkoa osiin. Tämä on hyödyllistä esimerkiksi, jos funktio on paloittain määritelty ja eri alueissa tarvitaan eri integraalifunktioita.

**Esimerkki 5.7.** Integroidaan itseisarvofunktiota $f(x) = |x|$ välillä $[-1, 1]$. Lasketaan integraali osissa. Välillä $[-1, 0]$ on $f(x) = -x$, joten integraalifunktioksi voidaan valita $F_1(x) = -\frac{1}{2}x^2$. Toisaalta välillä $[0, 1]$ pätee $f(x) = x$, joten integraalifunktioksi käy $F_2(x) = \frac{1}{2}x^2$. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} |x|\,dx &= \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_0^1 x\,dx = \Big/_{\!\!-1}^{\,0} -\frac{1}{2}x^2 + \Big/_{\!\!0}^{\,1} \frac{1}{2}x^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\cdot 0^2 - \left(-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2\right)\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2\right) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 = 1.\end{aligned}$$

Analyysin peruslauseen mukaan derivoimissäännöistä saadaan suoraan vastaavat integroimissäännöt. Esimerkiksi potenssin integroimissääntö on

$$4. \quad \int_a^b x^k\,dx = \Big/_{\!\!a}^{\,b} \frac{1}{k+1}x^{k+1}, \quad \text{kun } k \neq -1.$$

**Huom.** Potenssitermi integroidaan siis lisäämällä eksponenttiin yksi ja jakamalla lauseke näin syntyneellä uudella eksponentilla. Koska potenssin derivoimissääntö ei toimi, jos eksponentti on nolla, vastaavasti *integroimissääntö ei toimi, kun eksponentti on* $-1$.

Integroiminen on yleensä vaikeampaa kuin derivoiminen, koska tulon, osamäärän tai yhdistetyn funktion integroimiseen ei ole olemassa laskusääntöjä. Yhdistetyn funktion derivoimissäännöstä saadaan kuitenkin seuraava hyödyllinen integroimissääntö:

$$5. \quad \int_a^b f'(g(x))g'(x)\,dx = \Big/_{\!a}^{\,b} (f\circ g)(x).$$

**Esimerkki 5.8.** Integroidaan funktiota $h(x) = x(x^2+1)^3$ välillä $[0,1]$. Yritetään saada riippuvuussäännön lauseke laskusäännön 5 vaatimaan muotoon $f'(g(x))g'(x)$. Täytyisi siis tulkita lause siten, että siinä on yhdistetty funktio, jonka ulkofunktio on jonkin funktion derivaatta ja tämä yhdistetty funktio on vielä kerrottu sisäfunktion derivaatalla.

Lausekkeessa esiintyykin valmiina yhdistetyn funktion lauseke $(x^2+1)^3$. Valitaan siis sisäfunktioksi $g(x) = x^2+1$. Tämä lauseke on vielä kerrottu $x$:llä, joka on itse asiassa vakiokerrointa vaille sisäfunktion derivaatta $g'(x) = 2x$. Enää tarvitsee tulkita ulkofunktio erään funktion $f$ derivaataksi, eli niin että $f'(x) = x^3$. Voidaan valita esimerkiksi $f(x) = \frac{1}{4}x^4$. Säännön mukaan

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^3\cdot 2x\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 f'(g(x))g'(x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\Big/_{\!0}^{\,1}(f\circ g)(x) = \frac{1}{2}\Big/_{\!0}^{\,1} f(x^2+1) = \frac{1}{2}\Big/_{\!0}^{\,1}\frac{1}{4}(x^2+1)^4\\ &= \frac{1}{8}\left[(1^2+1)^4-(0^2+1)^4\right] = \frac{1}{8}(16-1) = \frac{15}{8}.\end{aligned}$$

Huomaa, miten integraaliin lisättiin aluksi sisäfunktion derivaatan vaatima kerroin 2. Samalla koko integraali piti kertoa puolikkaalla. Tällä tavoin voidaan korvata mikä tahansa vakiokertoimen puuttuminen sisäfunktion derivaatasta. Sen sijaan esimerkiksi lauseketta $x(x^3+1)^3$ ei voisi saada säännön vaatimaan muotoon, koska sisäfunktion derivaatta on $3x^2$, ja ulkopuolella on kertoimena vain $x$. Toista potenssia sille ei mitenkään voida lisätä.

5.4. **Sovelluksia.** Integraalilla voidaan laskea jonkin suureen kertymää esimerkiksi ajan suhteen.

**Esimerkki 5.9.** Metsän kasvit käyttävät auringonpaisteesta saamaansa energiaa. Energian mittausta varten metsään on asetettu mittalaitteita, jotka mittaavat auringonpaisteen tehoa eli energiavuota. Mitä kirkkaampi paiste, sitä suurempi mittalaitteen lukema. Erään tällaisen mittalaitteen lukema noudatti aikavälillä $[12,13]$ melko tarkasti funktiota $P(t) = -3{,}6t^2+94t-500$ (kJ/h). Tällä aikavälillä laitteen vastaanottama energia on energiavuon kertymä, joten se saadaan integroimalla

$$\begin{aligned}E &= \int_{12}^{13} -3{,}6t^2+94t-500\,dt = \Big/_{\!12}^{\,13}\left(-1{,}2t^3+47t^2-500t\right)\\ &= \left(-1{,}2\cdot 13^3+47\cdot 13^2-500\cdot 13\right)-\left(-1{,}2\cdot 12^3+47\cdot 12^2-500\cdot 12\right)\approx 110 \text{ (kJ)}.\end{aligned}$$

Integraalia voidaan myös käyttää geometrisenä työkaluna, koska se kertoo kuvaajan ja x-akselin välisen pinta-alan.

**Esimerkki 5.10.** Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3$. Mikä on tämän funktion kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[-1,1]$?

Ensin on muistettava, että integraali ei itse asiassa kuvaa pinta-alaa, koska se on negatiivinen siellä, missä itse funktiokin on negatiivinen. Ensin on siis tutkittava hieman funktiota $f$, jolloin saadaan selville, että $f$ on negatiivinen välillä $[-1,0[$. Pinta-alan laskemiseksi on siis jaettava väli kahteen osaan: $[0,1]$ ja $[-1,0]$. Integraalit näiden välien yli ovat

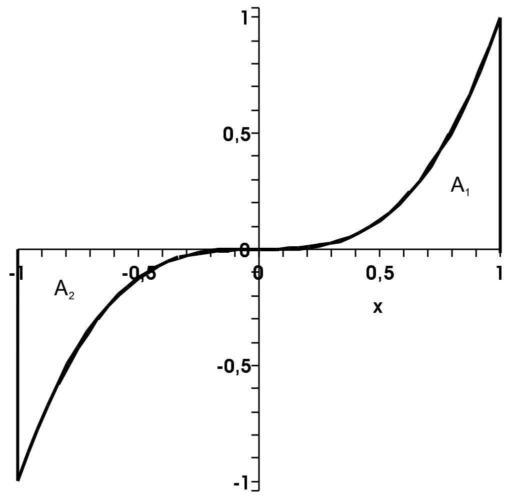
$$I_1 = \int_0^1 x^3\,dx = \mathop{\Big/}_{0}^{1} \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4},$$

ja

$$I_2 = \int_{-1}^0 x^3\,dx = \mathop{\Big/}_{-1}^{0} \frac{1}{4}x^4 = \left(0 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Jälkimmäinen integraali on negatiivinen, kuten pitikin olla. Pinta-ala saadaan nyt laskemalla yhteen nämä integraalit, kunhan jälkimmäisen etumerkki vaihdetaan:

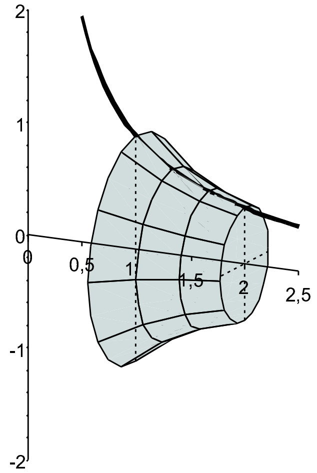
$$A = I_1 + (-I_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$




**Esimerkki 5.11.** Tutkitaan pyörähdyskappaletta, joka syntyy, kun jonkin funktion $f$ kuvaaja pyörähtää syvyyssuunnassa x-akselin ympäri ja näin saadun pinnan sisään jäävä tila vielä "katkaistaan päistä" kahdella x-akseliin nähden kohtisuorassa olevalla tasolla kohdissa $a$ ja $b$. Ollaan siis tavallaan "sorvattu" $a$:n ja $b$:n välillä olevasta palikasta pyörähdyskappale funktion $f$ kuvaajan muotoisella terällä.

Tietyssä kohdassa $x$ mainitun pyörähdyskappaleen poikkileikkaus on ympyrä, jonka säde on $f(x)$. Ympyrän alan kaava on $\pi r^2$, joten pyörähdyskappaleen poikkipinta-ala tuossa kohdassa on $\pi f(x)^2$. Kappaleen tilavuus saadaan poikkipinta-alan kertymänä välillä $[a, b]$ eli integroimalla $\pi f(x)^2$ $a$:sta $b$:hen. Otetaan esimerkiksi selville funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ kuvaajan välille [1,2] muodostaman pyörähdyskappaleen tilavuus:

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \pi f(x)^2\,dx = \int_1^2 \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= \pi \int_1^2 x^{-2}\,dx = \pi \mathop{\Big/}_{1}^{2} -x^{-1} = \pi \mathop{\Big/}_{1}^{2} \left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= \pi \left(-\frac{1}{2} - (-1)\right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$




5.5. **Epäjatkuvan funktion integraalista.** Integraali voidaan helposti yleistää koskemaan myös epäjatkuvia funktioita. Määritelmää täytyy oikeastaan muuttaa vain kahdessa kohdassa. Ensinnäkin epäjatkuva funktio ei välttämättä saavuta pienintä tai suurinta arvoa suljetulla välillä. Tämä voidaan kuitenkin helposti korvata käyttämällä suurimman arvon sijasta niin kutsuttua pienintä ylärajaa ja pienimmän arvon sijasta suurinta alarajaa. Nämä ovat olemassa, mikäli funktio on rajoitettu (eli ei saa mielivaltaisen suuria tai pieniä arvoja). Toinen ongelma on se, etteivät funktion yläsumma ja alasumma välttämättä lähesty samaa lukua osaväliä lyhennettäessä. Tällöin funktio ei ole integroituva. Lisäksi täytyy sallia muutkin kuin tasaiset osavälijaot, koska joidenkin epäjatkuvien funktioiden ylä- ja alasummat lähestyvät toisiaan vain, jos jako ei ole tasainen.

Myös integraalifunktion käsite aiheuttaa ongelmia. Lähes kaikki derivaatat ovat jatkuvia, joten useimmilla epäjatkuvilla funktioilla ei ole integraalifunktiota. Integraalit on silloin laskettava muulla tavalla. Toisaalta voi myös käydä niin, että integraalifunktio on kyllä olemassa, mutta funktio ei olekaan integroituva. Epäjatkuvien funktioiden kanssa täytyy siis olla joka suhteessa tarkkana, mutta usein integrointi kuitenkin onnistuu, kuten seuraavan esimerkin tapauksessa.

**Esimerkki 5.12.** Ennen kuin auringonpaistetta mittaavat laitteet vietiin metsään, niitä testattiin laboratoriossa. Laite asetettiin kirkkaan lampun alle kymmeneksi sekunniksi, ja viiden sekunnin kohdalla valo katkaistiin. Mittalaite kuitenkin rekisteröi vielä huoneen ikkunoista tulevan valon.

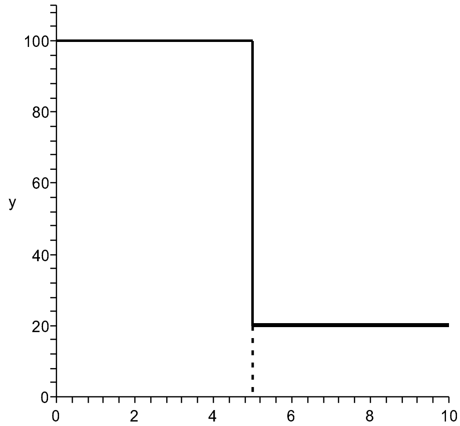
Olkoon mittalaitteen $P : [0, 10] \to \mathbb{R}$ mittalaitteen lukema ajan funktiona. Tällöin

$$P(t) = \begin{cases} 100, \text{ kun } 0 \leq t \leq 5 \\ 20, \text{ kun } 5 < t \leq 10 \end{cases} \quad (\mathrm{J/s}).$$

Funktio $P$ on epäjatkuva eikä se ole minkään funktion derivaatta. Sillä ei siis ole integraalifunktiota. Se on kuitenkin integroituva, ja sen integraalille pätevät kaikki samat laskusäännöt kuin jatkuvassakin tapauksessa. Voimme siis integroida sen erikseen väleillä $[0, 5]$ ja $[5, 10]$ (laskusääntö 3). Kummallakin osalla funktio on jatkuva ja sillä on integraalifunktio, joten

$$\begin{aligned} \int_0^{10} P(t)\,dt &= \int_0^5 P(t)\,dt + \int_5^{10} P(t)\,dt = \int_0^5 100\,dt + \int_5^{10} 20\,dt \\ &= \Big/_{\!0}^{5}\, 100t + \Big/_{\!5}^{10}\, 20t = (500 - 0) + (200 - 100) = 600 \text{ (kJ)}. \end{aligned}$$

(Jos ollaan tarkkoja, suljetulla välillä $[5, 10]$ funktio ei ole jatkuva, koska päätepisteessä arvo on $f(5) = 100$. Integraalin suuruus ei kuitenkaan riipu arvoista päätepisteissä.)




## 6. Joitain erityisfunktioita

6.1. **Eksponenttifunktio.** Luvun $a$ potenssi $a^k$ on tähän mennessä määritelty vain niissä tapauksissa, joissa $k$ on kokonais- tai murtoluku. Tätä määritelmää voidaan kuitenkin laajentaa koskemaan myös muita reaalilukuja. Tämän avulla voidaan laskea esimerkiksi luku $2^{\sqrt{2}}$. Määritelmää ei käydä läpi tällä kurssilla, vaan sen sijaan luotetaan siihen, että laskin antaa tällaisille luvuille tarvittaessa hyviä likiarvoja.

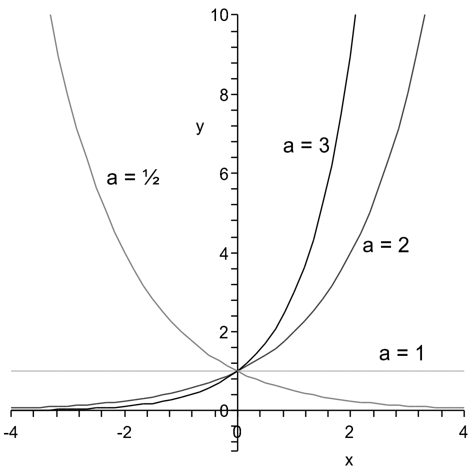
Kun potenssi laajennetaan koskemaan mitä tahansa lukuja, voidaan muodostaa funktio, jonka arvot ovat jonkin positiivisen vakion $a$ arvoja korotettuina muuttujan osoittamiin potensseihin. Tämä funktio on nimeltään *$a$-kantainen eksponenttifunktio*, ja sitä merkitään usein $\exp_a$.

**Määritelmä 6.1.** Funktiota $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp_a(x) = a^x$, missä $a$ on jokin positiivinen vakio, kutsutaan *$a$-kantaiseksi eksponenttifunktioksi*. Vakiota $a$ kutsutaan eksponenttifunktion *kantaluvuksi*.

Potenssifunktion ja eksponenttifunktion ero on siis se, että potenssifunktiossa muuttujan arvo korotetaan vakiopotenssiin, kun taas eksponenttifunktiossa vakio korotetaan muuttujan osoittamaan potenssiin. Huomaa, että jälkimmäisessä tapauksessa vakion $a$ on määritelmän mukaan oltava positiivinen.

**Esimerkki 6.2.** Olkoot $f(x) = x^2$ ja $g(x) = 2^x$. Tällöin $f(1) = 1^2 = 1$, $f(-1) = (-1)^2 = 1$ ja $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$. Toisaalta $g(1) = 2^1 = 2$, $g(-1) = 2^{-1} = 1/2$ ja $g(\sqrt{2}) = 2^{\sqrt{2}} \approx 2{,}665$. Kuitenkin $f(2) = 2^2 = g(2)$.

Eksponenttifunktio on (kantaluvusta riippumatta) kaikkialla jatkuva ja derivoituva sekä aina aidosti positiivinen. Alla on eksponenttifunktion kuvaajia erilaisilla kantaluvun $a$ arvoilla. Jos $a > 1$, niin eksponenttifunktio on aidosti kasvava. Jos taas $a < 1$, niin funktio on aidosti vähenevä.




Potenssien laskusäännöt pätevät myös eksponenttifunktiolle:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $a^{-x} = 1/a^x$
4. $a^0 = 1$

Kun kantaluvuksi valitaan ns. *Neperin luku* $e$, saadaan erityisen mielenkiintoinen eksponenttifunktio. Yleensä, jos puhutaan eksponenttifunktiosta kantalukua mainitsematta, tarkoitetaan juuri tätä funktiota.

**Määritelmä 6.3.** Funktiota

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x$$

kutsutaan *(tavalliseksi) eksponenttifunktioksi.* Vakio $e$ on irrationaaliluku, jonka likiarvo on 2,71828.

Tavallisen eksponenttifunktion tärkein ominaisuus on se, että sen derivaatan arvo on joka pisteessä sama kuin itse funktion arvo:

$$D\ e^x = e^x.$$

Tämä ominaisuus on hyvin tärkeä muun muassa differentiaaliyhtälöiden yhteydessä.

**Esimerkki 6.4.** Eksponenttifunktioiden yhteydessä tulon ja yhdistetyn funktion derivointisäännöt tulevat tarpeeseen. Derivoidaan esimerkin vuoksi funktio $f(x) = xe^{2x}$. Kyseessä on siis polynomin ja eksponenttifunktion tulo. Tulon derivointisäännön mukaan

$$f'(x) = Dx \cdot e^{2x} + x \cdot De^{2x} = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot De^{2x} = e^{2x} + x \cdot De^{2x}.$$

Derivoimatta jäi vielä $De^{2x}$. Tämä on yhdistetyn funktion lauseke, missä ulkofunktiona on $g(x) = e^x$ ja sisäfunktiona $h(x) = 2x$. Ulko-osan derivaatta on $e^x$, ja sisäosan derivaatta on 2. Yhdistetyn funktion derivoimissäännön mukaisesti saadaan siis

$$De^{2x} = g'(h(x))h'(x) = g'(2x) \cdot 2 = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}.$$

Lopputulos on siis

$$f'(x) = e^{2x} + x \cdot De^{2x} = e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = e^{2x} + 2xe^{2x} = e^{2x}(1 + 2x).$$

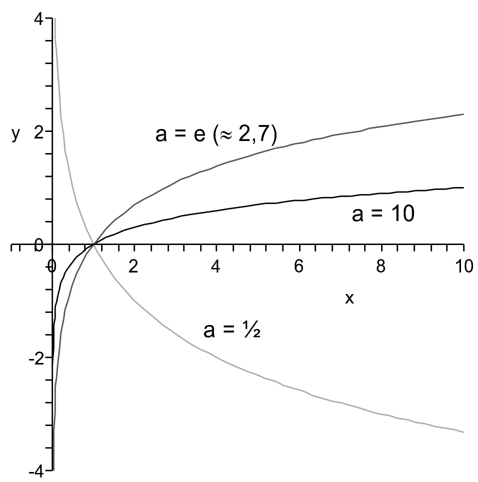
6.2. **Logaritmifunktio.** Logaritmifunktio on eksponenttifunktion *käänteisfunktio*. Tämä tarkoittaa sitä, että eksponenttifunktion arvo syötettynä logaritmifunktiolle palauttaa alkuperäisen muuttujan arvon. Toisaalta myös logaritmifunktion arvo syötettynä eksponenttifunktiolle palauttaa alkuperäisen arvon.

**Määritelmä 6.5.** Olkoon $a$ jokin positiivinen vakio. Voidaan osoittaa, että on olemassa funktio $\log_a : ]0, \infty[ \to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$\log_a a^x = a^{\log_a x} = x.$$

Tätä funktiota kutsutaan *a-kantaiseksi logaritmifunktioksi.*

Luvusta $x$ otettu $a$-kantainen logaritmi kertoo siis, mihin potenssiin $a$ täytyy korottaa, jotta saataisiin $x$ (sillä $a^{\log_a x} = x$). Huomaa, että logaritmi on määritelty vain positiivisilla luvuilla, koska positiivinen $a$ korotettuna mihin tahansa potenssiin on aina positiivinen. Kuten eksponenttifunktio, myös logaritmifunktio on kantaluvusta riippumatta derivoituva koko määrittelyjoukossaan, ja jos $a > 1$, niin logaritmifunktio on kasvava, jos $a < 1$, niin se on vähenevä.




**Esimerkki 6.6.** Logaritmi luvusta $x$ kertoo, mihin potenssiin kantaluku täytyy korottaa, jotta saataisiin $x$. Siispä

$$\log_2 16 = 4, \quad \log_3 9 = 2, \quad \log_5 125 = 3.$$

Lisäksi kaikilla kantaluvuilla $a$ pätee

$$\log_a 1 = 0, \quad \text{ja} \quad \log_a a = 1.$$

Eksponenttifunktion laskusäännöistä voidaan johtaa logaritmin laskusääntöjä.

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a x^y = y \log_a x$
3. $\log_a(1/x) = -\log_a x$
4. $\log_a 1 = 0$

Esimerkiksi 1 sääntö voidaan johtaa seuraavasti. Logaritmi $\log_a xy$ kertoo, mihin potenssiin $a$ täytyy korottaa, jotta saataisiin $xy$. Eksponenttifunktion laskusäännön 1 sekä logaritmifunktion määritelmän avulla saadaan $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy$. Siis $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

Joidenkin kantalukujen tapauksissa on tapana käyttää logaritmista omaa merkintää. Esimerkiksi

$$\log_{10} x = \lg x, \quad \log_e x = \ln x, \quad \log_2 x = \operatorname{lb} x.$$

**Esimerkki 6.7.** Kymmenkantainen logaritmi kertoo suunnilleen, kuinka monta numeroa luvussa on:

$$\lg 10 = 1, \quad \lg 120 \approx 2 \quad \lg 10000 = 4, \quad \lg 987654321 \approx 9.$$

Erikantaisista logaritmeista matematiikassa tärkein on ln. Sitä kutsutaan *luonnolliseksi logaritmiksi*, ja se on tavallisen eksponenttifunktion käänteisfunktio. Monesti sitä merkitään yksinkertaisesti log (ilman kantalukua). Luonnollisen logaritmin derivaatta on

$$D\ \ln x = \frac{1}{x}.$$

Esimerkiksi yhdistetyn funktion derivoimissäännöllä voidaan näyttää, että myös $D \ln(-x) = 1/x$. Tästä saadaan integroimissääntö

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \mathop{\Big/}_a^b \ln|x|.$$

Itseisarvo tarvitaan, koska ei tiedetä, onko väli $[a, b]$ positiivisella vai negatiivisella puolella. Logaritmiin ei nimittäin voi sijoittaa negatiivisia lukuja. Nyt voidaan vihdoin kirjoittaa potenssin integroimissääntö kokonaisuudessaan:

$$\int_a^b x^k\,dx = \mathop{\Big/}_a^b \frac{1}{k+1}x^{k+1}, \quad \text{jos } k \neq -1,$$
$$\int_a^b x^{-1}\,dx = \mathop{\Big/}_a^b \ln|x|.$$

**Esimerkki 6.8.** Integroidaan funktiota $f(x) = 1/x$ välillä $[1, e]$. Funktion $f$ (eräs) integraalifunktio on $\ln|x|$. Koska esimerkin integroimisvälillä pätee $x > 0$, integraalifunktio on itse asiassa $\ln x$. Täten

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \mathop{\Big/}_1^e \ln x = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Integroidaan sitten samaa funktiota välillä $[-2, -1]$. Koska nyt $x < 0$, integraalifunktio on $\ln|x| = \ln(-x)$. Siispä

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \mathop{\Big/}_{-2}^{-1} \ln(-x) = \ln 1 - \ln 2 = 0 - \ln 2 = -\ln 2 = \ln\frac{1}{2}.$$

Huomaa, että funktiota $f$ ei voi integroida esimerkiksi välillä $[-1, 1]$, koska $f$ ei ole määritelty nollassa.

6.3. **Kantaluvun vaihtaminen.** Kaikki eksponentti- ja logaritmifunktiot voidaan ilmaista tavallisen eksponenttifunktion ja luonnollisen logaritmifunktion avulla. Koska $e^{\ln a} = a$, saadaan ensinnäkin

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{\ln a \cdot x}.$$

Toisaalta $\log_a y$ on se luku $x$, johon $a$ pitää korottaa, jotta saataisiin $y$. Edellisen yhtälön mukaan tämä luku kerrottuna luvulla $\ln a$ on se luku, johon $e$ pitää korottaa, jotta saataisiin $y$. Saadaan siis seuraavat laskusäännöt kantaluvun vaihtamiselle:

$$\exp_a(x) = \exp(\ln a \cdot x),$$
$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Itse asiassa tässä voisi olla toisena kantalukuna muukin kuin $e$. Voitaisiin esimerkiksi vaihtaa kantaluvuksi 10 seuraavilla kaavoilla:

$$\exp_a(x) = \exp_{10}(\lg a \cdot x),$$
$$\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}.$$

**Esimerkki 6.9.** Ratkaistaan yksinkertainen eksponenttiyhtälö $4^x = 10$. Koska $4^1 = 4$ ja $4^2 = 16$, ratkaisu on oletettavasti ykkösen ja kakkosen välissä. Logaritmin määritelmän perusteella ratkaisu on $x = \log_4 10$, mutta tavallisella laskimella tätä ei voi suoraan laskea. Laskimen näppäimissä on yleensä vain luonnollinen logaritmi (ln tai log) sekä toisinaan myös kymmenkantainen logaritmi (lg, joskus myös log). Käytetään siis kantaluvun vaihtoa:

$$x = \log_4 10 = \frac{\ln 10}{\ln 4} \approx \frac{2{,}303}{1{,}386} \approx 1{,}66.$$

Esimerkin yhtälön voi ratkaista myös toisella tavalla. Logaritmien laskusääntöjen mukaan nimittäin $\ln 4^x = x \ln 4$. Voidaan siis päätellä seuraavasti:

$$\begin{aligned} 4^x = 10 &\iff \ln 4^x = \ln 10 \\ &\iff x \ln 4 = \ln 10 \quad \mid : \ln 4 \\ &\iff x = \frac{\ln 10}{\ln 4}. \end{aligned}$$

**Esimerkki 6.10.** Derivoidaan funktio $f : ]0, \infty[ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$. Edellisen laskusäännön perusteella

$$f'(x) = Dx^x = D\left(e^{\ln x \cdot x}\right).$$

Tämä voidaan laskea yhdistetyn funktion derivaattana. Ulkofunktio on tavallinen eksponenttifunktio, jonka derivaatta on kyseinen funktio itse. Ulko-osa säilyy siis koskemattomana. Sisäfunktion lauseke on puolestaan $\ln x \cdot x$, jonka derivoimiseen käytetään tulon derivointisääntöä:

$$D(\ln x \cdot x) = D(\ln x) \cdot x + \ln x \cdot Dx = \frac{1}{x} \cdot x + \ln x \cdot 1 = 1 + \ln x.$$

Yhdistetyn funktion derivoimissäännön mukaisesti saadaan lopulta

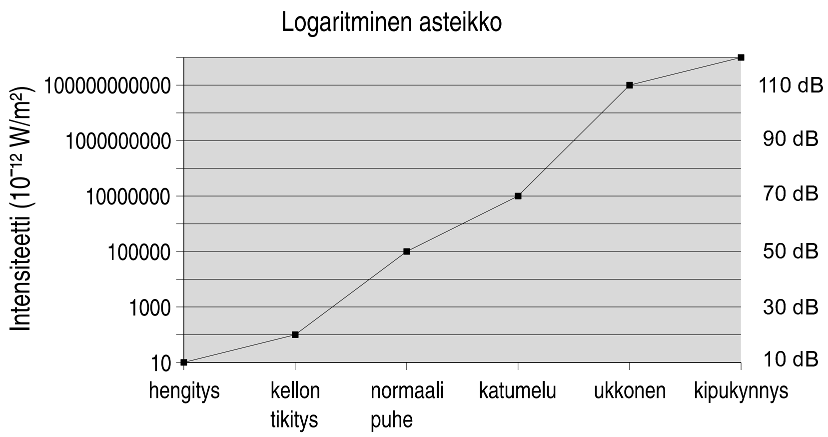
$$f'(x) = D\left(e^{\ln x \cdot x}\right) = e^{\ln x \cdot x} \cdot D(\ln x \cdot x) = e^{\ln x \cdot x} \cdot (1 + \ln x).$$

Lopputulos voidaan vielä kirjoittaa muotoon $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$.

6.4. **Logaritminen asteikko.** Toisinaan on käytännöllistä ilmaista jonkin suureen arvoja ns. *logaritmisen asteikon* avulla. Tämä tulee kyseeseen erityisesti, jos suureen arvot vaihtelevat erityisen laajoissa rajoissa. Logaritmin ottaminen palauttaa arvot ymmärrettävälle asteikolle.

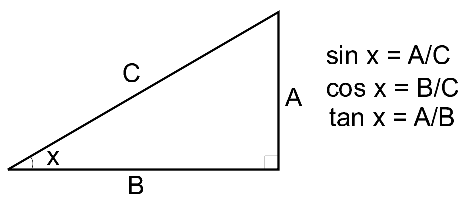
Esimerkiksi kuuloaisti toimii siten, että äänen intensiteetin kymmenkertaistaminen lisää kuulovaikutelman voimakkuutta vakiomäärällä, oli kyse sitten kovista tai hiljaisista äänistä. (Siis kymmenkertainen voimakkuuden muutos alkuperäiseen verrattuna kuulostaa samalta kuin satakertainen kymmenkertaiseen verrattuna.) Jos samalla asteikolla esimerkiksi kellon tikityksen voimakkuus on 1 ja puheen 10, on ukkosen voimakkuus jopa 1000. Tällaisella asteikolla pienet vaihtelut jäävät asteikon alapäässä varjoon.

Äänen voimakkuuden kuvaamiseen käytetään yleisesti *desibeliasteikkoa*, joka määritellään kaavalla $L = 10 \cdot \lg(I/I_0)$. Samaa asteikkoa käytetään muissakin yhteyksissä, mutta äänenvoimakkuuden tapauksessa $I$ on äänen intensiteetti (yksikkönä $\mathrm{W/m^2}$) ja $I_0$ on kuulokynnystä vastaava intensiteetti. Luku $L$ on voimakkuuden vaikutelma desibeleinä. Kaavan mukaan 60 desibelin ääni on intensiteetiltään kymmenen kertaa voimakkaampi kuin 50 desibelin ääni. Toisaalta 70 desibelin ääni on jo sata kertaa voimakkaampi.



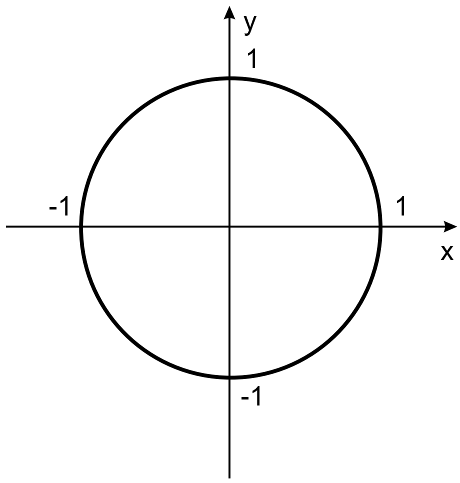

Myös äänen korkeutta kuvataan yleensä logaritmisella asteikolla. Tietty sävel soitettuna oktaavia korkeammalta on aina taajuudeltaan kaksinkertainen alkuperäiseen nähden. Esimerkiksi yksiviivainen a soi taajuudella 440 Hz, kaksiviivainen a taajuudella 880 Hz ja kolmiviivainen taajuudella 1760 Hz. Richterin asteikko, jolla ilmaistaan maanjäristysten voimakkuuksia, on myös logaritminen. Yhtä Richterin yksikköä kovempi järistys on alkuperäiseen nähden voimakkuudeltaan kymmenkertainen.

6.5. **Trigonometriset funktiot.** Tässä osassa tutustutaan sini-, kosini- ja tangenttifunktioihin. Näitä kutsutaan trigonometrisiksi funktioiksi, koska ne liittyvät kolmioiden sivujen ja kulmien suhteisiin. Ne voidaan myös määritellä suorakulmaisen kolmion avulla koulusta tutulla tavalla seuraavasti: kulman $x$ sini, jota merkitään $\sin x$, on kulman $x$ vastaisen kateetin pituuden suhde kolmion hypotenuusan pituuteen. Kuvan mukaisesti siis $\sin x = A/C$. Samoin määritellään, että kulman $x$ kosini on kulman viereisen kateetin pituuden suhde hypotenuusan pituuteen. Tangentti puolestaan on vastaisen kateetin suhde viereiseen kateettiin.

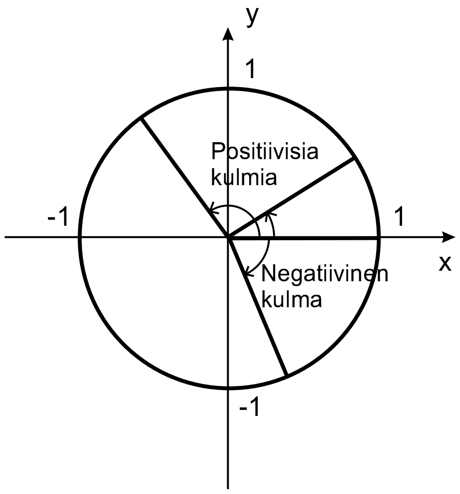


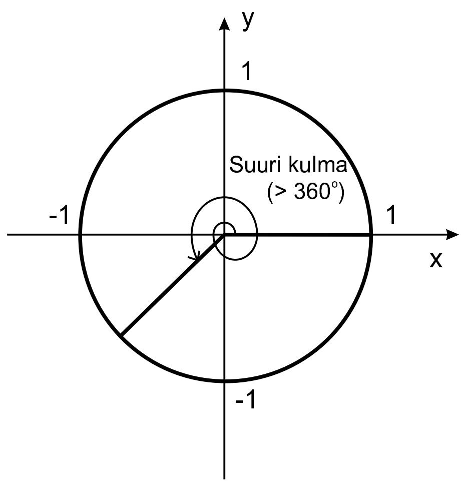

Suorakulmaisessa kolmiossa ei mikään muu kuin tuo suora kulma voi olla 90 astetta suurempi. Tällä tavoin määriteltyjen trigonometristen funktioiden määrittelyjoukoksi jää siis väli $[0, 90]$. Määritelmää voidaan kuitenkin laajentaa niin sanotun *yksikköympyrän* avulla, kun tulkitaan negatiiviset sekä 360 astetta suuremmat kulmat oikealla tavalla.

Yksikköympyrä on (x,y)-koordinaatistoon piirretty origokeskeinen ympyrää, jonka säde on 1.

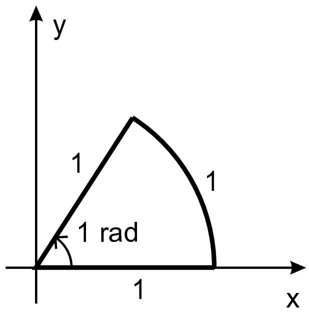



Sijoitetaan yksikköympyrään *suunnattu kulma* (eli kulma, jolla on määrätty *alkukylki* ja *loppukylki*) siten, että kulman kärkipiste on origossa ja alkukylki kulkee x-akselin positiivista puolta pitkin. Kulman suuruus on positiivinen, jos se aukeaa alkukyljestä vastapäivään, muutoin negatiivinen. Kulma voi olla laajempikin kuin täysi ympyrä.




Kulman suuruus ilmoitetaan tavallisesti *radiaaneissa* eli *absoluuttisissa kulmayksiköissä.* Yksi radiaani on sellaisen kulman laajuus, jota vastaa yksikköympyrän kehällä kaari, jonka pituus on 1.

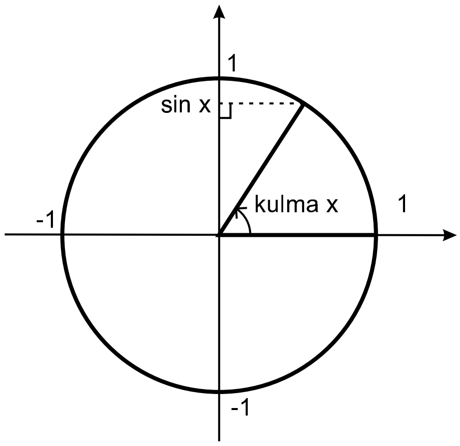



Koska yksikköympyrän kehän pituus on $2\pi$, on koko ympyrässä eli täyskulmassa $2\pi$ radiaania, oikokulmassa (180°) $\pi$ radiaania ja suorassa kulmassa $\frac{\pi}{2}$ radiaania. Yleisesti asteiden ja radiaanien yhteys on seuraava:

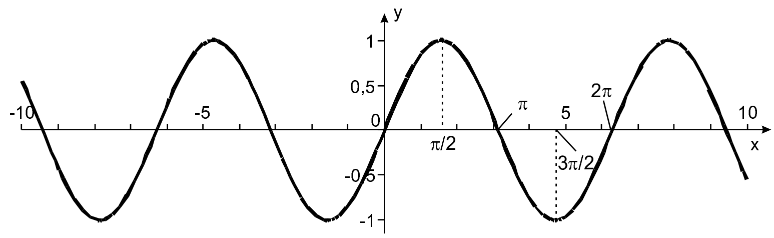
$$\text{kulman suuruus radiaaneina} = \text{kulman suuruus asteina} \cdot \frac{\pi}{180}.$$

6.6. **Sinifunktio.** Yksikköympyrään piirretyn kolmion avulla voidaan määritellä yleinen sinifunktio.

**Määritelmä 6.11.** Funktio $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään seuraavasti. Olkoon $x$ yksikköympyrään sijoitetun suunnatun kulman suuruus. Tällöin $\sin x$ on kulman loppukyljen ja ympyrän kehän leikkauspisteen y-koordinaatin arvo.




Funktion määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko eli $\mathbb{R}$. Sinifunktion arvot täyttävät suljetun välin $[-1, 1]$, toisin sanoen funktio saa kaikkia arvoja ko. väliltä, välin päätepisteet mukaan lukien. Sinifunktio on kaikkialla jatkuva. Sinifunktion kuvaaja, *sinikäyrä*, aaltoilee -1:n ja 1:n välillä:




Edellisessa kuvassa kulman yksikkönä on käytetty radiaaneja, mikä on matematiikassa yleensä kätevää. Tällöin sinifunktio kasvaa $x$:n kasvaessa 0:sta $\frac{\pi}{2}$:een, alkaa sitten vähetä, muuttuu negatiiviseksi arvon $x = \pi$ jälkeen, alkaa taas kasvaa arvon $x = \frac{3}{2}\pi$ jälkeen ja saavuttaa uudelleen nollan kohdassa $x = 2\pi$. Tämän voi todeta helposti myös pienentämällä ja kasvattamalla suunnattua kulmaa yksikköympyrässä. Käytännössä kohdat, joissa sinifunktion suunta tai merkki vaihtuu, osuvat kohtiin, joissa tarkasteltavan kulman loppukylki siirtyy koordinaatiston neljänneksestä toiseen ja jotka siis ovat suoran kulman $\pi/2$ monikertoja.

Sinifunktio on *jaksollinen*, mikä tarkoittaa, että samat arvot toistuvat aina tietyin välein. Sinifunktion aaltoilu toistuu kuvaajassa aina $2\pi$:n välein, ja funktiolla on ääretön määrä nollakohtia. Trigonometristen funktioiden nollakohtia laskettaessa onkin aina muistettava, että nollakohtia on funktion toistumisjakson välein ääretön määrä. Sinifunktion nollakohdat voisi esittää esimerkiksi seuraavasti:

$$x = 0 + n \cdot \pi,$$

missä $n$ on jokin kokonaisluku (voi olla myös negatiivinen). Tällöin nollakohtia ($x$) ovat luvun 0 lisäksi kaikki luvut, joissa nollaan on lisätty $\pi$ mielivaltaisen monta kertaa.

**Esimerkki 6.12.** Etsitään väliltä $[0, 4]$ ne luvut $x$, jotka toteuttavat yhtälön $\sin(2x + \pi/2) = 0$. Koska sinifunktio saa arvon nolla kohdassa 0 sekä aina $\pi$:n välein, nähdään että

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \iff 2x + \frac{\pi}{2} = 0 + n \cdot \pi,$$

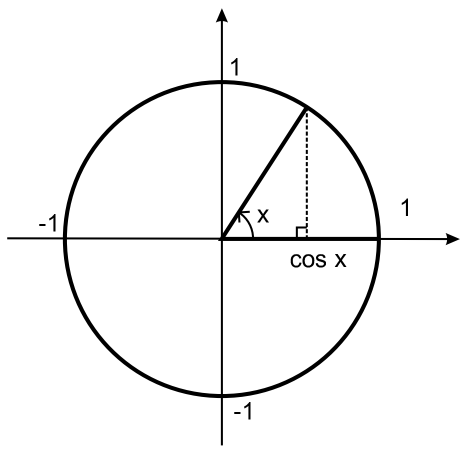
missä $n$ on mielivaltainen kokonaisluku. Saadusta yhtälöstä voidaan sitten ratkaista $x$:

$$\begin{aligned} 2x + \frac{\pi}{2} = n \cdot \pi &\iff 2x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad | : 2 \\ &\iff x = -\frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

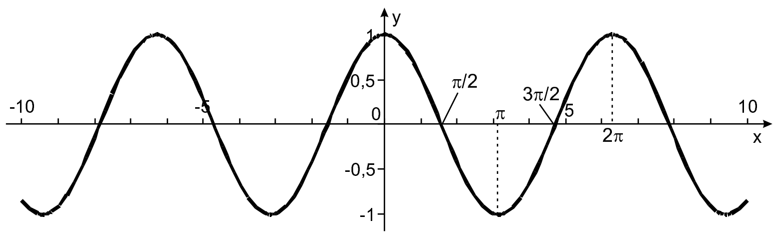
Nähdään siis, että kysytty yhtälö toteutuu pisteessä $x = -\pi/4$, sekä tämän jälkeen aina $\pi/2$:n välein. Näistä luvuista tutkittavalle välille osuvat $\pi/4 \approx 0{,}785$, $3\pi/4 \approx 2{,}36$ ja $5\pi/4 \approx 3{,}93$.

6.7. **Kosinifunktio.** Kosinifunktion määritelmä on hyvin samankaltainen kuin sinifunktion.

**Määritelmä 6.13.** Olkoon $x$ yksikköympyrään sijoitetun suunnatun kulman suuruus. Tällöin $\cos x$ on kulman loppukyljen ja ympyrän kehän leikkauspisteen x-koordinaatin arvo.




Myös kosinifunktio on määritelty kaikkialla $\mathbb{R}$:ssä ja se saa arvot väliltä $[-1, 1]$. Samaten kosinifunktio on jatkuva kaikkialla ja toistuu $2\pi$:n pituisella jaksolla. Itse asiassa kosinifunktion kuvaaja on kuin sinifunktion kuvaaja siirrettynä sen verran vasemmalle, että lähtöarvolla 0 funktio saa arvon 1. Tämä näkyy kaavassa $\cos x = \sin(x + \pi/2)$.




Kosinifunktion nollakohdat on helppo ilmaista samaan tapaan kuin sinifunktion, tällä kertaa nollakohtaa ei kuitenkaan löydy arvolta $x = 0$ vaan muun muassa kohdasta $x = \frac{\pi}{2}$. Nollakohdat ovat siis:

$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi,$$

missä $n$ on jälleen kerran mielivaltainen kokonaisluku.

6.8. **Peruskaavoja.** Sini- ja kosinifunktioiden jaksollisuudesta johtuen samat funktioiden arvot toistuvat tasavälein $(n \cdot 2\pi)$ määrittelyjoukkoa (lukusuoraa) pitkin liikuttaessa. Tämä voidaan ilmaista seuraavilla kaavoilla:

$$\sin x = \sin(x + n \cdot 2\pi),$$
$$\cos x = \cos(x + n \cdot 2\pi),$$

joissa $n$ on mielivaltainen kokonaisluku. Yksikköympyrää tutkimalla voidaan myös helposti johtaa seuraavat säännöt sini- ja kosinifunktioiden arvoille:

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin x,\\
\cos(-x) &= \cos x,\\
\sin x &= -\sin(x+\pi) = -\sin(x-\pi),\\
\cos x &= -\cos(x+\pi) = -\cos(x-\pi).
\end{aligned}$$

Aiemmin mainittiin jo, että kosinifunktio saa samat arvot kuin sinifunktio sai aiemmissa (tai myöhemmissä pisteissä):

$$\begin{aligned}
\sin x &= \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right),\\
\cos x &= \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Lisäksi suorakulmaista kolmiota koskeva, geometriasta tuttu Pythagoraan lause on yhtäpitävä seuraavan ns. *trigonometrian peruskaavan* kanssa:

(6.14) $$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

missä merkinnät $\sin^2 x$ ja $\cos^2 x$ tarkoittavat samaa kuin $(\sin x)^2$ ja $(\cos x)^2$. Ratkaisemalla tästä kaavasta $\sin x$ ja $\cos x$ saadaan sinin ja kosinin välille vielä seuraavat yhteydet:

$$\begin{aligned}
\sin x &= \pm\sqrt{1-\cos^2 x},\\
\cos x &= \pm\sqrt{1-\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

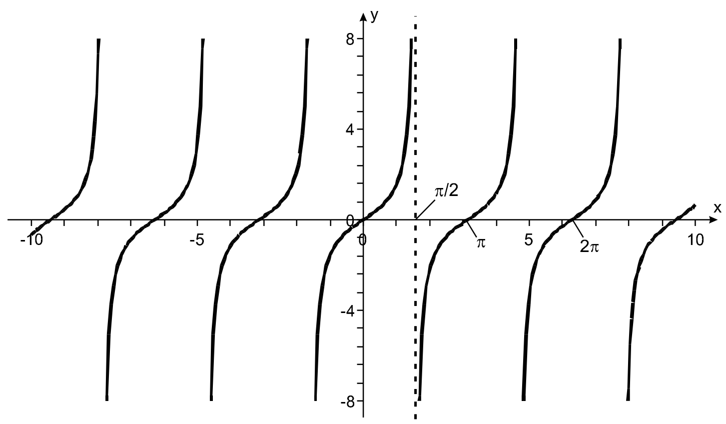
Näissä kaavoissa etumerkki täytyy valita sen mukaan, kumman etumerkin sini tai kosini saa annetulla kulman arvolla. Neliöjuurihan tuottaa kuitenkin aina positiivinen luvun.

6.9. **Tangenttifunktio.** Tangenttifunktio on kolmas tavallinen trigonometrinen funktio, jonka ominaisuudet kuitenkin poikkeavat melkoisesti sini- ja kosinifunktioiden ominaisuuksista. Se määritellään sinin ja kosinin osamääränä.

**Määritelmä 6.15.** Tangenttifunktion arvo kulmalla $x$ on sinin ja kosinin osamäärä:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Tangenttifunktion määrittelyjoukosta puuttuvat kaikki $\cos x$:n nollakohdat eli pisteet, jotka ovat muotoa $\pi/2 + n\pi$, missä $n$ voi olla mikä tahansa kokonaisluku. Tangenttifunktio on määrittelyjoukossaan jatkuva ja derivoituva ja saa arvoja koko reaalilukujen joukon alueelta. Tangenttifunktiokin on jaksollinen, jakson pituus on tällä kertaa $\pi$, ja nollakohdat ovat muotoa $x = 0 + n\cdot\pi$, missä $n$ on kokonaisluku.



Samoin kuin sini- ja kosinifunktioille, myös tangenttifunktiolle voidaan helposti johtaa seuraavat, toisinaan laskemista helpottavat peruskaavat:

$$\tan(-x) = -\tan x,$$
$$\tan x = \tan(x + n\pi),$$

missä $n$ on kokonaisluku.

6.10. **Trigonometristen funktioiden derivaatat.** Kun kulman yksikkönä käytetään radiaania, saavutetaan muun muassa se hyöty, että sini- ja kosinifunktiot ovat toistensa derivaattoja. Täytyy vain muistaa, että kosinifunktiota derivoitaessa on lisättävä miinusmerkki. Siis:

$$D\sin x = \cos x,$$
$$D\cos x = -\sin x.$$

**Esimerkki 6.16.** Derivoidaan tangenttifunktio $f(x) = \tan x$. Määritelmän mukaan

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Tangenttifunktio on derivoituva koko määrittelyjoukossaan, eli kun $\cos \neq 0$. Tällöin sen derivaatta saadaan osamäärän derivoimissäännöllä:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{D\sin x \cdot \cos x - \sin x \cdot D\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Trigonometrian peruskaavan mukaan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, joten

$$f'(x) = D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

**Esimerkki 6.17.** Tutkitaan, missä pisteissä funktio $f(x) = 2\sin x + x$ saa ääriarvoja avoimella välillä $]0, 10[$ . Tätä varten derivoidaan ensin kyseinen funktio:

$$f'(x) = 2\cos x + 1.$$

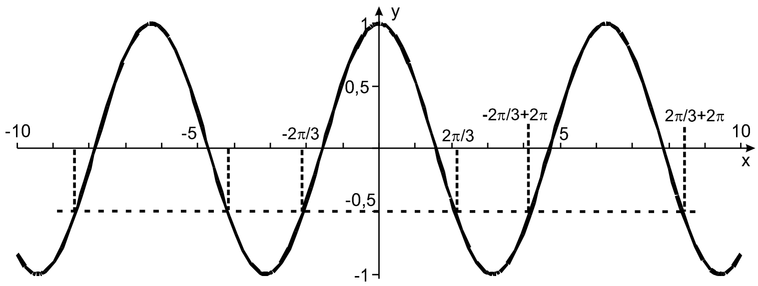
Ääriarvoja funktio voi saada vain derivaatan nollakohdissa. Ratkaistaan nämä:

$$2\cos x + 1 = 0 \iff \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Laskimella voidaan ratkaista, missä pisteissä kosini saa arvon $-1/2$. Vastaukseksi pitäisi tulla $120°$, joka on $2\pi/3$ radiaania (likiarvo 2,094). Tämän voi myös katsoa taulukosta. Nyt on kuitenkin muistettava kaksi seikkaa. Ensinnäkin kosini saa saman arvon aina $2\pi$:n välein. Toisekseen $\cos x = \cos(-x)$, joten myös $\cos(-2\pi/3) = -1/2$. Näin saadaan kahdenlaisia ratkaisuja:

$$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi,$$

missä $n$ voi olla mikä tahansa kokonaisluku.



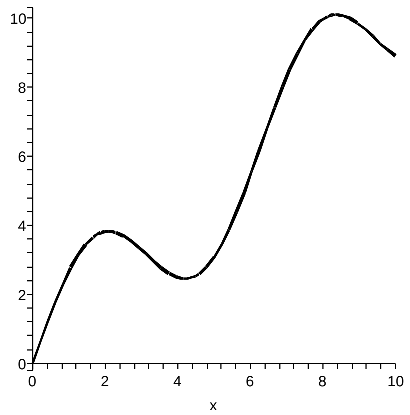
Saatuja nollakohtia tutkimalla nähdään, että niistä kysytylle välille osuvat vain

$$\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}094, \qquad \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3} \approx 8{,}378 \quad \text{ja} \quad -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3} \approx 4{,}188.$$

Laskemalla derivaatan arvoja näiden nollakohtien välissä (muista asettaa laskimeen kulmanyksiköksi radiaanit!) saadaan seuraavanlainen merkkikaavio:

| | $0 < x < 2\pi/3$ | $2\pi/3 < x < 4\pi/3$ | $4\pi/3 < x < 8\pi/3$ | $8\pi/3 < x < 10$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |

Nähdään siis, että funktiolla $f$ on lokaalit maksimit kohdissa $x = 2\pi/3$ ja $x = 8\pi/3$ sekä lokaali minimi kohdassa $x = 4\pi/3$.




Sinin ja kosinin derivointikaavoista saadaan jälleen vastaavat integroimiskaavat:

$$\int_a^b \sin x \, dx = \Big/_{a}^{b} -\cos x,$$

$$\int_a^b \cos x \, dx = \Big/_{a}^{b} \sin x.$$

**Esimerkki 6.18.** Lasketaan funktion $\sin x$ kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala välillä $[-\pi/2, \pi/2]$. Tämä voidaan tehdä integroimalla. Koska sinifunktio on välillä $[-\pi/2, 0[$ negatiivinen ja välillä $[0, \pi/2]$ positiivinen, täytyy nämä alueet kuitenkin käsitellä erikseen. Sinin integraalifunktion lauseke on $-\cos x$, joten

$$\int_{-\pi/2}^{0} \sin x \, dx = \Big/_{-\pi/2}^{0} -\cos x = -\cos 0 - \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -1 + 0 = -1.$$

Toisaalta

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin x \, dx = \Big/_{0}^{\pi/2} -\cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos 0)) = -0 + 1 = 1.$$

Ensimmäinen integraali oli negatiivinen, niin kuin pitikin. Alaksi saadaan siis yhteensä 1+1=2.

## 7. Differentiaaliyhtälöt

Useissa tilanteissa suureen arvo tietyllä hetkellä tai tietyssä kohdassa vaikuttaa sen arvoihin muualla. Suureen arvo voi esimerkiksi vaikuttaa sen muutosnopeuteen, ja sen mukana tulevaisuudessa saataviin arvoihin. Toisaalta suureen arvo voi vaikuttaa esimerkiksi muutoksen kiihtyvyyteen, ja sitä kautta muutosnopeuteen sekä suureen arvoon tulevaisuudessa. Kun tällaisia tilanteita kuvataan matemaattisesti, saadaan yhtälöitä, jotka kertovat, miten funktion arvot riippuvat derivaattojen arvoista. Tällaisia yhtälöitä kutsutaan *differentiaaliyhtälöiksi.*

Ajatellaan esimerkiksi uunissa lämmitettävää paistia. Kuvatkoon $T$ paistin lämpötilaa ajan funktiona. Mitä lämpimämmäksi paisti tulee uunissa, sitä enemmän se säteilee omaa lämpöään pois, jolloin lämpeneminen hidastuu. Hieman yksinkertaistaen voidaan sanoa, että paistin lämpenemisnopeus on suoraan verrannollinen uunin ja paistin lämpötilojen erotukseen. Siis: mitä lähempänä uunin lämpötilaa paistin lämpötila on, sitä hitaammin se lämpenee. Tällaista riippuvuutta kuvaa seuraava differentiaaliyhtälö:

$$T'(t) = k(200 - T(t)).$$

Koska paistin lämpötila on $T$, on derivaatta $T'$ lämpenemisnopeus. Vakio $k$ puolestaan on verrannollisuuskerroin, joka riippuu paistin ominaisuuksista. Tällaisessa yhtälössä tuntemattomana on paistin lämpötilaa kuvaava funktio $T$.

Differentiaaliyhtälöissä esiintyy aina (vähintään yksi) tuntematon funktio, joka pyritään ratkaisemaan. Koska ratkaistavana ei siis ole luku, vaan funktio, ei ratkaisussa yleensä pärjätä pelkästään tavallisten yhtälöiden käsittelyssä opituilla menetelmillä. Lisäksi differentiaaliyhtälön ratkaisu ei ole yleensä yksikäsitteinen, vaan moni funktio voi toteuttaa saman yhtälön. Tällöin tarvitaan jotain lisätietoa, jotta funktio voitaisiin ratkaista yksikäsitteisesti. Voitaisiin esimerkiksi tietää, että ennen uuniin laittamista paisti oli huoneenlämpöinen, eli $T(0) = 21$ °C. Tämä lisätieto auttaa ratkaisemaan paistin lämpötilaa kuvaavan funktion yksikäsitteisesti, mikäli verrannollisuuskerroin $k$ tunnetaan.

Differentiaaliyhtälöiden yhteydessä käytetään usein tiettyjä vakiintuneita merkintöjä. Tuntematonta funktiota merkitään yleensä $y$ ja sen derivaattaa $y'$. Lisäksi yhtälössä voi esiintyä derivaatan derivaattoja $y''$, $y'''$ jne. Funktion muuttujana voi olla $x$, mutta hyvin usein myös $t$, varsinkin jos funktio kuvaa jotain ajasta riippuvaa suuretta. Tällöin voi olla jopa niin, että funktiota merkitään $x$:llä, esimerkiksi $x(t) = t^2$. Yhtälöissä jätetään lisäksi yleensä merkitsemättä funktion muuttuja, ei siis merkitä (oikeaoppisesti) $y(x)$ vaan yksinkertaisesti $y$.

**Määritelmä 7.1.** Yhtälöä, jossa esiintyy vähintään yksi tuntemattoman funktion $y$ derivaatta tai korkeampi derivaatta, kutsutaan *differentiaaliyhtälöksi* (DY). Differentiaaliyhtälön ratkaisu on mikä tahansa funktio, joka $y$:n paikalle sijoitettuna toteuttaa yhtälön. Yhtälön *kertaluku eli aste* on korkeimman siinä esiintyvän derivaatan kertaluku.

**Esimerkki 7.2.** Differentiaaliyhtälöitä:

$$\begin{aligned} &y' = 0 && \text{(1. aste)},\\ &y'' + 2xy = \sqrt{x} && \text{(2. aste)},\\ &y''y = \frac{x}{\sqrt{y'''}} && \text{(3. aste)}. \end{aligned}$$

**Esimerkki 7.3.** Tarkastellaan yhtälöä

$$y'' - 2y' + y = x.$$

Tämä on toisen asteen differentiaaliyhtälö. Yhtälön eräs ratkaisu on $y(x) = e^x + x + 2$, sillä sen derivaatat ovat

$$y'(x) = e^x + 1 \quad \text{ja} \quad y''(x) = e^x.$$

Kun nämä sijoitetaan yhtälöön, nähdään että

$$y'' - 2y' + y = e^x - 2(e^x + 1) + (e^x + x + 2) = x,$$

eli $y$ toteuttaa yhtälön.

**Esimerkki 7.4.** Tarkastellaan toisen kertaluvun yhtälöä

$$y''y' = x.$$

Yhtälön eräs ratkaisu on $y(x) = \frac{1}{2}x^2$, sillä tämän derivaatat ovat

$$y'(x) = x \quad \text{ja} \quad y''(x) = 1.$$

Kun nämä sijoitetaan yhtälöön, nähdään että yhtälö toteutuu:

$$y''y' = 1 \cdot x = x.$$

Koska differentiaaliyhtälöissä esiintyy derivaattoja, täytyy niitä ratkaistaessa yleensä etsiä funktioiden integraalifunktioita. Tämän vuoksi differentiaaliyhtälön ratkaisemista kutsutaan joskus yhtälön *integroimiseksi.* Integraalifunktioita etsittäessä on muistettava, että tietyn funktion integraalifunktio ei ole koskaan yksikäsitteinen. Eri integraalifunktiot voivat poiketa toisistaan integroimisvakiolla, joka on otettava huomioon.

**Esimerkki 7.5.** Yksinkertainen esimerkki differentiaaliyhtälöstä on

$$y' = 2x.$$

Tämä yhtälö sanoo yksinkertaisesti, että tuntematon funktio $y$ on sellainen, jonka derivaatan lauseke on $2x$. (Huomaa, että itse $y$ ei välttämättä esiinny yhtälössä.) Yhtälö voidaan ratkaista etsimällä funktion $2x$ integraalifunktio. Eräs ratkaisu onkin $y(x) = x^2$. Lisäksi integraalilaskennan peruslauseen mukaan kaikki ratkaisut saadaan tästä lisäämällä jokin vakio. Yleinen ratkaisu voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$y(x) = \int 2x\,dx = x^2 + C.$$

Differentiaaliyhtälöiden yhteydessä käytetään usein integraalimerkintää ilman integrointiväliä. Tämä tarkoittaa integraalifunktiota. Luku $C$ on integroimisvakio. Jokaisella eri $C$:n arvolla saadaan yhtälölle eri ratkaisu, joten tämä on muistettava ottaa huomioon.

Usein systeemiä kuvaavasta funktiosta tiedetään sen toteuttaman differentiaaliyhtälön lisäksi joitakin yksittäisiä arvoja. Näitä kutsutaan *alkuarvoiksi* tai *reuna-arvoiksi* ja ne auttavat funktion määrittämisessä.

**Määritelmä 7.6.** Ongelmaa, jossa yritetään ratkaista tuntematon funktio, kutsutaan *alkuarvotehtäväksi* (AAT), jos tiedetään

1) jokin $y$:n toteuttama differentiaaliyhtälö, sekä
2) $y$:n sekä sen derivaattojen arvot jossain (samassa) pisteessä $(n-1)$:nteen derivaattaan asti, missä $n$ on yhtälön kertaluku.

**Esimerkki 7.7.** Tavallinen eksponenttifunktio on ainoa funktio, jonka derivaatta on funktio itse, ja jonka arvo nollassa on 1. Tämä otetaankin usein eksponenttifunktion määritelmäksi, ja se on samalla esimerkki alkuarvotehtävästä:

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Alkuarvotehtävän ratkaisu on siis $y(x) = e^x$. Huomaa kuitenkin, että tehtävässä esiintyvän differentiaaliyhtälön toteuttaa mikä tahansa muotoa $y(x) = Ce^x$, oleva funktio, kun $C$ on vakiokerroin. (Tämä johtuu siitä, että vakiokerroin ei kuitenkaan muutu derivoitaessa.) Sen sijaan näistä funktioista ainoa, joka toteuttaa alkuarvoehdon $y(0) = 1$, on se jossa $C = 1$, sillä

$$y(0) = 1 \iff Ce^0 = 1 \iff C \cdot 1 = 1 \iff C = 1.$$

**Esimerkki 7.8.** Kappale liikkuu x-akselilla. Kuvatkoon $x : [0, \infty[ \to \mathbb{R}$ kappaleen sijaintia ajan $t$ funktiona. Tällöin kappaleen nopeus ajanhetkellä $t$ on sijainnin muutosnopeus, eli $x'(t)$. Kappaleen kiihtyvyys on puolestaan $x''(t)$.

Oletetaan, että kappaleen kiihtyvyys on koko ajan 1, jolloin saadaan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$x''(t) = 1.$$

Tämä DY on helppo ratkaista vaiheittain. Koska $x''$ on $x'$:n derivaatta, on $x'$ puolestaan $x''$:n integraalifunktio, eli

$$x'(t) = \int x''(t)\,dt = \int 1\,dt = t + V.$$

Tässä $V$ on integroimisvakio. Samalla tavoin $x$ on $x'$:n integraalifunktio, joten

$$x(t) = \int x'(t)\,dt = \int t + V\,dt = \frac{1}{2}t^2 + Vt + S,$$

missä $S$ on toinen integroimisvakio. Ollaan siis saatu ratkaistuksi funktio $x$, ja itse asiassa mikään muunlainen funktio ei toteuta yhtälöä. Funktiossa on kuitenkin vielä kaksi tuntematonta vakiota $V$ ja $S$.

Oletetaan nyt lisäksi, että kappale lähti pisteestä 2 nopeudella 3 oikealle päin, eli

$$x(0) = 2 \quad \text{ja} \quad x'(0) = 3.$$

Koska nyt tunnetaan ratkaistavan funktion ja sen derivaatan arvo ajanhetkellä 0, ratkaistavana on alkuarvotehtävä. Sijoittamalla ensimmäinen alkuarvoehto jo ratkaistun funktion lausekkeeseen saadaan

$$x(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + V \cdot 0 + S = 2,$$

josta nähdään, että $S = 2$. Sijoittamalla toinen alkuarvoehto ratkaistun funktion derivaatan lausekkeeseen saadaan

$$x'(0) = 0 + V = 3,$$

joten $V = 3$. Alkuarvotehtävän yksikäsitteinen ratkaisu on siis

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 2.$$

**Esimerkki 7.9.** Aina alkuarvoehtokaan ei riitä yhtälön yksikäsitteiseen ratkaisemiseen. Tarkastellaan vaikkapa alkuarvotehtävää

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

Heti nähdään, että vakiofunktio $y_1(x) = 0$ toteuttaa yhtälön ja alkuarvoehdon, joten se on eräs ratkaisu. Toisaalta myös $y_2(x) = \frac{1}{4}x^2$ on ratkaisu. Tämän derivaatta on nimittäin $y_2'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot x = \frac{1}{2}x$, ja toisaalta

$$\sqrt{y_2} = \sqrt{\frac{1}{4}x^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{x^2} = \frac{1}{2}x,$$

joten $y_2' = \sqrt{y_2}$. Lisäksi $y_2$ toteuttaa myös alkuarvoehdon.

7.1. **Separoituvat differentiaaliyhtälöt.** Separoituvia differentiaaliyhtälöitä esiintyy käytännön tilanteissa melko usein, ja niiden ratkaisumenetelmä on yksinkertainen. Separoituvassa differentiaaliyhtälössä muuttujan arvo ja funktion arvo saadaan yhtäsuuruusmerkin eri puolille.

**Määritelmä 7.10.** Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä kutsutaan *separoituvaksi*, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$g(y)y' = h(x),$$

missä $g(y)$ on lauseke, jossa ei esiinny ollenkaan muuttujaa $x$ (paitsi funktion $y$ muuttujana) ja $h(x)$ on lauseke, jossa ei esiinny lainkaan tuntematonta funktiota $y$.

**Esimerkki 7.11.**

a) Yhtälö

$$2yy' = x^2$$

on separoituva. Tässä $g(y) = 2y$ ja $h(x) = x^2$.

b) Myös yhtälö

$$y' = (x+2)y^2$$

on separoituva, jos $y \neq 0$, sillä se voidaan tällöin jakaa puolittain $y^2$:lla, jolloin saadaan

$$\frac{y'}{y^2} = x + 2.$$

Tässä $g(y) = 1/y^2$ ja $h(x) = x + 2$.

c) Yhtälö

$$y' + 2y = x$$

ei ole separoituva, sillä se ei ole muotoa $g(y)y' = h(x)$, eikä sitä voi myöskään muuttaa tähän muotoon.

Separoituvan differentiaaliyhtälön ratkaiseminen perustuu yhdistetyn funktion integrointisääntöön. Tarkoituksena on muuntaa yhtälöä niin, että $y$:n derivaatta häviää.

Kun muistetaan, että $y$ on itse asiassa $x$:n funktio, niin huomataan, että yhtälön vasemmalla puolella oleva $g(y) = g(y(x))$ on yhdistetyn funktion lauseke. Merkitään $G$:llä jotain funktion $g$ integraalifunktiota. Tällöin $G' = g$, joten separoituva yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$G'(y(x))y'(x) = h(x).$$

Tässä on merkitty nyt funktion $y$ muuttuja $x$ näkyviin, jotta yhdistetyn funktion lauseke olisi helpompi hahmottaa. Yhdistetyn funktion derivoimissäännön mukaan vasen puoli on

$$G'(y(x))y'(x) = D\ G(y(x)),$$

joten

$$D\ G(y(x)) = h(x).$$

Siispä $h$ on funktion $G \circ y$ derivaatta, joten $G \circ y$ on $h$:n integraalifunktio. Merkitään jotain $h$:n integraalifunktiota $H$. Koska integraalilaskennan peruslauseen mukaan saman funktion integraalifunktio voivat poiketa toisistaan vain vakiolla, voidaan lopulta kirjoittaa $G(y(x)) = H(x) + C$, eli

$$G(y) = H(x) + C.$$

Tämä on nyt tavallinen yhtälö, koska siinä ei enää esiinny $y$:n derivaattoja. Tästä ratkaistaan yleensä vielä $y$, mutta se ei ole aina välttämättä mahdollista.

**Esimerkki 7.12.** Ratkaistaan yhtälö

$$2yy' = x^2.$$

Tässä $g(y) = 2y$ ja $h(x) = x^2$. Funktio $g$ on siis ikään kuin *muuttujan $y$ funktio*, ja sen eräs integraalifunktio on $G(y) = y^2$. Funktion $h$ integraalifunktioksi voidaan valita esimerkiksi

$H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$. Edellä esitetyn ratkaisumenetelmän mukaan $G(y) = H(x) + C$, missä $C$ on jokin vakio, joten

$$y^2 = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Tästä voidaan vielä ratkaista $y$ ottamalla molemmilta puolilta neliöjuuri. Täytyy kuitenkin muistaa erikseen merkitä positiiviset ja negatiiviset ratkaisut.

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x^3 + C}.$$

Usein yhtälön muuttaminen separoituvaan muotoon vaatii lisäoletuksia, joiden avulla voi löytyä lisäratkaisuja. Tällaisia ratkaisuja, jotka löytyvät ennen kuin yhtälö on separoituvassa muodossa, kutsutaan *erillisratkaisuiksi.*

**Esimerkki 7.13.** Ratkaistaan yhtälö

$$y' = y^2.$$

Yhtälö ei ole separoituvassa muodossa, mutta se voidaan helposti muuttaa sellaiseen jakamalla termillä $y^2$. Tämä on kuitenkin kiellettyä, jos $y = 0$. Toisaalta funktio $y(x) = 0$ toteuttaa kyseisen yhtälön. Se on siis erillisratkaisu.

Erillisratkaisun löydyttyä voidaan oletettaa, että $y \neq 0$. Jaetaan yhtälö puolittain $y^2$:lla:

$$y^{-2}y' = 1.$$

Nyt $g(y) = y^{-2}$, ja tämän eräs integraalifunktio on $G(y) = -y^{-1}$. Toisaalta funktion $h(x) = 1$ eräs integraalifunktio on $H(x) = x$. Saadaan siis

$$-y^{-1} = x + C,$$

josta ratkeaa helposti

$$y(x) = -\frac{1}{x + C}.$$

Tämä separoimalla saatu ratkaisu ei saa koskaan arvoa 0, niin kuin oletettiinkin. Yhtälön ratkaisuja ovat siis erillisratkaisun lisäksi kaikki separoimalla saadut ratkaisut, jotka riippuvat vakiosta $C$:

$$y(x) = 0 \quad \text{tai} \quad y(x) = -\frac{1}{x + C}.$$

Jos tehtävässä olisi vielä alkuarvoehto, sen avulla voitaisiin valita oikea ratkaisu. Jos esimerkiksi $y(1) = 0$, niin tiedetään, että erillisratkaisu $y(x) = 0$ on oikea, koska separoimalla saatu ratkaisu ei voi koskaan saada arvoa 0.

Separoituvan yhtälön ratkaisussa voi käyttää eräitä muistamista helpottavia merkintöjä. Jos nimittäin $g(y)y' = h(x)$, saadaan puolittain integroimalla

$$\int g(y)y'\,dx = \int h(x)\,dx + C.$$

Tässä siis merkitään integraali ilman integroimisväliä, mikä tarkoittaa integraalifunktiota. Integroimisvakio tarvitaan, koska integraalifunktio ei ole yksikäsitteinen. Jos nyt merkitään $y'\,dx = dy$, niin yhtälö tulee muotoon

$$\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx + C.$$

Vasemmalla puolella on siis integraali $y$:n suhteen. Merkintää $y'\,dx$ käytetään vain muistamisen helpottamiseksi, ja ainoa perustelu, joka sille voidaan antaa, on, että se toimii integroitaessa. Jos tätä merkintää käyttää, kannattaa kirjoittaa koko ajan $y(x)$:n sijasta $y$.

**Esimerkki 7.14.** Ratkaistaan separoituva yhtälö $y'(x)\sin y(x) = 2x$. Kirjoitetaan yhtälö ensin muodossa $\sin y \cdot y' = 2x$. Integroidaan tämä sitten puolittain $x$:n suhteen ja merkitään $y'\,dx = dy$:

$$\begin{aligned} &\int \sin y \cdot y'\,dx = \int 2x\,dx + C \\ \iff &\int \sin y\,dy = \int 2x\,dx + C \\ \iff &-\cos y = x^2 + C \\ \iff &\cos y = -x^2 - C. \end{aligned}$$

Näin saadaan kätevästi $y'$ häviämään. Koska $y$:n ratkaiseminen viimeksi saadusta yhtälöstä olisi liian vaikeaa, jätetään ratkaisu tähän muotoon.

7.2. **Eksponentiaalinen kasvu.** Separoimismenetelmällä voidaan ratkaista *eksponentiaalisen kasvun malliin* liittyvät yhtälöt. Jos suureen muutosnopeus tietyllä hetkellä on suoraan verrannollinen sen arvoon, eli $y'(t) = k \cdot y(t)$, on kyseessä eksponentiaalinen kasvu. Suureen arvo siis kasvaa sitä nopeammin, mitä suurempi se on, tai vaihtoehtoisesti hitaammin, mikäli verrannollisuuskerroin $k$ on negatiivinen. Tällaisessa tapauksessa ratkaisussa on aina eksponenttifunktio.

**Esimerkki 7.15.** Radioaktiivisen hajoamisen nopeus on suoraan verrannollinen hajoavan aineen määrään. Oletetaan, että hajoavaa ainetta on alussa 100 kg, ja vuoden päästä enää 50 kg. Muodostetaan ensin hajoamista kuvaava alkuarvotehtävä:

$$m(t)' = km(t), \quad m(0) = 100 \text{ (kg)}.$$

Tässä on huomattava, että hajoamisnopeus tai aineen määrä *eivät* ole suoraan verrannollisia *aikaan*, joten ei voida kirjoittaa $m'(t) = kt$ tai $m(t) = kt$.

Saatu yhtälö on separoituva, jos $m \neq 0$. Erillisratkaisu $m(t) = 0$ ei toteuta alkuarvoehtoa, joten se hylätään. Voidaan siis olettaa, että $m \neq 0$, jolloin saadaan

$$\frac{m'}{m} = k.$$

Vasemmalla puolella $g(m) = 1/m$. Koska $m$ on aina positiivinen (aineen määrä), integraalifunktioksi tulee $G(m) = \ln m$. Oikean puolen integraalifunktio on $H(t) = kt$. Siispä

$$\ln m(t) = kt + C.$$

Koska logaritmi $m$:stä kertoo, mihin potenssiin kantaluku pitäisi korottaa, jotta saataisiin $kt + C$, nähdään että

$$m(t) = e^{kt+C} = e^C e^{kt}.$$

On tapana merkitä $e^C = m_0$. Alkuarvoehdon mukaan

$$m(0) = m_0 e^0 = m_0 \cdot 1 = 100,$$

joten $m_0 = 100$. Alkuarvotehtävän ratkaisu on siis

$$m(t) = 100e^{kt}.$$

Verrannollisuuskerroin $k$ on vielä tuntematon. Tämä saadaan ratkaistuksi annetun lisätiedon avulla. Sen mukaan vuoden kuluttua ainetta on jäljellä 50 kg, joten

$$m(1) = 100e^{k\cdot 1} = 100e^k = 50,$$

josta

$$e^k = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \iff k = \ln\frac{1}{2} \approx -0{,}693.$$

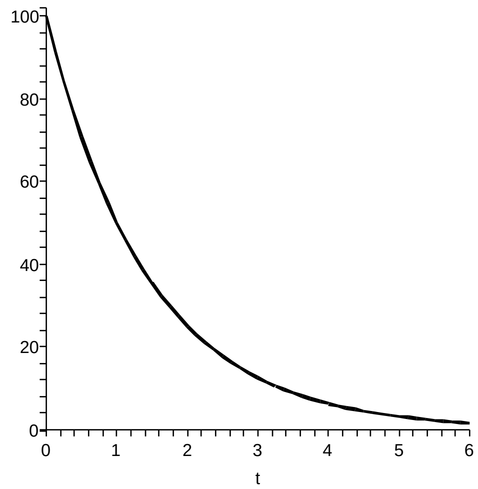
Aineen määrää kuvaava funktio on siis

$$m(t) = 100e^{-0{,}69t}.$$

Koska $\ln(0{,}5) \approx -0{,}69$, voidaan kantalukua vaihtamalla kirjoittaa myös

$$m(t) = 100e^{\ln 0{,}5 \cdot t} = 100 \cdot 0{,}5^t.$$

Tämä muoto on joskus kätevämpi sovelluksissa.




**Esimerkki 7.16.** Ratkaistaan osion alussa esiintynyt paistin paistamiseen liittyvä alkuarvotehtävä. Paistin lämpenemisnopeus on suoraan verrannollinen uunin ja paistin lämpötilojen erotukseen. Lisäksi alussa paisti oli huoneenlämpöinen. Näin saadaan seuraavanlainen alkuarvotehtävä:

$$T' = k(200 - T), \quad T(0) = 21.$$

Nyt voitaisiin ajatella, että tuntematon suure ei olisikaan paistin lämpötila $T$, vaan paistin ja uunin lämpötilojen erotus $E = 200 - T$. Tällöin $E' = 0 - T' = -T'$, joten uudeksi yhtälöksi saataisiin $-E' = kE$ tai yhtäpitävästi $E' = -kE$. Tämä osoittaa, että kyse on eksponentiaalisesta kasvusta. Ratkaistaan tehtävä tällä kertaa kuitenkin alkuperäistä yhtälöä käyttämällä.

Muutetaan aluksi yhtälö separoituvaan muotoon jakamalla se puolittain termillä $200-T$. Tällöin saataisiin erillisratkaisu $T(t) = 200$, mutta koska alkuhetkellä $T = 21$, ei tämä tule kyseeseen. Näin saadaan

$$\frac{T'}{200 - T} = k.$$

Integroidaan nyt yhtälö puolittain $t$:n suhteen:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{T'}{200 - T}\, dt = \int k\, dt + C \\
\iff &\int \frac{1}{200 - T} \cdot T'\, dt = \int k\, dt + C \\
\iff &\int \frac{1}{200 - T}\, dT = \int k\, dt + C.
\end{aligned}$$

Vasemmalla puolella on nyt käytettävä yhdistetyn funktion sääntöä, koska integroitavana on $(200 - T)^{-1}$. Sisäfunktion $g(T) = 200 - T$ derivaatta on $g'(T) = -1$, ja ulkofunktion $f(x) = x^{-1}$ integraalifunktio on $F(x) = \ln|x|$. Tehtävässä paisti on koko ajan uunia kylmempi, eli $200 - T > 0$, joten itseisarvomerkit voi jättää pois. Näin saadaan

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{200-T}\,dT = \int k\,dt + C \\
\iff\ & -\int \frac{1}{200-T}\cdot(-1)\,dT = \int k\,dt + C \\
\iff\ & -\ln(200-T) = kt + C \\
\iff\ & \ln(200-T) = -kt + C \\
\iff\ & 200 - T = e^{-kt+C} \\
\iff\ & T = 200 - e^{-kt+C} = 200 - e^{C}e^{-kt}.
\end{aligned}
$$

Merkitään nyt $e^C = E_0$, jolloin

$$T(t) = 200 - E_0 e^{-kt}.$$

Alkuarvoehdon mukaan

$$T(0) = 200 - E_0 e^0 = 200 - E_0 \cdot 1 = 21,$$

josta

$$E_0 = 200 - 21 = 179.$$

(Vakio $E_0$ vastaa siis nyt uunin ja paistin lämpötilojen erotusta alkuhetkellä.) Alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$T(t) = 200 - 179e^{-kt}.$$

Verrannollisuuskerroin $k$ voitaisiin ratkaista jostain lisätiedosta. Tämä voisi olla esimerkiksi paistin lämpötila tunnin kuluttua paistamisen alusta.

Kerrataan vielä separoituvan yhtälön ratkaisumenetelmän vaiheet.

1) Muutetaan yhtälö separoituvaan muotoon $g(y)y' = h(x)$. Tässä vaiheessa saattaa löytyä erillisratkaisuja.
2) Etsitään vasemman puolen ulkofunktiolle $g$ integraalifunktio $G$.
3) Etsitään funktion $h$ integraalifunktio $H$.
4) Ratkaisu, josta $y'$ on hävinnyt, on $G(y) = H(x) + C$.
5) Lopuksi ratkaistaan $y$, jos osataan.

## 8. Lineaariset yhtälöryhmät ja matriisit

Kurssin loppuosassa tutustutaan lineaarisiin yhtälöryhmiin sekä niiden ratkaisemiseen matriisien avulla.

### 8.1. Lineaariset yhtälöryhmät ja niiden ratkaiseminen.

**Määritelmä 8.1.** Yhtälöä

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

missä $a_1, \ldots, a_n$ sekä $b$ ovat vakioita ja $x_1, \ldots, x_n$ ovat tuntemattomia, kutsutaan *$n$:n muuttujan lineaariseksi yhtälöksi*. Jos liitetään yhteen $m$ kappaletta lineaarisia yhtälöitä, joissa on samat tuntemattomat, saadaan *lineaarinen yhtälöryhmä*:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{cases}.
$$

Lukuja $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ nimitetään yhtälöryhmän *kertoimiksi.* Jos tuntemattomia on vähän, niitä merkitään yleensä $x, y, z, \ldots$. Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen merkitsee sitä, että löydetään $n$ kappaletta lukuja, jotka tuntemattomien $x_1, \ldots, x_n$ paikalle sijoitettuina toteuttavat kaikki $m$ yhtälöä.

**Esimerkki 8.2.** Lineaarisia yhtälöryhmiä:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x-y+z &= -2 \\ -3x+2y-z &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 & & +4x_3 &= 1 \\ -3x_1 & +2x_2 & -x_3 &= 0 \\ & x_2 & +x_3 &= 12 \end{cases}.$$

Ensimmäisen yhtälöryhmän ratkaisu on $x = 3/2$, $y = -1/2$. Toisella yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua, kuten myöhemmin nähdään.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemisessa pyritään löytämään luvut, jotka muuttujien paikalle sijoitettuina toteuttavat *kaikki* ryhmän yhtälöt. On helppo nähdä, että tämä ei aina onnistu, eli yhtälöryhmällä ei aina ole ratkaisua. Esimerkiksi yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x+y &= 1 \\ x+y &= 0 \end{cases}$$

sisältää kaksi keskenään ristiriitaista yhtälöä, eivätkä mitkään luvut $x$ ja $y$ voi toteuttaa molempia yhtälöitä yhtä aikaa. Toisaalta joskus ratkaisuja on ääretön määrä, kuten seuraavalla yhtälöryhmällä:

$$\begin{cases} x-y &= 0 \\ 2x-2y &= 0 \end{cases}.$$

Tämän yhtälöryhmän molemmat yhtälöt sisältävät saman tiedon, eli että $x = y$. Mikä tahansa luku sijoitettuna sekä $x$:n että $y$:n paikalle toteuttaa molemmat yhtälöt.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseksi on olemassa monta menetelmää. Pienillä yhtälöryhmillä (2-3 yhtälöä) voidaan käyttää sijoitusmenetelmää, jossa yhdestä yhtälöstä ratkaistaan aina yksi tuntematon, joka sitten sijoitetaan muihin yhtälöihin. Yhtälöjen lukumäärän kasvaessa tämä menetelmä kuitenkin käy epäkäytännölliseksi.

Tällä kurssilla opitaan ehkä kaikkein käytetyin ratkaisumenetelmä, ns. *Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmä.* Siinä muokataan yhtälöryhmää yksinkertaisemmaksi sellaisilla tavoilla, jotka eivät muuta yhtälöryhmän ratkaisuja. Yhtälöt käydään läpi ylhäältä alkaen, ja jokaisen yhtälön kohdalla toistetaan kaksi päävaihetta. Nämä ovat:

1) Jaetaan yhtälö puolittain, jotta yhtälön vasemmanpuolimmaisen tuntemattoman kertoimeksi saadaan 1.
2) Eliminoidaan tämän tuntemattoman avulla vastaavat tuntemattomat kaikista muista yhtälöistä.

Eliminointi tapahtuu seuraavasti. Oletetaan, että ollaan käsittelemässä 1. yhtälöä ja halutaan eliminoida ensimmäinen tuntematon 2. yhtälöstä. Kerrotaan 1. yhtälö puolittain 2. yhtälön ensimmäisen tuntemattoman kertoimen vastaluvulla. Lisätään sitten ensimmäinen yhtälö toiseen, jolloin tuo tuntematon häviää. Käydään tätä menetelmää läpi esimerkkien avulla.

**Esimerkki 8.3.** Olkoon ratkaistavana seuraava yhtälöpari:

$$\begin{cases} 2x+4y &= 2 \\ x+3y &= -1 \end{cases}.$$

Aloitetaan käsittely ensimmäisestä yhtälöstä. Jaetaan yhtälö puolittain luvulla 2, jolloin ensimmäiseksi kertoimeksi tulee 1:

$$\begin{cases} x+2y &= 1 \\ x+3y &= -1 \end{cases}.$$

Toisen yhtälön ensimmäinen kerroin on 1. Jotta tämä saataisiin häviämään, kerrotaan ensimmäinen yhtälö puolittain luvulla $-1$, ja lisätään näin saatu yhtälö toiseen. Ensimmäinen yhtälö $-1$:llä kerrottuna on

$$-x - 2y = -1.$$

Kun tämä lisätään puolittain toiseen yhtälöön, saadaan

$$\begin{array}{rcrl} -x-2y & = & -1 & \mid (-1)\times \text{ 1. yhtälö} \\ x+3y & = & -1 & \mid \text{2. yhtälö} \\ \hline 0+y & = & -2 & \end{array}.$$

Saatu yhtälö kirjoitetaan toisen yhtälön paikalle, jolloin yhtälöryhmästä tulee

$$\begin{cases} x & +2y & = & 1 \\ & y & = & -2 \end{cases}.$$

Toisesta yhtälöstä hävisi näin $x$.

Käsitellään vielä toinen yhtälö. Toisen yhtälön ensimmäinen kerroin on nyt $y$:n kerroin ja se on sattumalta jo valmiiksi 1. Ensimmäisessä yhtälössä $y$:n kerroin on 2. Kerrotaan jälkimmäinen yhtälö siis puolittain $-2$:lla ja lisätään ensimmäiseen:

$$\begin{array}{rrcrl} & -2y & = & 4 & \mid (-2)\times \text{ 2. yhtälö} \\ x & +2y & = & 1 & \mid \text{1. yhtälö} \\ \hline x & & = & 5 & \end{array}.$$

Tulos sijoitetaan ensimmäisen yhtälön paikalle, jolloin siitä häviää $y$:

$$\begin{cases} x & & = & 5 \\ & y & = & -2 \end{cases}.$$

Nyt yhtälöryhmä on täysin ratkaistussa muodossa, josta voidaan suoraan lukea tuntemattomien arvot. Tarkistetaan vielä tämä vastaus sijoittamalla saadut arvot alkuperäisiin yhtälöihin:

$$\begin{cases} 2\cdot 5 + 4\cdot(-2) & = & 10-8 & = & 2 \\ 5+3\cdot(-2) & = & 5-6 & = & -1 \end{cases}.$$

Tulos on oikea.

**Esimerkki 8.4.** Ratkaistaan seuraava kolmen yhtälön yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = & 12 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 14 \end{cases}.$$

Aloitetaan käsittely ensimmäisestä yhtälöstä. Jaetaan yhtälö 2:lla, jolloin saadaan ensimmäiseksi kertoimeksi 1:

$$\begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = & 12 & \mid :2 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -2 & \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 14 & \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 14 \end{cases}.$$

Ensimmäisen muuttujan kerroin on toisessa yhtälössä 3 ja kolmannessa 2. Lisätään siis ensimmäinen yhtälö toiseen $-3$:lla kerrottuna ja kolmanteen $-2$:lla kerrottuna:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 6 & \mid \cdot(-3) & \mid \cdot(-2) \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -2 & \mid \leftarrow & \mid \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 14 & & \mid \leftarrow \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 6 \\ & -5x_2 & -10x_3 & = & -20 \\ & -7x_2 & -4x_3 & = & 2 \end{cases}.$$

Nyt on eliminoitu ensimmäinen tuntematon toisesta ja kolmannesta yhtälöstä. Siirrytään toiseen yhtälöön. Toisen yhtälön ensimmäinen kerroin on $-5$. Jaetaan yhtälö tällä puolittain:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 6 \\ & -5x_2 & -10x_3 & = & -20 \quad | : (-5) \\ & -7x_2 & -4x_3 & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 6 \\ & x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ & -7x_2 & -4x_3 & = & 2 \end{array}\right. .$$

Toisen muuttujan kerroin on ensimmäisessä yhtälössä 2 ja kolmannessa $-7$. Lisätään siis toinen yhtälö ensimmäiseen $-2$:lla kerrottuna ja kolmanteen 7:llä kerrottuna:

$$\left\{\begin{array}{rrrrlll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 6 & | \leftarrow & \\ & x_2 & +2x_3 & = & 4 & | \cdot (-2) & | \cdot 7 \\ & -7x_2 & -4x_3 & = & 2 & & | \leftarrow \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrr} x_1 & & -x_3 & = & -2 \\ & x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ & & 10x_3 & = & 30 \end{array}\right. .$$

Jaetaan vielä viimeinen yhtälö puolittain luvulla 10:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & & -x_3 & = & -2 \\ & x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ & & 10x_3 & = & 30 \quad | : 10 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrr} x_1 & & -x_3 & = & -2 \\ & x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ & & x_3 & = & 3 \end{array}\right. ,$$

ja lisätään se ensimmäiseen 1:llä kerrottuna sekä toiseen $-2$:lla kerrottuna:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrll} x_1 & & -x_3 & = & -2 & | \leftarrow & \\ & x_2 & +2x_3 & = & 4 & | & | \leftarrow \\ & & x_3 & = & 3 & | \cdot 1 & | \cdot (-2) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrr} x_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & = & -2 \\ & & x_3 & = & 3 \end{array}\right. .$$

Näin on yhtälöryhmä täydellisesti ratkaistu.

Toisinaan jotain tuntematonta eliminoitaessa eliminoituu kaksi tuntematonta samalla kertaa. Tällöin voidaan vaihtaa yhtälöiden järjestystä, jotta eliminointia voidaan jatkaa.

**Esimerkki 8.5.** Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & +6x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 3 \end{array}\right. .$$

Ensimmäisen yhtälön ensimmäinen kerroin on jo 1, joten voidaan ruveta suoraan eliminoimaan:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrll} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 & | \cdot (-2) & | \cdot (-1) \\ 2x_1 & +6x_2 & -x_3 & = & 0 & | \leftarrow & | \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 3 & & | \leftarrow \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrr} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 \\ & & x_3 & = & -14 \\ & -4x_2 & & = & -4 \end{array}\right. .$$

Koska toisesta yhtälöstä hävisi myös toinen tuntematon, vaihdetaan toinen ja kolmas yhtälö keskenään, jolloin saadaan

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 \\ & -4x_2 & & = & -4 \\ & & x_3 & = & -14 \end{array}\right. .$$

Nyt voidaan jatkaa normaalisti. Jaetaan toinen yhtälö puolittain $-4$:llä:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 \\ & -4x_2 & & = & -4 \quad | : (-4) \\ & & x_3 & = & -14 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrr} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & -14 \end{array}\right. .$$

Eliminoidaan toinen tuntematon ensimmäisestä yhtälöstä. (Kolmannesta yhtälöstä se on jo eliminoitu.)

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 7 & | \leftarrow \\ & x_2 & & = & 1 & | \cdot (-3) \\ & & x_3 & = & -14 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrr} x_1 & & -x_3 & = & 4 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & -14 \end{array}\right. .$$

Eliminoidaan lopuksi kolmas tuntematon ensimmäisestä yhtälöstä:

$$\left\{\begin{array}{ccccl} x_1 & & -x_3 & = & 4 \quad | \leftarrow \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & -14 \quad | \cdot 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccr} x_1 & & & = & -10 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & -14 \end{array}\right. .$$

Nyt yhtälöryhmä on ratkaistu.

Kuten edellä mainittiin, lineaarisella yhtälöryhmällä ei ole aina ratkaisua, tai ratkaisu ei ole välttämättä yksikäsitteinen. Tällaista yhtälöryhmää nimitetään tällä kurssilla *huonosti ratkeavaksi.*

**Lause 8.6.** *Lineaarisella yhtälöryhmällä on aina joko yksi, ei yhtään tai ääretön määrä ratkaisuja. Jos yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, tai niitä on ääretön määrä, sanotaan, että yhtälöryhmä on* huonosti ratkeava.

**Esimerkki 8.7.** Ratkaistaan eliminoimalla esimerkin 8.2 yhtälöryhmä

$$\left\{\begin{array}{ccccr} 2x & -y & +z & = & -2 \\ -3x & +2y & -z & = & 0 \end{array}\right. .$$

Jaetaan aluksi ensimmäinen yhtälö puolittain 2:lla, jolloin saadaan

$$\left\{\begin{array}{ccccr} x & -\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -1 \\ -3x & +2y & -z & = & 0 \end{array}\right. .$$

Lisätään sitten ensimmäinen yhtälö toiseen 3:lla kerrottuna:

$$\left\{\begin{array}{ccccrl} x & -\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -1 & | \cdot 3 \\ -3x & +2y & -z & = & 0 & | \leftarrow \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccr} x & -\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -1 \\ & \frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -3 \end{array}\right. .$$

Jaetaan jälkimmäinen yhtälö 1/2:lla, jolloin saadaan ensimmäiseksi kertoimeksi 1:

$$\left\{\begin{array}{ccccr} x & -\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -1 \\ & y & +z & = & -6 \end{array}\right. .$$

Lisätään lopuksi toinen yhtälö ensimmäiseen 1/2:lla kerrottuna:

$$\left\{\begin{array}{ccccrl} x & -\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -1 & | \leftarrow \\ & y & +z & = & -6 & | \cdot \frac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccr} x & & +z & = & -4 \\ & y & +z & = & -6 \end{array}\right. .$$

Viimeistä tuntematonta ei voida nyt eliminoida, koska se ei ole missään yhtälössä ensimmäisenä. Tällaista tuntematonta kutsutaan *vapaaksi muuttujaksi.* Sen arvo voi olla mitä vain. Yhtälöryhmällä on ääretön määrä ratkaisuja, mutta nämä ratkaisut riippuvat vapaan muuttujan $z$ arvosta. Jos esimerkiksi $z = 0$, niin $x = -4$ ja $y = -6$.

Edellisessä esimerkissä oli kaksi yhtälöä ja kolme tuntematonta. Jotta vapaita muuttujia ei tulisi, täytyy yhtälöitä olla vähintään yhtä paljon kuin tuntemattomia. Lisäksi mikä tahansa yhtälöryhmä voi olla ratkeamaton. Yhteenvetona saadaan seuraava lause.

**Lause 8.8.** *Jos lineaarisessa yhtälöryhmässä on $n$ tuntematonta ja $m$ yhtälöä, missä $n > m$, yhtälöryhmä on huonosti ratkeava.*

**Esimerkki 8.9.** Tarkastellaan seuraavaa yhtälöryhmää:

$$\left\{\begin{array}{ccccr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = & -2 \end{array}\right. .$$

Ensimmäisen yhtälön ensimmäinen kerroin on valmiiksi 1. Lisätään ensimmäinen yhtälö toiseen $-2$:lla kerrottuna ja kolmanteen $-1$:llä kerrottuna:

$$\left\{\begin{array}{ccccrll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 & | \cdot (-2) & | \cdot (-1) \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 & | \leftarrow & | \\ x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = & -2 & & | \leftarrow \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ & -x_2 & -x_3 & = & -4 \\ & -3x_2 & -3x_3 & = & -5 \end{array}\right. .$$

Jaetaan toinen yhtälö puolittain $-1$:llä:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ & -x_2 & -x_3 & = & -4 & \mid : (-1) \\ & -3x_2 & -3x_3 & = & -5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ & x_2 & +x_3 & = & 4 \\ & -3x_2 & -3x_3 & = & -5 \end{cases}.$$

Lisätään sitten toinen yhtälö ensimmäiseen $-1$:llä kerrottuna ja kolmanteen 3:lla kerrottuna:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 & \mid \leftarrow & \\ & x_2 & +x_3 & = & 4 & \mid \cdot (-1) & \mid \cdot 3 \\ & -3x_2 & -3x_3 & = & -5 & & \mid \leftarrow \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & & & = & -1 \\ & x_2 & +x_3 & = & 4 \\ & & 0 & = & 7 \end{cases}.$$

Viimeiseltä riviltä eliminoituivat kaikki tuntemattomat, mutta oikealle puolelle jäi 7. Tämä on ristiriitaista, sillä $0 \neq 7$. Yhtälöryhmällä ei siis ole ratkaisua. (Huomaa, että vaikka ensimmäisellä rivillä $x_1 = -1$, tämä ei ole ratkaisu, sillä yhtälöryhmää ratkaistaessa on kaikki yhtälöt ratkaistava yhtä aikaa.)

Kerrataan vielä yhtälöryhmän ratkaisumenetelmä. Jokaista yhtälöä kohti ylhäältä alkaen suoritetaan seuraavat vaiheet:

1. Vaihdetaan yhtälö jonkin alemman, käsittelemättömän, yhtälön kanssa, jos tarvitaan.
2. Jaetaan yhtälö puolittain siten, että ensimmäisen tuntemattoman kertoimeksi tulee 1.
3. Eliminoidaan tämän tuntemattoman avulla vastaava tuntematon kaikista muista yhtälöistä.

Kun nämä vaiheet on suoritettu kaikille yhtälöille, tulos voi olla jokin seuraavista:

- Kaikki tuntemattomat jäävät yksin omalle rivilleen, ja yhtälöryhmä ratkeaa yksikäsitteisesti.
- Jokin muuttuja ei ole ensimmäisenä millään rivillä. Tämä on vapaa muuttuja, ja yhtälöryhmän ratkaisu riippuu sen arvosta. Ratkaisuja on ääretön määrä.
- Jostakin yhtälöstä häviää kaikki tuntemattomat, mutta oikealle puolelle jää nollasta poikkeava luku. Tällöin yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

8.2. **Matriisit.** Matriisit ovat lukukaavioita tai lukutaulukoita, joiden avulla on usein helpompi hahmottaa suuri määrä lukuja. Yhtälöryhmien tapauksessa matriisi voi esimerkiksi sisältää kaikki yhtälöryhmän kertoimet, jolloin niitä voi käsitellä kuin yhtenä pakettina.

**Määritelmä 8.10.** Lukukaaviota, jossa on $m$ riviä ja $n$ saraketta, kutsutaan *matriisiksi*, jonka *tyyppi* on $m \times n$, eli $m \times n$*-matriisiksi*. Matriiseja merkitään yleensä isoilla kirjaimilla. Olkoon esimerkiksi

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Nyt $M$ on $m \times n$-matriisi. Luvut $a_{11}, \dots, a_{mn}$ ovat tavallisia lukuja, matriisin *alkioita*. Alkioita merkitään $M_{ij}$, missä $i$ on rivin numero ja $j$ sarakkeen numero. Esimerkiksi $M_{21}$ on toisen rivin ensimmäinen alkio, eli tässä tapauksessa $M_{21} = a_{21}$.

**Esimerkki 8.11.** Esimerkkejä matriiseista:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 13 & \pi \\ 0 & -5 & \sqrt{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Näiden matriisien tyypit ovat vasemmalta oikealle lukien $2 \times 2$, $3 \times 3$, $3 \times 1$ ja $2 \times 3$.

Matriiseja voidaan laskea yhteen ja vähentää toisistaan. Lisäksi niitä voidaan kertoa luvuilla ja toisilla matriiseilla. Näillä operaatioilla on kuitenkin rajoituksia. Matriisit voi esimerkiksi laskea yhteen vain, jos ne ovat samaa tyyppiä.

**Määritelmä 8.12. Matriisien yhteen- ja vähennyslasku.** Olkoot $A$ ja $B$ $m \times n$-matriiseja. Yhteenlasketun matriisin $A + B$ alkiot saadaan laskemalla $A$:n ja $B$:n alkiot yhteen kohdakkain. Sama pätee vähennyslaskulle $A - B$. Siis

$$(A \pm B)_{ij} = A_{ij} \pm B_{ij}.$$

**Huom!** Vain matriiseja, joilla on sama tyyppi, voidaan laskea yhteen tai vähentää toisistaan.

**Esimerkki 8.13.** Kahden $3 \times 2$-matriisin yhteenlasku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+(-1) \\ 3+0 & 4+1 \\ 5+3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

**Määritelmä 8.14. Skalaarikertolasku.** Minkä tahansa matriisin $A$ voi kertoa reaaliluvulla $c$. Tätä toimitusta kutsutaan *skalaarikertolaskuksi* ja merkitään $cA$ (ilman kertomerkkiä). Tällöin jokainen matriisin alkio kerrotaan kyseisellä luvulla, eli

$$(cA)_{ij} = c \cdot A_{ij}.$$

**Esimerkki 8.15.** Erään $3 \times 2$-matriisin kertominen luvulla:

$$2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriisin kertominen luvulla on helppo toimitus ja se voidaan aina suorittaa. Kahden matriisin välinen kertolasku on hieman monimutkaisempi ja rajoitetumpi operaatio.

**Määritelmä 8.16. Matriisikertolasku.** Kaksi matriisia voidaan kertoa toisillaan vain, jos *ensimmäisessä on yhtä paljon sarakkeita kuin toisessa on rivejä.* Olkoon siis $A$ $m \times n$-matriisi ja $B$ $n \times p$-matriisi. Tällöin matriisi $AB$ on määritelty. Sen alkio $(AB)_{ij}$ saadaan kertomalla $A$:n $i$:nnen rivin alkiot $B$:n $j$:nnen sarakkeen alkioilla ja laskemalla nämä yhteen. Siis

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}.$$

Tuloksena on $m \times p$-matriisi.

**Esimerkki 8.17.** Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Koska $A$:ssa on kolme saraketta ja $B$:ssä on vastaavasti kolme riviä, matriisit voidaan kertoa keskenään.

Tarkastellaan aluksi tulomatriisin ensimmäisen rivin ensimmäistä alkiota. Määritelmän mukaan on otettava matriisista $A$ ensimmäinen rivi ja matriisista $B$ ensimmäinen sarake, kerrottava näillä olevat alkiot keskenään, ja laskettava yhteen. Siis

$$\begin{aligned} (AB)_{11} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} \\ &= 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 4. \end{aligned}$$

Kun lasketaan ensimmäisen rivin toinen alkio, kerrotaan matriisin $A$ ensimmäisen rivin alkiot matriisin $B$ toisen sarakkeen alkioilla:

$$\begin{aligned}(AB)_{12} &= A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} \\ &= 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 1 = 5.\end{aligned}$$

Samaan tapaan lasketaan muutkin alkiot:

$$\begin{aligned}AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) + 0\cdot 0 & 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot(-2) + 2\cdot 0 & 1\cdot 2 + 3\cdot(-1) + 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Tulos on $2\times 2$-matriisi, niin kuin pitääkin.

Matriisia, jossa on yhtä monta riviä kuin saraketta, kutsutaan *neliömatriisiksi.* Neliömatriiseja voidaan kertoa toisillaan kummin tahansa päin, mutta tulos ei silti välttämättä ole sama.

**Esimerkki 8.18.** Olkoon $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ ja $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Tällöin

$$AB = \begin{bmatrix} 2\cdot 0 + 1\cdot(-4) & 2\cdot 3 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 2\cdot(-4) & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -8 & 5 \end{bmatrix},$$

mutta

$$BA = \begin{bmatrix} 0\cdot 2 + 3\cdot 1 & 0\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ -4\cdot 2 + 1\cdot 1 & -4\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}.$$

Aina ei siis päde $AB \neq BA$. Kuitenkin seuraavat säännöt pätevät matriisien kertolaskulle silloin, kun se voidaan suorittaa:

1. $A(BC) = (AB)C$,
2. $A(B + C) = AB + AC$.

8.3. **Yhtälöryhmän ratkaiseminen matriisien avulla.** Tässä osassa tarkastellaan vain sellaisia yhtälöryhmiä, joissa on yhtä monta yhtälöä kuin tuntematonta. Mikä tahansa yhtälöryhmä voidaan kuitenkin muuttaa tällaiseen muotoon niin, että ratkaisut pysyvät samoina. Yhtälöihin voidaan aina lisätä tuntemattomia, jos niiden kertoimeksi vain asetetaan nolla. Toisaalta sama yhtälö voidaan toistaa ryhmässä useamman kerran, jolloin yhtälöiden määrä kasvaa, vaikka ratkaisut eivät muutu.

Olkoon $A$ $n\times n$-neliömatriisi, alkioinaan $a_{11},\dots,a_{nn}$, ja olkoot $X$ ja $B$ $n\times 1$-matriiseja (vain yksi sarake), alkiot vastaavasti $x_1,\dots,x_n$ ja $b_1,\dots,b_n$. Tarkastellaan *matriisiyhtälöä*

$$AX = B.$$

Yhtälön vasemmalla puolella oleva kertolasku antaa tulokseksi

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}.$$

Tämä on $n\times 1$-matriisi, samoin kuin oikealla puolella oleva matriisi $B$. Yhtälö pätee, jos ja vain jos vasemmanpuoleisen matriisin alkiot ovat samat kuin oikeanpuoleisen, eli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \qquad\vdots & \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}.$$

Tämä on lineaarinen yhtälöryhmä, joka siis vastaa alkuperäistä matriisiyhtälöä.

**Lause 8.19.** *Lineaarista yhtälöryhmää, jossa on $n$ yhtälöä ja $n$ tuntematonta, vastaa matriisiyhtälö $AX = B$, missä $A$ on $n \times n$-matriisi, joka sisältää yhtälöryhmän kertoimet, $X$ on $n \times 1$-matriisi, joka sisältää tuntemattomat, ja $B$ on $n \times 1$-matriisi, joka sisältää yhtälöiden oikealla puolella olevat vakioarvot.*

Matriisimuotoa voidaan käyttää merkintöjen helpottamiseksi. Eliminointimenetelmää sovellettaessa muuttujien kirjoittaminen on oikeastaan turhaa, sillä vain kertoimilla on eliminoinnin kannalta jotain merkitystä. Muuttujat pysyvät koko ajan samoilla paikoilla. Suorittamalla eliminointi matriisimuodossa vältytään muuttujien toistuvalta kirjoittamiselta.

**Esimerkki 8.20.** Ratkaistaan sellaisen paraabelin yhtälö, joka kulkee pisteiden $(-1, 1)$, $(1, 2)$ ja $(2, 1)$ kautta. Paraabelin yleinen yhtälö on $y = ax^2 + bx + c$. Sijoitetaan tähän yhtälöön vuorotellen annettujen pisteiden koordinaatit, jolloin saadaan seuraavat yhtälöt:

$$\begin{cases} a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 1 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a - b + c &= 1 \\ a + b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= 1. \end{cases}.$$

Tätä yhtälöryhmää vastaa matriisiyhtälö $AX = B$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Unohdetaan nyt hetkeksi tuntemattomat, ja ryhdytään eliminoimaan *yhdistettyä matriisia*

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 4 & 2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

Lisätään ensimmäinen rivi toiseen $-1$:llä kerrottuna ja kolmanteen $-4$:llä kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 4 & 2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) & | \cdot (-4) \\ \leftarrow & | \\ & | \leftarrow \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 6 & -3 & | & -3 \end{bmatrix}.$$

Toisen rivin ensimmäisenä (nollasta poikkeavana) kertoimena on 2, joten jaetaan tämä rivi puolittain kahdella, jotta saadaan kertoimeksi 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 6 & -3 & | & -3 \end{bmatrix} : 2 \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 6 & -3 & | & -3 \end{bmatrix}.$$

Lisätään sitten toinen rivi ensimmäiseen 1:llä kerrottuna ja kolmanteen $-6$:lla kerrottuna:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 6 & -3 & | & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \\ \cdot 1 & | \cdot (-6) \\ & | \leftarrow \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 0 & -3 & | & -6 \end{bmatrix}.$$

Jaetaan alin rivi luvulla $-3$, jotta saadaan tuon rivin ensimmäiseksi nollasta poikkeavaksi kertoimeksi 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 0 & -3 & | & -6 \end{bmatrix} : (-3) \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Lisätään lopuksi kolmas rivi ensimmäiseen $-1$:llä kerrottuna:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \quad \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Nyt eliminointi on suoritettu. Syntynyttä yhdistettyä matriisia vastaa seuraava täysin ratkaistu yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} x & & & = & -1/2 \\ & y & & = & 1/2 \\ & & z & = & 2 \end{cases}.$$

Varsinainen hyöty matriisien käyttämisestä saadaan, kun verrataan matriisiyhtälön ratkaisemista tavallisen yhtälön ratkaisemiseen. Tarkastellaan seuraavaksi hieman tavallisen yhtälön ratkaisemista ja yritetään sen jälkeen yritetään soveltaa samoja keinoja matriisiyhtälön ratkaisemiseen. Ensimmäisen asteen yhtälö on muotoa $ax = b$. Jos $a \neq 0$, voidaan yhtälö ratkaista jakamalla sen molemmat puolet $a$:lla, eli kertomalla molemmat puolet $a$:n käänteisluvulla $1/a = a^{-1}$:

$$\begin{aligned} ax &= b \qquad | \, a^{-1}\cdot \\ a^{-1}(ax) &= a^{-1}b \\ (a^{-1}a)x &= a^{-1}b \\ 1 \cdot x &= a^{-1}b \\ x &= a^{-1}b. \end{aligned}$$

Näin löydetään yhtälön ratkaisu $x = a^{-1}b = b/a$. Ratkaiseminen perustui tiettyihin lukujen ominaisuuksiin. Ensinnäkin $a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)x$, toiseksi $a^{-1}a = 1$ ja lopulta $1 \cdot x = x$. Ensimmäinen ominaisuus pätee matriiseillakin, sillä $A(BC) = (AB)C$, jos kertolasku vain voidaan suorittaa. Jos matriiseilta löydetään muutkin ominaisuudet, voidaan matriisiyhtälö ratkaista samalla tavalla kuin lukuyhtälö. Viimeinen ominaisuus, eli $1 \cdot x = x$, toteutuukin helposti myös matriiseilla.

**Määritelmä 8.21.** Neliömatriisia, joka sisältää vasemmalta ylhäältä oikealle alas kulkevalla lävistäjällään pelkkiä ykkösiä ja muuten pelkkiä nollia, kutsutaan *ykkösmatriisiksi* ja merkitään

$$\mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

missä $n$ on rivien (ja sarakkeiden) lukumäärä. Jokaista rivimäärää $n$ vastaa oma ykkösmatriisi $\mathrm{I}_n$. Ykkösmatriisille pätee

$$\mathrm{I}_n X = X,$$

olipa $X$ mikä tahansa $n \times p$-matriisi. (Siinä täytyy siis olla $n$ riviä, jotta kertolasku olisi mahdollinen.)

Ykkösmatriisilla kertominen vastaa siis ykkösellä kertomista: se ei muuta kerrottavaa matriisia mitenkään. Tarvitaan enää käänteislukua vastaava matriisi. Luvun $a$ käänteisluvulla $a^{-1}$ on se tärkeä ominaisuus, että $a^{-1} \cdot a = 1$. Täytyisi siis löytyä sellainen matriisia $A$ vastaava matriisi $A^{-1}$, että $A^{-1}A = \mathrm{I}_n$. Kaikilla luvuilla ei ole käänteislukua (nimittäin nollalla), eikä kaikilla matriiseillakaan ole käänteismatriisia.

**Määritelmä 8.22.** Olkoon $A$ $n \times n$-neliömatriisi. Jos on olemassa jokin matriisi $B$, jolle pätee $BA = \mathrm{I}_n$, niin sanotaan, että $A$ on *säännöllinen* eli *kääntyvä*, ja $B$ on $A$:n *käänteismatriisi*. Käänteismatriisi on yksikäsitteinen, ja sitä merkitään $B = A^{-1}$. Lisäksi, jos $A$ on säännöllinen, niin myös $A^{-1}$ on säännöllinen ja sen käänteismatriisi on $A$ (eli $(A^{-1})^{-1} = A$ ja $AA^{-1} = \mathrm{I}_n$).

**Esimerkki 8.23.** Olkoon $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ ja $B = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Tällöin

$$BA = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + (-5) \cdot 1 & 3 \cdot 5 + (-5) \cdot 3 \\ -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}_2.$$

Siispä $B$ on $A$:n käänteismatriisi eli $B = A^{-1}$.

Jos neliömatriisille $A$ sovelletaan eliminointimenetelmää, voi tuloksena olla ykkösmatriisi (vrt. esim. 8.20). Jos samat operaatiot suoritetaan samassa järjestyksessä ykkösmatriisille, tuloksena on $A$:n käänteismatriisi.

**Lause 8.24. *Käänteismatriisin olemassaolo ja löytäminen.*** *Olkoon $A$ $n \times n$-matriisi. Sovelletaan yhdistettyyn matriisiin $[A|\mathrm{I}_n]$ eliminointimenetelmää, jolloin saadaan uusi yhdistetty matriisi $[B|C]$. Jos nyt $B$ on ykkösmatriisi, niin $A$ on säännöllinen, ja $C$ on $A$:n käänteismatriisi. Jos taas $B \neq \mathrm{I}_n$, niin $A$ ei ole säännöllinen.*

**Esimerkki 8.25.** Tarkastellaan esimerkin 8.23 matriisia $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$. Sovelletaan eliminointimenetelmää yhdistettyyn matriisiin $[A|\mathrm{I}_2]$:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 2 & 5 & | & 1 & 0 \\ 1 & 3 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} :2 \\ \phantom{x} \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \leftarrow \end{matrix} \\
\rightsquigarrow &\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & | & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \phantom{x} \\ : \frac{1}{2} \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & | & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \cdot\left(-\frac{5}{2}\right) \end{matrix} \\
\rightsquigarrow &\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3 & -5 \\ 0 & 1 & | & -1 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Vasemmalle puolelle muodostui ykkösmatriisi, joten $A^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Tämä vastaa aikaisempaa tulosta.

**Esimerkki 8.26.** Tarkastellaan vielä matriisia $S = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{smallmatrix}\right]$. Eliminoimalla yhdistettyä matriisia $[S|\mathrm{I}_2]$ saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ -3 & 6 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vasemmanpuoleisen matriisin toiselta riviltä hävisivät kaikki alkiot, joten eliminointia ei voida jatkaa. Vasemmanpuoleista matriisia ei saatu eliminoimalla ykkösmatriisiksi, joten sillä ei ole käänteismatriisia.

Tarkastellaan nyt jälleen matriisiyhtälöä $AX = B$. Jos $A$:lla on käänteismatriisi, voimme ratkaista tämän yhtälön aivan kuten tavallisen ensimmäisen asteen yhtälön kertomalla molemmat puolet *vasemmalta* $A$:n käänteismatriisilla. (Oikealta kertominen ei tuota samaa tulosta, koska matriisien kertolaskulle ei välttämättä päde sääntö $AB = BA$.) Tämä käy seuraavasti:

$$\begin{aligned}
AX &= B \qquad | \, A^{-1} \cdot \\
A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\
(A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\
\mathrm{I}_n X &= A^{-1}B \\
X &= A^{-1}B.
\end{aligned}$$

Koska tämä matriisiyhtälö vastasi tiettyä yhtälöryhmää, voidaan kyseinen yhtälöryhmä siis ratkaista käänteismatriisin avulla. Koska käänteismatriisin olemassaolo riippuu vain kerroinmatriisista $A$, riippuu myös ratkaisun *onnistuminen* vain matriisista $A$, ei siis tuntemattomista tai vakiot sisältävästä matriisista $B$.

**Lause 8.27.** *Olkoon ratkaistavana yhtälöryhmä $AX = B$. Jos kerroinmatriisi $A$ on säännöllinen, yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu $X = A^{-1}B$. Jos $A$ ei ole säännöllinen, yhtälöryhmä on huonosti ratkeava.*

Käänteismatriisi soveltuu käytettäväksi erityisesti silloin, kun on ratkaistavana monta yhtälöryhmää, joissa on samat kertoimet.

**Esimerkki 8.28.** Olkoot ratkaistavina seuraavat yhtälöparit:

$$\begin{cases} 2x + 5y &= 1 \\ x + 3y &= 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + 5y &= -2 \\ x + 3y &= 0 \end{cases}.$$

Näissä yhtälöpareissa on samat kertoimet, ja ne voidaan kirjoittaa matriisiyhtälöinä $AX = B_1$ ja $AX = B_2$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matriisin $A$ käänteismatriisi laskettiin esimerkissä 8.25. Se on $A^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Nyt voidaan ratkaista helposti molemmat yhtälöryhmät edellisen lauseen avulla. Ensimmäisessä

$$X = A^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix},$$

joten ratkaisu on $x = -7$, $y = 3$. Toisessa yhtälöryhmässä

$$X = A^{-1}B_2 = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot (-2) + (-5) \cdot 0 \\ -1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix},$$

joten ratkaisu on $x = -6$, $y = 2$.

Jos yhtälöryhmä on huonosti ratkeava, käänteismatriisisista ei ole hyötyä. Sen avulla ei esimerkiksi voida sanoa, onko yhtälöryhmä ristiriitainen vai onko ratkaisuja mahdollisesti äärettömän monta.

LOPPU