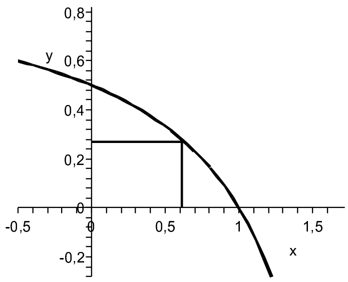
Y100 matematiikka
Yhteiskuulustelu 22.3.2006
Malliratkaisuja (4 sivua)

1. Funktion $f(x) = (x-1)/(x-2)$ kuvaaja leikkaa x-akselin kohdassa $x = 1$. Kuvaajan alle piirretään kuvan mukainen suorakulmio siten, että sen vasen alakulma on origossa ja oikea yläkulma kuvaajalla. Mikä on suorakulmion leveys, kun sen pinta-ala on suurin mahdollinen?



Ratkaisu. Merkitään suorakulmion leveyttä muuttujalla x. Koska suorakulmion oikea yläkulma on kuvaajalla, sen koordinaatit ovat $(x, f(x))$. Suorakulmion korkeus on siis $f(x)$. Alaksi saadaan

$$A(x) = xf(x) = \frac{x^2 - x}{x - 2}.$$

Tämä pinta-ala voidaan ajatella määritellyksi, kun x on suljetulla välillä $[0, 1]$. Koska pinta-ala on tällä alueella määritelty ja derivoituva, suurin arvo löytyy välin päätepisteestä tai derivaatan nollakohdasta. Välin päätepisteissä pinta-ala on selvästi nolla, joten keskitytään derivaatan nollakohtaan.

Pinta-alan derivaatta on

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{(x-2)(2x-1) - (x^2 - x) \cdot 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - x - 4x + 2 - x^2 + x}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 2}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Tämän nollakohdat saadaan osoittajan nollakohdista (huomaa, että nimittäjän nollakohta 2 ei ole tarkasteluvälillä). Sovelletaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \iff x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Juurista ainoastaan $x = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586$ on tarkasteluvälillä. Koska se on positiivinen, se on leveys, jolla suorakulmion pinta-ala on suurin.

2. Auton nopeus noudattaa jonkin aikaa funktiota $v(t) = -\frac{1}{3}t^2 + 6t$ (m/s), missä t on aika sekunteina. Laske auton kulkema matka aikavälillä $[2\text{ s}, 5\text{ s}]$. (Matka on nopeuden kertymä ajassa.)

   Ratkaisu. Nopeuden kertymä välillä $[2, 5]$ saadaan integroimalla nopeuden funktiota kyseisellä välillä. Näin saadaan

$$\begin{aligned}\int_2^5 v(t)\,dt &= \int_2^5 -\frac{1}{3}t^2 + 6t\,dt \\ &= \mathop{\Big/}_{2}^{5} \left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}t^3 + 6\cdot\frac{1}{2}t^2\right) = \mathop{\Big/}_{2}^{5} \left(-\frac{1}{9}t^3 + 3t^2\right) \\ &= \left(-\frac{1}{9}\cdot 5^3 + 3\cdot 5^2\right) - \left(-\frac{1}{9}\cdot 2^3 + 3\cdot 2^2\right) = 50.\end{aligned}$$

   Auton kulkema matka on siis 50 m.

3. Viljelijöiden harmiksi eräänä satokautena koloradonkuoriaisparis-kunta (Leptinotarsa decemlineata) pääsi pesiytymään perunapeltoon. Suotuisissa oloissa kuoriaisten lisääntymisnopeus oli joka hetki suoraan verrannollinen niiden lukumäärään. Kuuden kuukauden jakson jälkeen kuoriaisia oli jo 20000. Ratkaise kuoriaisten määrä ajan funktiona.

   Ratkaisu. Merkitään kuoriaisten määrää ajan funktiona $m(t)$. Tällöin kasvunopeus on funktion derivaatta $m'(t)$. Koska kasvunopeus on joka hetki suoraan verrannollinen kuoriaisten lukumäärään, saadaan differentiaaliyhtälö

$$m'(t) = km(t),$$

   missä k on tuntematon vakio (verrannollisuuskerroin). Koska lukumäärä on tehtävässä aina positiivinen, saadaan yhtälö separoituvaan muotoon jakamalla se $m(t)$:llä:

$$\frac{m'(t)}{m(t)} = k.$$

   Ratkaistaan saatu separoituva yhtälö. Vasemman puolen eräs integraalifunktio on

$$\int \frac{1}{m(t)}m'(t)\,dt = \int \frac{1}{m(t)}\,dm = \ln|m(t)|.$$

   Koska määrä on aina positiivinen, itseisarvomerkit voidaan unohtaa. Vastaavasti oikean puolen eräs integraalifunktio on kt. Täten saadaan

$$\begin{aligned} \ln m(t) &= kt + C \\ \Longleftrightarrow m(t) &= e^{kt+C} \\ \Longleftrightarrow m(t) &= e^{kt}e^{C} \\ \Longleftrightarrow m(t) &= m_0 e^{kt}. \end{aligned}$$

Tässä on merkitty $m_0 = e^C$, C on integroimisvakio.

Alussa kuoriaisia oli kaksi kappaletta, joten

$$m(0) = m_0 e^{k\cdot 0} = m_0 \cdot 1 = 2.$$

Siispä $m_0 = 2$. Toisaalta kuuden kuukauden kuluttua määrä oli 20000, joten

$$\begin{aligned} m(6) = 2e^{k\cdot 6} &= 20000 \quad | : 2 \\ \Longleftrightarrow \quad e^{k\cdot 6} &= 10000 \\ \Longleftrightarrow \quad k \cdot 6 &= \ln 10000 \\ \Longleftrightarrow \quad k &= \frac{1}{6} \ln 10000 \approx 1,535. \end{aligned}$$

Kuoriaisten määrää kuvaa siis funktio

$$m(t) = 2e^{1,535t}.$$

4.a) Tarkastellaan matriiseja

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ a & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Millä a:n arvolla vektorit $\bar{x}$ ja $T\bar{x}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan?

Ratkaisu. Lasketaan ensin vektori $T\bar{x}$:

$$T\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ a\cdot 1 + 0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ a \end{bmatrix}.$$

Vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan silloin, kun niiden pistetulo on nolla. Lasketaan vektorien pistetulo:

$$\bar{x} \cdot T\bar{x} = (1,1) \cdot (2,a) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot a = 2 + a.$$

Pistetulo on nolla, kun $a = -2$. Tällöin vektorit ovat kohtisuorassa.

4.b) Ratkaise seuraava yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & x_2 & -3x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & x_2 & -x_3 & = & 5 \end{cases}.$$

Ratkaisu. Käytetään Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmää:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrll} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -1 & \mid \cdot(-2) & \mid \cdot 2 \\ 2x_1 & x_2 & -3x_3 & = & 1 & \mid \leftarrow & \mid \\ -2x_1 & x_2 & -x_3 & = & 5 & & \mid \leftarrow \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -1 & \\ & 3x_2 & -7x_3 & = & 3 & \mid : 3 \\ & -x_2 & 3x_3 & = & 3 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcrll} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -1 & \mid \leftarrow & \\ & x_2 & -\frac{7}{3}x_3 & = & 1 & \mid \cdot 1 & \mid \cdot 1 \\ & -x_2 & 3x_3 & = & 3 & & \mid \leftarrow \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & & -\frac{1}{3}x_3 & = & 0 & \\ & x_2 & -\frac{7}{3}x_3 & = & 1 & \\ & & \frac{2}{3}x_3 & = & 4 & \mid : \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcrll} x_1 & & +\frac{1}{3}x_3 & = & 0 & \mid \leftarrow & \\ & x_2 & -\frac{7}{3}x_3 & = & 1 & \mid & \mid \leftarrow \\ & & x_3 & = & 6 & \mid \cdot \frac{1}{3} & \mid \cdot \frac{7}{3} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & & & = & 2 \\ & x_2 & & = & 15\ . \\ & & x_3 & = & 6 \end{array}\right.$$