

Tehtävät näyttävät pitkiltä, mutta suuri osa tekstistä on selityksiä ja neuvoja, joiden tarkoitus on auttaa ymmärtämään, mistä milloinkin on kysymys.

- Maatalon emäntä aikoo leipoa miehensä kasvattamien kanojen munista neliöpohjaisen täytekakun. Kakun reunat ja päällinen katetaan kermalla. Emännän kerma riittää 1200 cm^2 kokoiselle pinnalle. Mitent paksu emännän on tehtävä kakusta, jotta kerma riittäisi mutta kakusta tulisi tilavuudeltaan mahdollisimman kookas?

Neuvo: Valitse muuttujaksi x kakun leveys ja päättele käytettävissä olevan kerman määrän avulla, millä tavoin kakun paksuus riippuu x :stä. Tilavuuden funktio on tietysti $x^2 \cdot$ ”kakun paksuus”, josta pitäisi tulla $V(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 300x$.

- Olkoon $f(x) = x^2$. Laske funktion f ylä- ja alasummat välillä $[0, 2]$, kun osavälejä on neljä eli kunkin osavälin pituus on $1/2$. Piirrä myös funktion kuvaaja sekä kuvaajaa ylä- ja alapuolelta approksimoivat suorakulmiot. Laske sitten integraali $\int_0^2 f(x) dx$ tarkasti ja vertaile saamiasi tuloksia.

osaväli	suurin arvo	yläsuorak. ala	pienin arvo	alasuorak. ala
$[0, 1/2]$				
$[1/2, 1]$				
$[1, 3/2]$				
$[3/2, 2]$				
yhhteensä	—		—	

- Laske seuraavat integraalit.

a) $\int_{-1}^1 6x^2 - 2x + 1 dx$, b) $\int_1^2 x^2 - \frac{1}{x^2} dx$, c) $\int_0^1 t + \sqrt{t} dt$.

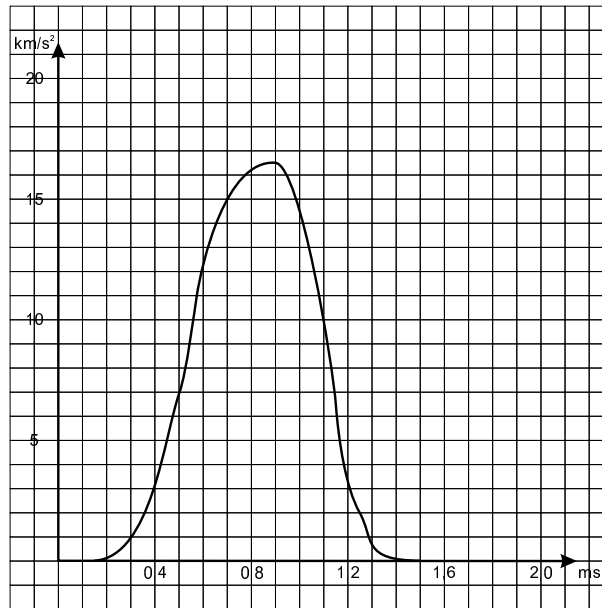
- Mikä luvun A pitäisi olla, jotta funktio $F(x) = A(x^2 - 1)^8$ olisi funktion $f(x) = x(x^2 - 1)^7$ integraalifunktio? Laske tämän integraalifunktion avulla integraali

$$\int_0^1 x(x^2 - 1)^7 dx.$$

Neuvo: Laske funktion F derivaatta yhdistetyn funktion derivointisäännöllä. Vakiokerroin A ei muutu derivoitaessa.

5. Fysiikassa kappaleen liikuttamiseen käytettävä voima on suorassa suhteessa kappaleen kokemaan kiihtyvyyteen. Verrannollisuuskertoimenä on kappaleen massa. Kiihtyvyys puolestaan kuvaa nopeuden muutosta.

Biljardipalloon kiinnitettiin voima-anturi, minkä jälkeen palloa lyötiin. Voima-anturin lukemista laskettiin kiihtyvyys kullakin ajanhetkellä jakamalla voima pallon massalla. Näin saatiin alla oleva kuvaaja. Määritä tuosta kuvaajasta silmämääräisesti integroimalla pallon saama nopeus, eli kuinka paljon nopeutta kertyi sinä aikana, jonka lyönti kesti. (Yhden ruudun pinta-ala on $0,1 \cdot 1 = 0,1$, yksikkönä m/s.)



6. Olkoon k mielivaltainen positiivinen kokonaisluku. Tällöin voidaan määritellä polynomifunktio $f_k : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) = -x^{2k} + 1$. Laske funktion f_k kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala tapauksissa $k = 1$ sekä $k = 2$ ja piirrä kuvat näistä tilanteista. Laske myös pinta-ala yleisessä tapauksessa. Mitä arvoa pinta-ala lähestyy, kun k kasvaa rajatta? Piirrä kuva myös rajatilanteesta, kun $k \rightarrow \infty$.