

1. Laske funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$ keskimääräinen muutosnopeus väleillä $[1, 2]$ ja $[0, 1]$. Laske myös erotusosamäärän yleinen lauseke pisteessä 1 (siis $x = 1$) merkitsemällä välin pituutta h :lla. Totea sijoittamalla tähän arvot $h = 1$ ja $h = -1$, että saat samat tulokset kuin edellä. Laske lopuksi erotusosamäärän raja-arvo, kun h lähestyy nollaa.
2. Kirjoita seuraavien funktioiden erotusosamäärän lausekkeet pisteessä $x = 0$ välin pituudella h . Tutki, ovatko funktiot derivoituvia tuossa pisteessä, eli onko erotusosamäärällä raja-arvoa, kun $h \rightarrow 0$.

a) $f(x) = x^3$, b) $g(x) = \sqrt[3]{x}$,
c) $p(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \geq 0, \\ 0, & \text{kun } x < 0, \end{cases}$ d) $q(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kun } x \geq 0, \\ x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$

Neuvo. Käytä b)-kohdassa potenssimerkintää juurelle ja huomaa, että $h^{1/3}/h = h^{-2/3}$. Kohdissa c) ja d) pitää erotusosamäärää tarkastella erikseen tapauksissa $h > 0$ ja $h < 0$.

3. Derivoi seuraavat funktiot. Millä muuttujan arvoilla funktiot ovat derivoituvia?

a) $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x+1}$, b) $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$,
c) $h(x) = \frac{1}{x} + 6\sqrt[3]{x} - \frac{2x}{3\sqrt{x}}$, d) $k(x) = (-x^2 + 5x)^7$.

Kohdassa c) kannattaa muuttaa ensin kaikki termit potenssimuotoon.

4. Oheisessa kuvassa (toisella sivulla) on mehiläisen lentämän matkan kuvaaja ajan funktiona. Määritä kuvaajan perusteella likimääräisesti
 - a) keskinopeus aikavälillä $[4, 8]$,
 - b) hetkellinen nopeus ajanhetkellä $t = 6$ piirtämällä kuvaajalle sivuaaja kyseiseen kohtaan ja määrittämällä sen kulmakerroin.
(Keskinopeus vastaa erotusosamäärää.)

5. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x}.$$

Tutki ja perustele derivaatan avulla, missä funktio on kasvava, missä vähenevä, ja missä pisteissä funktiolla on ääriarvoja.

6. Maanviljelijä on ostanut siemeniä, jotka riittävät pinta-alaltaan 20000 m²:n suorakulmaisen pellon kylvämiseen. Pelto kylvetään metsän reunaan ja ympäröidään muilta kolmelta sivulta aidalla. Miten pitkät on tehtävä pellon sivuista, jotta aidasta tulisi mahdollisimman lyhyt?

