

1. Mitkä seuraavista riippuvuusehdoista voivat määrittellä funktion? Mikä olisi sopiva määrittelyjoukko?

a) $f(x) = \frac{x}{x(x-3)}$,

b) $b(t)$ = ”bensamittarin lukema hetkellä t matkan alusta lähtien”,

c) $t(k)$ = ”ajanhetki, jolloin puu kasvaa nopeudella k ”

d) $s(x)$ = ”pienin ei-negatiivinen luku, joka on suurempi kuin x ”.

2. Olkoot $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^3$. Laske yhdistettyjen funktioiden $f \circ g$ ja $g \circ f$ arvot pisteessä 2. Kirjoita yhdistettyjen funktioiden $f \circ f$ ja $g \circ f$ riippuvuussäännöt, eli miten lasketaan $(f \circ f)(x)$ ja $(g \circ f)(x)$.

3. Piirrä funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x - 6$$

kuvaaja ja arvioi sen perusteella funktion nollakohtia (eli millä luvuilla x pätee $f(x) = 0$). Tarkista nollakohdat laskemalla.

4. Olkoon $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 7x + 6}{x^3 - 4x^2 + 3x}.$$

Laske f :n arvoja (laskimella) pisteen $x = 1$ ympäristössä ja koeta päätellä, mikä on f :n raja-arvo kohdassa 1. Laske funktiolle f myös arvoja suurilla x :n arvoilla ja päättelä näistä, mitä on $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

5. Laske seuraavat raja-arvot luennolla opittujen laskusääntöjen avulla:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x^2 + 1)$, (b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$, (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 - 7x + 6}{x^3 - 4x^2 + 3x}$.

6. Määritä luku a siten, että funktiosta $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = -1 \\ x^3 - x^2 + a, & \text{kun } x \neq -1 \end{cases}$$

tulee jatkuva.

Neuvo: Päättelä ensin funktion raja-arvo pisteessä -1 ja muista, että tämä ei riipu funktion arvosta kyseisessä pisteessä. Funktio on jatkuva pisteessä -1 , jos $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$.